箱根セミナ記録 9 5 (1995) 55-65.

Ribbon links are self Δ-equivalent to trivial

渋谷哲夫 (大阪工大)

R^3 の link に関して種々な (self) local moves が定義され、さまざまな性質が知られている, たとえば [1], [3], [4], [5], [6], [7]。

本稿は、ribbon link は有限回の self Δ-moves で trivial link にできるということを証明した [9] の要約です。

R^3 の link l と 3-ball B^3 で $l \cap B^3$ が Fig. 1 (a) の tangle とする。これを Fig. 1 (b) のように変形することを Δ-move という。特に Fig. 1 (a) の 3本の arcs が l の 1つの component に含まれるとき、この変形を self Δ-move という。

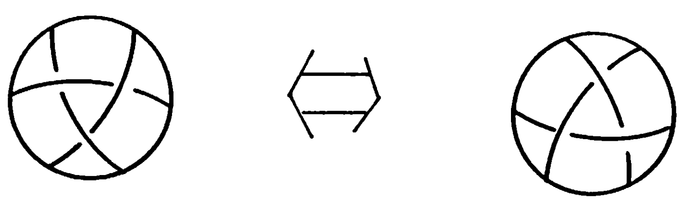

Fig. 1

R^3 の 2つの links l と l' が有限回の self Δ-moves で移り合うとき、l と l' は self Δ-equivalent (又は l は l' に self Δ-equivalent) であるという。

n-component link $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ が ribbon link とは、n 個の disks C_i $(i=1, \cdots, n)$ の union $\mathcal{C} = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ について

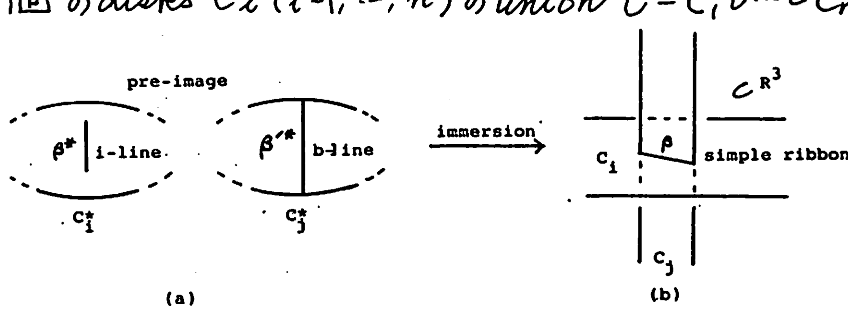

Fig. 2

C の singularity, $S(C)$, が互いに交わらない ribbon type, Fig.2(b), から成る C が存在するときをいう。$S(C)$ の arc β の原像 β^*, β'^* を i-line, b-line という。

Ribbon link の self local moves に関しては, [3], [4] で homotopic に trivial link にできることが知られている。さらに [7] で Fig.3 のような有限回の <u>self</u> local move (すなわち 4本の arcs が link の同じ component に含まれる) で trivial link にできることが得られている。

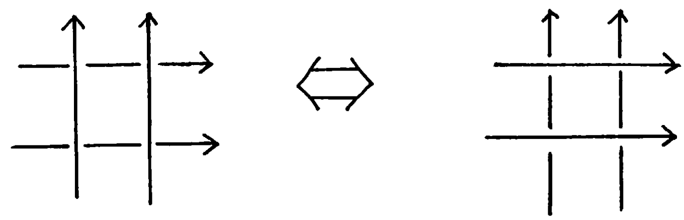

Fig. 3

[9] ではさらにつぎを示している。

<u>Theorem.</u> Ribbon links are self Δ-equivalent to a trivial link.

<u>Remark.</u> l と l' が有限回の Fig.3 の self local move で移り合うとき, それらは self #-equivalent (I) であるということにすると, l と l' が self Δ-equivalent であれば, l と l' は self #-equivalent (I) であることは知られているが, [8], しかしこの逆が成立するかどうかは, まだ未解決である。

Theorem の証明.

