HAKONE SEMINAR 14 (1998) 49-59.

A local move of links

渋谷哲夫（大阪工大）

3-space R^3 の oriented links について様々な local moves の性質が研究されている。ここでは #(II)-move と Δ-move より強い move, C-move と呼ぶ, を定義しこの move に関する knots と links の分類を行う。なお本稿は [7] を一部要約したものである。

link の2つの local moves が同値であるとは，互いに相手の有限回の moves で移り合うときを言う。このとき #(II)-move, Δ-move はつぎの moves とそれぞれ同値であることが知られている。

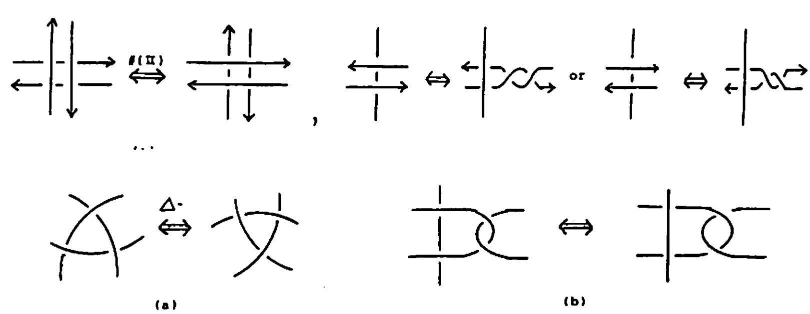

Fig. 1

この2つの moves から新たに Fig. 2 のような C-move と呼ぶ local move を定義する。(これは #(II)-move や Δ-move より強い move であることが以下の結果で分かる。) 特に Fig. 2 の3本の arcs が link の1つの component に含まれている時，この move を

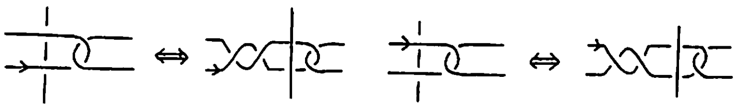

Fig. 2

self C-moveという。2つのlinks lとl'がC-同値とはlとl'が有限回のC-movesで移り合うとき。またlとl'がself C-同値とはlとl'が有限回のself C-movesで移り合うときをいう。

§1ではlinkのC-moveと#(II)-move, Δ-moveとの関係と有限回のC-movesで実現可能なlocal movesについて述べる。

§2ではlinkの(w.)C-cobordismを定義し、それがlinkのC-同値と同じであることを示す。

§1, 2の結果を用いて§3ではknotsとlinksのC-同値による分類、§4ではlinksのself C-同値とself Δ-同値との関係を調べる。

§1. linkのC-move.

この章ではC-moveのいくつかの性質について調べる。linkのfusionについては[1]で定義している。

<u>Lemma 1.1.</u> (1) A C-moveは2回のΔ-movesで実現できる。

(2) A C-moveはlink 6_3^3を適当にfusionして実現できる。

(3) A C-moveはa Δ-moveとHopf linkの適当なfusionで実現できる。

(証明)上の事柄はFig.3よりそれぞれ得られる。

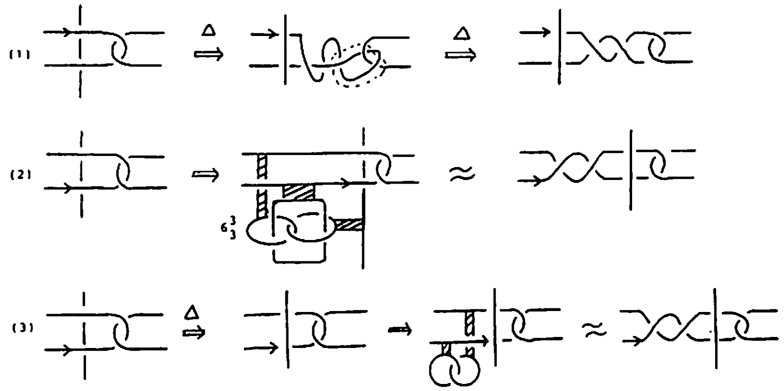

Fig. 3

Lemma 1.1(1)より ℓ と ℓ' が(self) C-同値ならば(self) Δ-同値である。しかし逆は成立しない。なぜならLemma 1.1(2)より 6^3_3 のArf invariantは0だからC-moveはArf invariantを変えない変形であるが、Δ-moveはそれを変える変形である。また明らかに ℓ と ℓ' が(self) C-同値ならば、(self)#(II)-同値であるが、この逆も成立しないことが知られている, [3]。