Fig. 4(a) から 4(d) への変形は ambient isotopy と1回の Δ-move で実現できる。したがって Fig. 4(a) の 3本の arcs が link の同じ component に含まれているならば, Fig. 4(a) と 4(d) の links は self Δ-equivalent である。

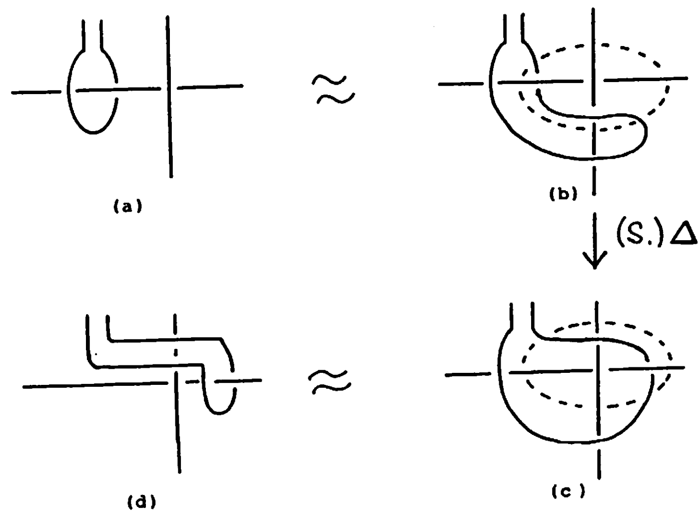

Fig. 4

$l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ を ribbon link とすると，l はある trivial link からの fusion により得られる，[2]。したがって disks の union $\mathcal{D}=\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_i=\bigcup_{j=0}^{p_i} D_{ij}$ と bands の union $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_i=\bigcup_{j=1}^{p_i} B_{ij}$ が存在し，$\partial(\mathcal{D}\cup\mathcal{B})=l$, $\partial(\mathcal{D}_i\cup\mathcal{B}_i)=k_i$ で $\mathcal{S}(\mathcal{D}\cap\mathcal{B})$ が ribbon type の arcs としてよい。さらに各 $\mathcal{D}_i \subset R^2[i]$ で $\partial B_{ij}\cap\partial\mathcal{D}_i=\partial B_{ij}\cap\partial(D_{i0}\cup D_{ij})$ になるように変形できる，Fig. 5.

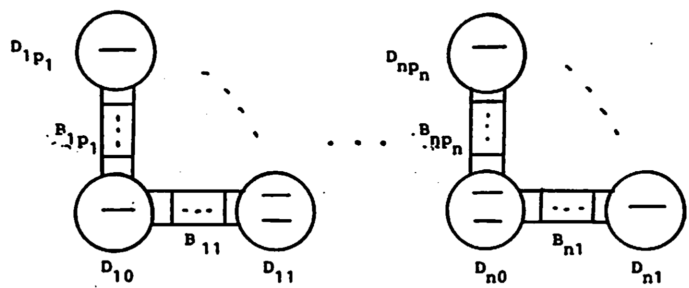

Fig. 5

<u>Lemma 1.</u> ある B_{ij} で $\mathcal{S}(B_{ij}\cap D_{i0})$ (or $\mathcal{S}(B_{ij}\cap D_{ij})$)$=\phi$ とする。もし $\mathcal{S}(B_{rs}\cap D_{i0})$ (or $\mathcal{S}(B_{rs}\cap D_{ij})$)$\neq\phi$ for $r\neq i$ ならば，これを $\#\mathcal{S}(\mathcal{B}_i\cap\mathcal{D}_i)$ を増さずに ambient isotopy で D_{ij} (or D_{i0}) に移動できる，ここで $\#\mathcal{S}(X)$ は $\mathcal{S}(X)$ の arcs の数を表す。

<u>Proof.</u> $\mathcal{S}(B_{ij}\cap D_{i0})$ (or $\mathcal{S}(B_{ij}\cap D_{ij})$)$=\phi$ ならば $B_{ij}\cup D_{i0}$