Lemma 1.2. Fig. 4 (a), (d)のtanglesはa C-moveで移り合う。

(証明) つぎのような変形を行なう。

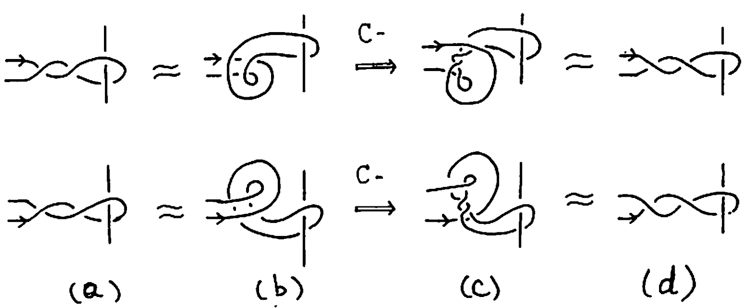

Fig. 4

§2. link の W-cobordism と C-同値

ℓ, ℓ' をそれぞれ $R^3[a]$, $R^3[b]$ に含まれる n-component link とする, ただし $a<b$。このときつぎの条件を満たす n annuli $A_1, \cdots, A_n$ が $R^3[a,b]$ に存在したとする: 各 A_i について $\ell \cap A_i \neq \phi$, $\ell' \cap A_i \neq \phi$ でもし $\mathcal{A}(=A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ が singular ならば, その集合を $S(\mathcal{A})$ と書くとき, $S(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の内部の有限個の点から成り, $\mathcal{A}-S(\mathcal{A})$ は locally flat で $S(\mathcal{A})$ の各点 P に対し $(\partial N(P; R^3[a,b]), \partial N(P; \mathcal{A}))$ の link type が 6_3^3 である。このとき ℓ と ℓ' が weakly C-cobordant という。ℓ と ℓ' が C-同値ならば Lemma 1.1(2) より w. C-cobordant であることは明らかであるが, [5] の Lemma 1.17 と同様な証明でこの逆が成立する。すなわち.

Theorem 2.1. 2つの links が w. C-cobordant ならば, それらは C-同値である。

§3. link の C-同値.

n-component link $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ が proper とは, すべての i で

$$\mathrm{Link}(k_i, \ell - k_i) \left(= \sum_{j \neq i} \mathrm{Link}(k_i, k_j)\right) \equiv 0 \pmod 2$$

が成立するときをいう。ℓ が proper のとき ℓ の Arf invariant $\varphi(\ell)$, が定義される, [4]。$\varphi(6_3^3)=0$ だから Lemma 1.1 より つぎを得る。

Lemma 3.1. $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ と $\ell' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ が C-同値とする。もし ℓ が proper ならば ℓ' も proper で $\varphi(\ell)=\varphi(\ell')$ である。特に ℓ と ℓ' が self C-同値ならば $\varphi(\ell)=\varphi(\ell')$ で

$\varphi(k_i)=\varphi(k_i')$, $i=1,\cdots,n$ である。

Theorem 3.2 と 3.3 がそれぞれ knots, links の C-同値による分類である。

Theorem 3.2. k, k' を knot とする。k と k' が C-同値である必要十分条件は $\varphi(k)=\varphi(k')$ である。

(証明) 必要条件は Lemma 3.1 より得る。
逆に $\varphi(k)=\varphi(k')$ と仮定する。k に張る disk D で singularity $\mathcal{S}(D)$ が互いに交わらない clasp type のみのものとする。すなわち $D=D^*\cup B_1\cup\cdots\cup B_s$ で D^* は non-singular disk で $B_1,\cdots,B_s$ が互いに交わらない non-singular disk で $\partial D^*\cap\partial B_i$ が1本の arc, $\mathcal{S}(D^*\cap B_i)$ が1本の clasp type の arc になるようにできる, Fig. 5(a)。そのとき各 B_i を有限回の C-moves で適当に変形して

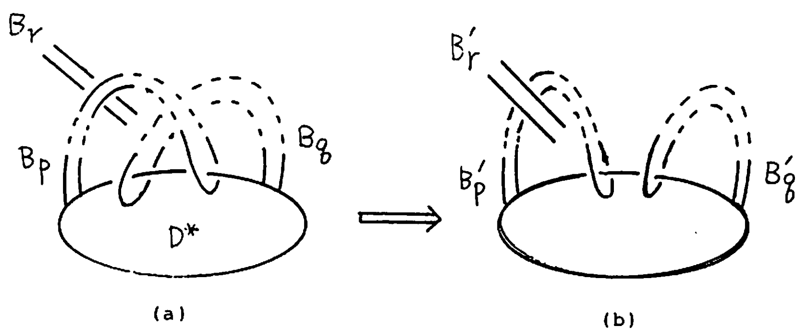

Fig. 5

つぎのような disk $D'=D^*\cup B_1'\cup\cdots\cup B_n'$ まで変形できる。すなわち各 B_i' は unknotted で B_j' $(j\neq i)$ と split し, $\partial D^*\cap\partial B_i'$ と $\mathcal{S}(D^*\cap B_i')$ が ∂D^* で隣り合う, Fig. 5(b)。さらに B_i' の twist 数は Lemma 1.2 より 0 又は ±1 としてよい。0-twist ならば

isotopy で B_i' を除去する。±1-full twist の bands が隣接するときは、Fig.6により2つの bands を有限回の C-moves で同時に除去する，Fig.6。

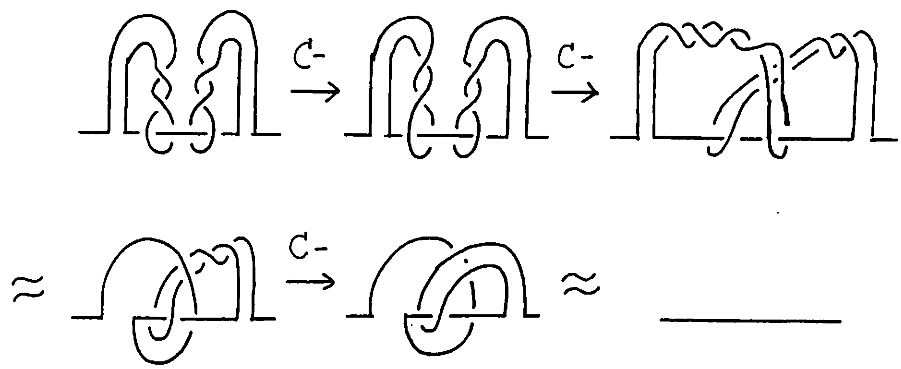

Fig.6

以上の変形をくり返すことにより，k は有限回の C-move で 3_1-knot か trivial knot になる。したがって Lemma 3.1より Theorem 3.2 を得る。

2つの n-component links $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$, $\ell' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ が link-homologous とは $\mathrm{Link}(k_i, k_j) = \mathrm{Link}(k_i', k_j')$ for $i, j = 1, \cdots, n$, $i \neq j$ のときを言う。

Theorem 3.3. ℓ と ℓ' を n-component links とする。

(1) ℓ が proper でないとき，ℓ と ℓ' が C-同値である必要十分条件は ℓ と ℓ' が link-homologous である。

(2) ℓ が proper のとき，ℓ と ℓ' が C-同値である必要十分条件は ℓ と ℓ' が link-homologous で $\varphi(\ell) = \varphi(\ell')$ である。

この定理の証明にいくつかの補題を準備する。

Lemma 3.4. 2つの 3_1-knots の split union の link は 2-component trivial link に C-同値である。

(証明) Fig. 7 の C-moves を行うことにより得られる。

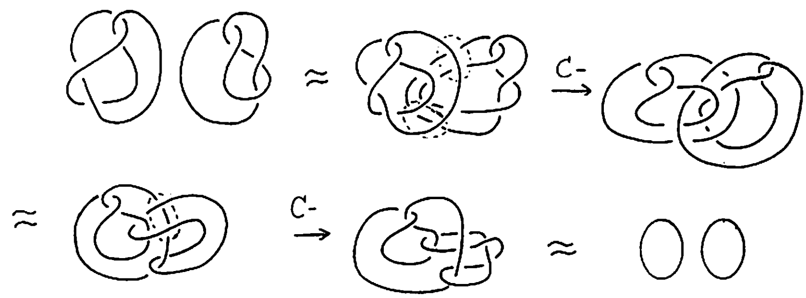

Fig. 7

つぎの補題は[2]により証明された。

Lemma 3.5. 2つの links ℓ と ℓ' が link-homologous である必要十分条件は ℓ と ℓ' が Δ-同値である(すなわち ℓ と ℓ' が有限回の Δ-moves で移り合う)ことである。