(or $B_{ij} \cup D_{ij}$) は non-singular な disk であるから、Fig. 6 の変形を行なう。□

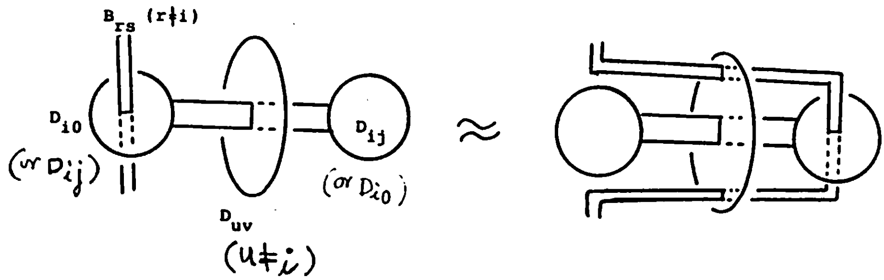

Fig. 6

b_1, b_2 を $\delta(B_{ij} \cap \mathcal{D}_i)$ の arcs で B を $B_{ij} - b_1 - b_2$ の connected component で $\partial B \supset b_1 \cup b_2$ とする。このとき b_1 と b_2 が adjacent on B_{ij} with respect to $\mathcal{D}_i$ とは $B \cap \mathcal{D}_i = \phi$ のときをいう。

<u>Lemma 2.</u> b_1, b_2 を adjacent on B_{ij} w.r. to $\mathcal{D}_i$ とする。そのとき有限回の self Δ-moves により、$\# \delta(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{D}_i)$ を増さずに、b_1, b_2 の B_{ij} 上の順序を交換できる。

<u>Proof.</u> D_{ip} $(\subset \mathcal{D}_1)$ を b_1 を含む disk とするとき Fig. 7 のような変形

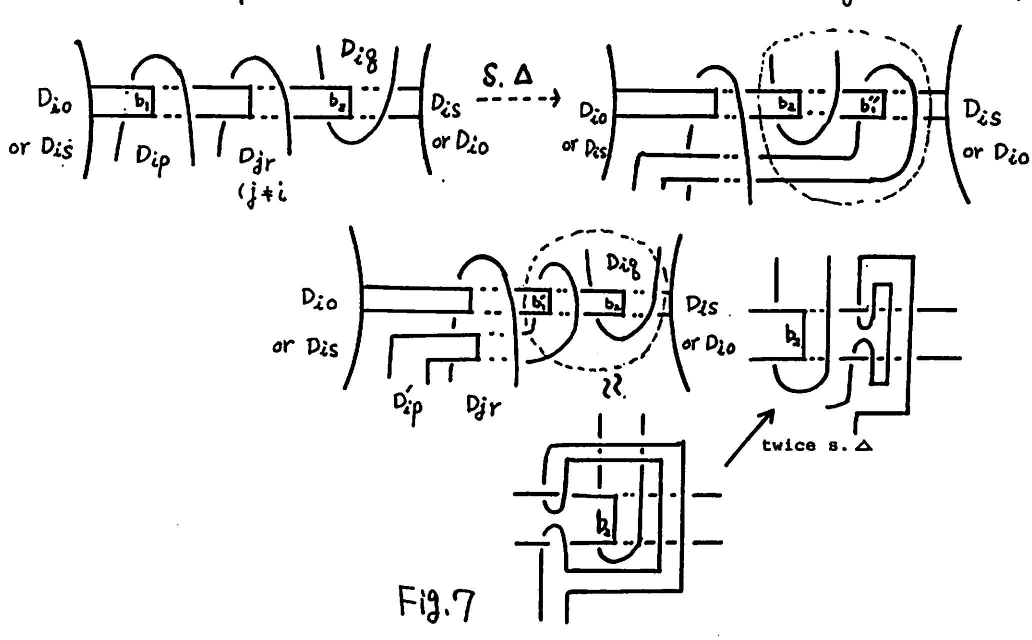

Fig. 7

をすることによりLemma 2が得られる。□

Fig. 7の変形で D_{ip} から得られるdisk D''_{ip} (Fig. 7(c))については b_1, b_2 の選び方よりつぎが分かる。

∗

(1) D''_{ip} もnon-singularで $D''_{ip}\cap(\mathcal{D}_i - D_{ip})=\phi$, すなわち $\mathcal{D}'_i=(\mathcal{D}_i-D_{ip})\cup D''_{ip}$ は互いに交わらないnon-singular disksのunionである。

(2) $B\cap D_{jr}\neq\phi$ for $j\neq i$ ならば、$S(D''_{ip}\cap D_{jr})$ はribbon typeでその原像のb-line, i-lineはそれぞれ D''_{ip}, D_{jr} のそれに含まれる。

つぎにbを $S(B_{ij}\cap\mathcal{D}_i)$ のarcで $B_{ij}\cap\partial D_{ij}$ に最も近いものとする。

<u>Lemma 3.</u> もし $b\subset\mathcal{D}_i - D_{ij}$ ならば有限回のself Δ-movesで、$\#S(\mathcal{B}_i\cap\mathcal{D}_i)$ を増さずにbを除去できる。

<u>Proof.</u> まず $(\mathcal{B}-\mathcal{B}_i)\cap D_{ij}=\phi$ の場合を考える。Bを $B_{ij}-b$ の

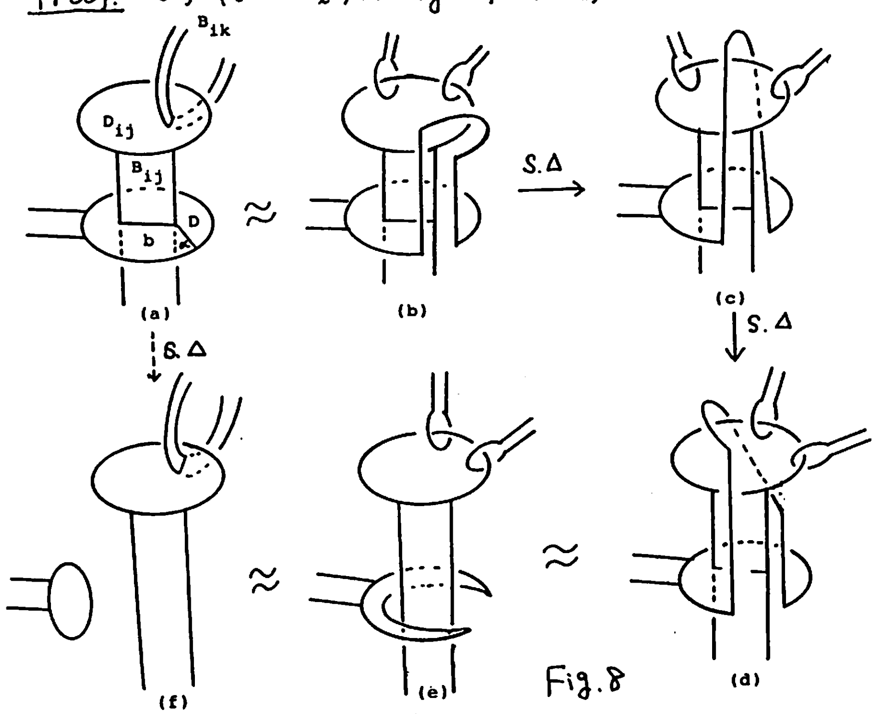

Fig.8

$\partial B_{ij} \cap \partial D_{ij}$を含むconnected componentとし, Dを$\mathcal{D}_i - D_{ij}$のbを含むdiskとする。すると$B \cup D_{ij}$はnon-singularになり, Dを$B \cup D_{ij}$に沿ってFig. 8(a)から8(f)まで変形し, bを除去する。$(\mathcal{B}-\mathcal{B}_i) \cap \mathcal{D}_i = \phi$だから, この変形は$\# \mathcal{S}(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{D}_i)$を増さずにself Δ-movesで実現できる。