つぎは Theorem 3.3(2) の special case である。

Lemma 3.6. ℓ と trivial link $\mathcal{O}$ が link-homologous とする。そのとき ℓ と $\mathcal{O}$ が C-同値である必要十分条件は $\varphi(\ell)=0$ である。

(証明) ℓ と $\mathcal{O}$ が link-homologous ならば ℓ は proper である。もし ℓ と $\mathcal{O}$ が C-同値ならば Lemma 3.1 より $\varphi(\ell)=0$ である。
逆に $\varphi(\ell)=0$ と仮定する。ℓ と $\mathcal{O}$ が link-homologous だから、Lemma 3.5 より ℓ と $\mathcal{O}$ が Δ-同値である。すなわち ℓ は $\mathcal{O}$ と p 個の Borromean rings の適当な fusion により得られる。

1個の Borromean rings の Arf invariant は1だから p は偶数である。

各 Borromean rings に対し Fig. 8 の C-moves を行なうことにより ℓ と C-同値な link ℓ_0 (ℓ_0 は 3_1-knot 又はそれの有限個の product knot と trivial link から成り、互いに split している) を得る。p は偶数だから、Theorem 3.2 と Lemma 3.5 より ℓ_0 は trivial link O に C-同値になる。したがって ℓ も O と C-同値である。

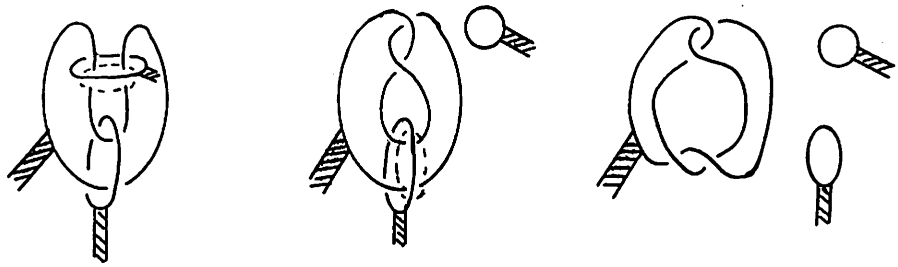

Fig. 8

2つの n-component links $\mathcal{L}=K_1\cup\cdots\cup K_n$, $\mathcal{L}'=K_1'\cup\cdots\cup K_n'$ が R^3 で split しているとする。そこで $B_1,\cdots,B_n$ を $\mathcal{L}\cup\mathcal{L}'$ の fusion を与える bands で各 B_i は K_i と K_i' を fusion するものとする。このような fusion を $\mathcal{L}\cup\mathcal{L}'$ の product fusion と呼ぶ。(つぎの Lemma 3.7 の証明より $\mathcal{L}\cup\mathcal{L}'$ の product fusion により得られる links は C-同値で一意でない。)

<u>Lemma 3.7.</u> ℓ と ℓ' が link-homologous で ℓ が non-proper とする。そのとき $\ell\cup(-\ell')$ のある product fusion で得られた link L で $\varphi(L)=0$ なるものが存在する。

(略証) ℓ と ℓ' が link-homologous で ℓ が non-proper だから ℓ' も non-proper で、したがって ℓ, ℓ' の knots k_1, k_1' で $\mathrm{Link}(k_1, \ell-k_1)$ $(=\mathrm{Link}(k_1', \ell'-k_1'))$ が奇数のものがある。

すなわち ℓ, ℓ' の knots, たとえば k_2, k_2' で $\mathrm{Link}(k_1, k_2)$ ($=\mathrm{Link}(k_1', k_2')$) が奇数のものがある。そこで $\ell \cup (-\ell')$ に対する bands $B_1, B_2, \cdots, B_n$ による product fusion により得られる link を L_0 とする, ただし B_i は k_i と $-k_i'$ を結ぶ。つぎに B_1 を1回だけ twist した band を B_1' とし, $B_1', B_2, \cdots, B_n$ による product fusion により得られる link を L_1 とする。このとき $\varphi(L_0) \neq \varphi(L_1)$ を示す。