つぎに$(\mathcal{B}-\mathcal{B}_i) \cap D_{ij} \neq \phi$の場合を考える。すなわち, あるband B_{uv} $(u \neq i)$で$B_{uv} \cap D_{ij} \neq \phi$とする。このときは$B_{uv}$を$B \cup D_{ij}$に沿ってFig. 9(a)から9(b)に変形し, その後Fig. 8の変形をFig. 9(b)から9(c)に適用し, 9(d)までB'_{uv}を変形する。この変形も$\# \mathcal{S}(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{D}_i)$を増さずにself Δ-moveにより$b$を除去できる。□

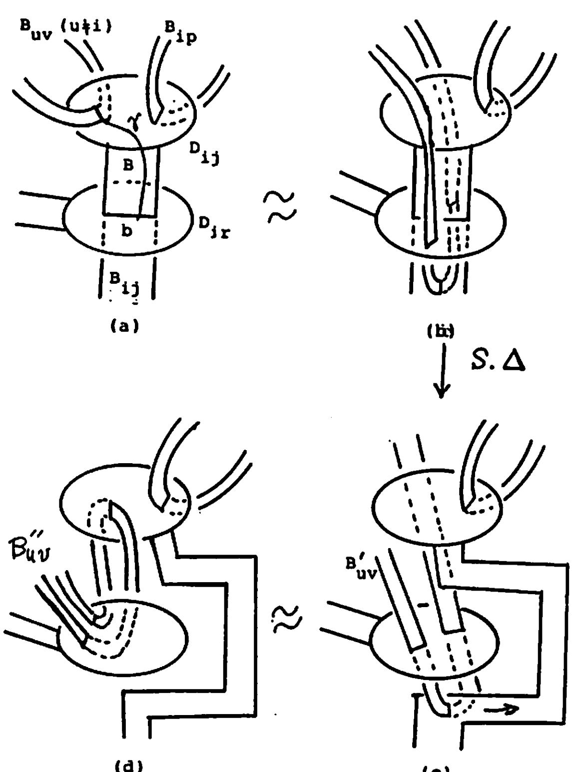

Fig. 9

<u>Lemma 4.</u> $\mathcal{S}(B_{ij} \cap \mathcal{D}_i)$の2つのarcs b_1, b_2がadjacent on B_{ij} w.r.to $\mathcal{D}_i$で$b_1 \subset D_{ij}$, $b_2 \subset \mathcal{D}_i - D_{ij}$で$b_2$と$\partial B_{ij} \cap \partial D_{ij}$がそれぞれ$B_{ij} - b_1$の異なるconnected componentsに含まれているとする。このとき, b_2を$\# \mathcal{S}(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{D}_i)$を増さずに有限回のself Δ-movesで除去できる。

<u>Proof.</u> b_1, b_2 を Lemma 4 の条件を満たす $\beta(=\partial B_{ij}\cap\partial D_{ij})$ に最も近い pair とし, B, B_1 をそれぞれ $B_{ij}-b_1-b_2$, $B_{ij}-b_2$ の connected component で $\partial B \supset b_1\cup b_2$, $\partial B_1 \supset \beta$ とする。

まず $\delta(B_1\cap D_{ij})=b_1$ の場合を考える。このとき, D_{ij} を B に沿って Fig.10(b) のように変形し, 2回の self Δ-moves を行ない Fig.10(c) の disk D'_{ij} を得る。この結果 $B_1\cup D'_{ij}$ は non-singular だから, Lemma 3 を適用することにより b_2 を除去できる。(ここで D'_{ij} は Lemma 2 の証明の D''_{ip} の条件 $\boxed{*}$ と同じ条件を保存している。)