(Theorem 3.3 の証明) ℓ と ℓ' が C-同値ならば, Lemma 1.1(1) よりそれらは Δ-同値で Lemma 3.4 より link-homologous である。また C-同値は linking number を変えないので, ℓ が proper ならば ℓ' も proper で Lemma 3.1 より $\varphi(\ell) = \varphi(\ell')$ である。

つぎに (1), (2) の十分性を証明する。

(1) ℓ が non-proper とする。そのとき Lemma 3.6 より $\ell \cup (-\ell')$ の product fusion で得られる link L_0 で $\varphi(L_0) = 0$ なるものが存在する。ℓ と ℓ' が link-homologous なので L_0 と trivial link $\mathcal{O}$ が link-homologous で, したがって Lemma 3.6 より L_0 と $\mathcal{O}$ が C-同値になる。すなわち ℓ と ℓ' が w. C-cobordant となり Theorem 2.1 よりこれらが C-同値になる。

(2) ℓ が proper とする。ℓ と ℓ' が link-homologous ならば ℓ' も proper になる。もし $\varphi(\ell) = \varphi(\ell')$ ならば, $\ell \cup (-\ell')$ の任意の product fusion により得られる link L については $\varphi(L) = 0$ になるので以下 (1) の議論で ℓ と ℓ' が C-同値になる。

§4. link の self C-同値.

この章では link の self C-同値と self Δ-同値([6])の間の関係を調べる。

<u>Theorem 4.1.</u> $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$, $l' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ が n-component links とする。l と l' が self C-同値である必要十分条件は l と l' が self Δ-同値で各 i について $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ が成立することである。

(証明) 必要性は Lemmas 1.1(1) と 3.1 より得られる。逆に l と l' が self Δ-同値で各 i について $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ とする。1回の Δ-move は1個の Borromean rings の fusion で実現でき、これの Arf invariant が1だから、各 k_i' は k_i と $2p_i$ 個の互いに split した Borromean rings $B_{i1}, \cdots, B_{i2p_i}$ の適当な fusion で得られる。このとき Theorem 3.2 を使い Fig. 9 のように有限回の self C-moves により k_i' を k_i に変形できるので十分性が示された。

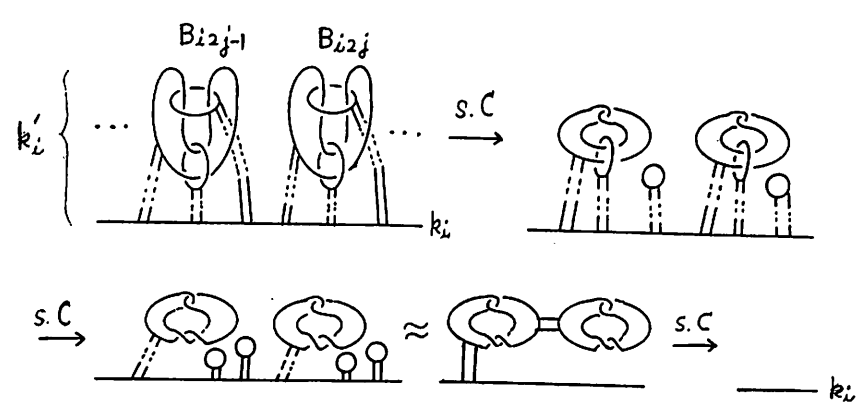

Fig. 9

References

[1] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki: Descriptions on surfaces in four space, I, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10(1982), 75–125.

[2] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann. 284(1989), 75–89.

[3] Y. Nakanishi and T. Shibuya: Relations among self delta-equivalence and self sharp-equivalences for links, pre-print.

[4] R. A. Robertello: An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math. 18(1965), 543–555.

[5] T. Shibuya: On the cobordism of links in 3-space, Kobe J. Math. 1(1984), 119–131.

[6] T. Shibuya: Self Δ-equivalence of ribbon links, Osaka J. Math. 33(1996), 751–760.

[7] T. Shibuya: A local move of links, pre-print.