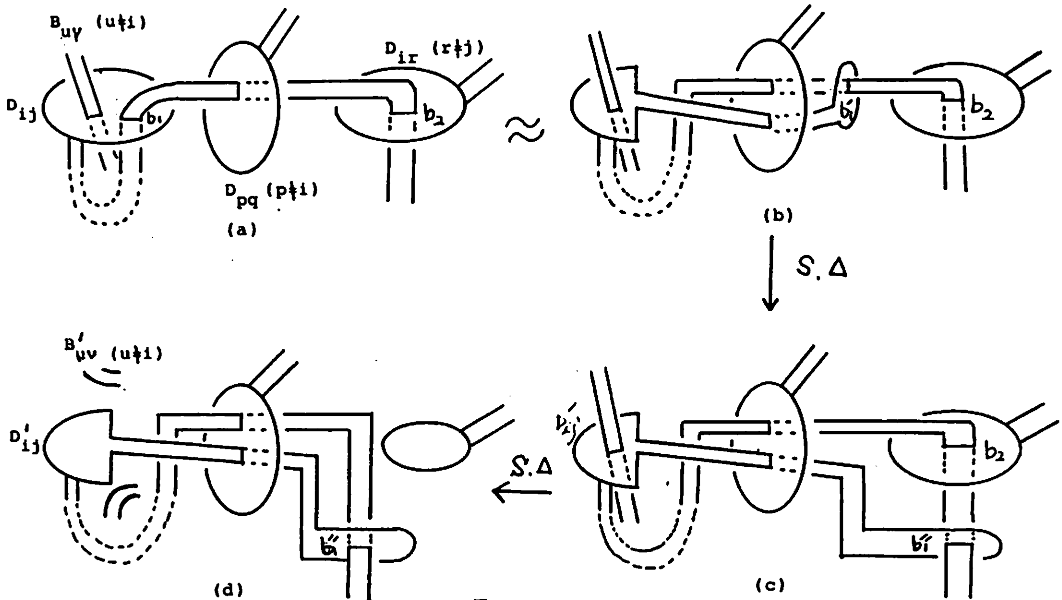

Fig.10

つぎに $\delta(B_1\cap D_{ij})-b_1\neq\phi$ のときは, $\delta(B_1\cap D_{ij})$ の各 arc について上の議論を適用して, D_{ij} から D''_{ij} で $B_1\cup D''_{ij}$ が non-singular になるように変形して, Lemma 3 を使い b_2 を除去する。

以上の変形で $\#\delta(\mathcal{B}_i\cap\mathcal{D}_i)$ は増えない。□

これらの Lemmas を使い Theorem を証明する。

<u>Proof of Theorem.</u> ℓ を ribbon link として $\mathcal{D}_i(\subset R^2[i])$, $\mathcal{B}_i$ を Fig.5 の形に置く。

まず $\delta(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}_1)=\phi$ のとき, すなわち $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{D}_1$ が non-singular の

ときを考える。もし $B_{rs}(r\neq 1)$ で $B_{rs}\cap D_{1j}\neq\phi$ $(j\neq 0)$ があれば、Lemma 1 により、これを D_{10} に移す。故に $B_{rs}\cap D_{1j}=\phi$ $(r\neq 1,\ j\neq 0)$ としてよい。したがって $D_{10}\cup(\mathcal{D}-\mathcal{D}_1)$ を fix した R^3 の ambient isotopy で $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{D}_1$ を $R^2[1]$ に置くことができる。

つぎに $\mathcal{S}(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}_1)\neq\phi$ のときを考える。もしある band B_{1i} で $\mathcal{S}(B_{1i}\cap\mathcal{D}_1)=\phi$ ならば、上と同じ議論で $\mathcal{D}-D_{1i}$ を fix して $B_{1i}\cup D_{1i}$ を $R^2[1]$ に置くことができる。したがって各 $i=1,\cdots,n$ で $\mathcal{S}(B_{1i}\cap\mathcal{D}_1)\neq\phi$ と仮定する。

ある $u\neq v$ で $B_{1u}\cap D_{1v}$ が ribbon type の arc b を含むとする。b を $B_1\cap(\mathcal{D}_1-D_{1u})$ の中で $\beta(=\partial B_{1u}\cap\partial D_{1u})$ に最も近いものとし、B を $B_{1u}-b$ の β を含む方とする。もし $\mathcal{S}(B\cap D_{1u})=\phi$ ならば b は Lemma 3 により除去でき、$\mathcal{S}(B\cap D_{1u})\neq\phi$ ならば、b の選び方より、b は Lemma 4 を用いて除去できる。

上の議論を可能なかぎり行う。しかも $j\geq 2$ で $\mathcal{D}_j$ は fixed であるから $\mathcal{D}_j\subset R^2[j]$ である。一方で $\mathcal{D}_1=D_{10}\cup\cdots\cup D_{1p_1}$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_n$ は変形され、これを $\mathcal{D}_1'=D_{10}'\cup\cdots\cup D_{1p_1}'$, $\mathcal{B}'=\mathcal{B}_1'\cup\cdots\cup\mathcal{B}_n'$ と書く。上の変形で $\mathcal{D}_1'\not\subset R^2[1]$ であるが、各 D_{1i}' は condition 図 を満たす。

今までの議論により、$\mathcal{S}(B_{1i}'\cap\mathcal{D}_1')=\mathcal{S}(B_{1i}'\cap D_{1i}')$ で $\mathcal{S}(B_{1i}'\cap D_{1i}')\neq\phi$ としてよい。

$\partial B_{1i}'\cap\partial D_{10}'$ を $\partial B_{1i-1}'$ に沿って slide することにより、この band が $\partial D_{1i-1}'$ と $\partial D_{1i}'$ の arcs を結ぶように変形する、ただし $i=1,\cdots,p_1$、(Fig. 11 (b) では $p_1=3$)。この変形で $\mathcal{B}_1'$ から得られるものを $\overline{\mathcal{B}}_1$ とする。(Fig. 11 (b) のように $\#\mathcal{S}(\overline{\mathcal{B}}_1\cap\mathcal{D}_1')$ が増加する。)

<u>補題.</u> 有限回の self Δ-moves で $\mathcal{S}(\overline{\mathcal{B}}_1\cap(\mathcal{D}_1'-D_{1p_1}'))$ を D_{1p_1}' に移すことができる。

<u>Proof.</u> $u\neq 1$ なるある band $B_{uv}'(\subset\mathcal{B}_u')$ で $B_{uv}'\cap D_{10}'\neq\phi$ とする。$\mathcal{S}(B_{1i}'\cap\mathcal{D}_1')=\mathcal{S}(B_{1i}'\cap D_{1i}')$ だから $B_{1p_1}'\cup D_{10}'$ は non-singular で Lemma 1 より $B_{uv}'\cap D_{10}'$ を B_{1p_1}' に沿って D_{1p_1}' に移動する、Fig. 11 (b), (c)。その結果、$\overline{\mathcal{B}}=(\mathcal{B}'-\mathcal{B}_1')\cup\overline{\mathcal{B}}_1$ について、

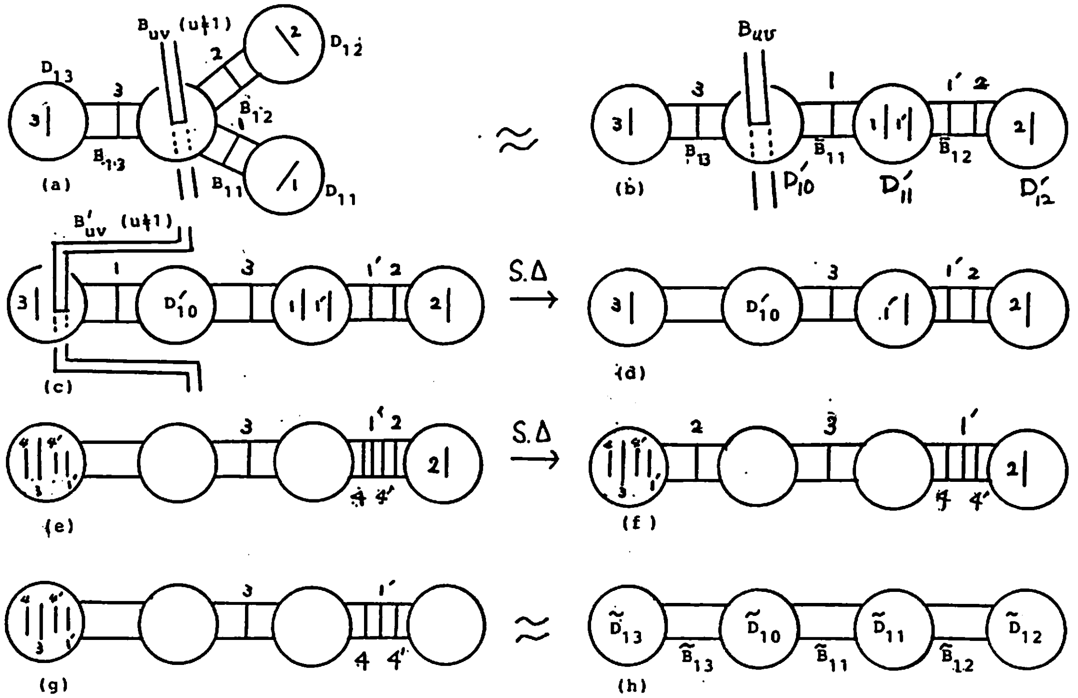

Fig. 11

$\mathcal{S}(\overline{B}\cap D'_{10})=\phi$ で $\overline{B}_{11}\cup B'_{1p_1}\cup D'_{10}\,(=E_{11})$ が non-singular になり, Lemma 2より E_{11} 上で $\mathcal{S}(B'_{1p_1}\cap\mathcal{D}'_1)$ と $\mathcal{S}(\overline{B}_{11}\cap\mathcal{D}'_1)$ の順を交換できる, Fig. 11(b),(c)。このとき Lemma 3により, arc "1" を除去できる, Fig. 11(d)。今の議論を必要な限りくり返し D'_{11}, E_{11} から得られる disks を D'_{11}, E_{11} と改めて書くと, $D'_{11}\cup E_{11}$ は non-singular で, $\mathcal{S}(\overline{B}_{11}\cap D'_{11})$ の arc "1′" は D'_{1p_1} に含まれるように ambient isotopy で変形できる, Fig. 11(d),(e)。もし Fig. 11(e) で $D'_{11}\cap(\mathcal{B}'-\mathcal{B}'_1)\neq\phi$ ならば Fig. 11(b),(c) と同じ変形を行ない, これを D'_{1p_1} に移す。この結果 $E_{11}\cup\overline{B}_{12}\cup D'_{11}\,(=E_{12})$ は non-singular で, arcs "2" と "1′", "3", "4", "4′" の順を Lemma 2 を用いて変更して, Fig. 11(f), その後, Lemma 3により "2" を除去する, Fig. 11(g)。

上の変形をくり返すことにより, $\mathcal{S}(\mathcal{B}_1\cap\mathcal{D}'_1)$ の各 arc は D'_{1p_1} の中に移すことができる。□

(Proof of Theorem の続き) したがって $E_{1p_1}\,(=\overline{B}_{11}\cup\cdots\cup\overline{B}_{1p_1-1}\cup B'_{1p_1}\cup D'_{10}\cup\cdots\cup D'_{1p_1-1})$ は non-singular である。ここで $E_{1p_1}\cup D'_{1p_1}$ を C_1 と表すと $C_1\cap\mathcal{D}_i$ $(i\geq 2)$ は ribbon type で これの各 b-line は C_1 の原像に含まれるので, $\mathcal{D}_i$ を fix した

ambient isotopy で C_1 を $R^2[1]$ に置くことができる。

今までの変形で $B_1' \cup D_1'$ から $\tilde{B}_1 \cup \tilde{D}_1 (\subset R^2[1])$ を得たとする。
$i \geqq 2$ で $D_i \subset R^2[i]$ より $(\tilde{B}_1 \cup \tilde{D}_1) \cap D_i = \phi$ である。

つぎに $B_2' \cup D_2$ についても上の議論を行う。ここで $\tilde{B}_1 \cap D_2 = \phi$ だから, Lemmas 1, 2, 3, 4 の変形は $\tilde{B}_1 \cup \tilde{D}_1 (\subset R^2[1])$ を fix してできる。その結果, B_2, D_2 から $\tilde{B}_2$, $\tilde{D}_2$ で $\tilde{B}_2 \cup \tilde{D}_2 \subset R^2[2]$, $(\tilde{B}_1 \cup \tilde{D}_1 \subset R^2[1])$ を得る。

上の議論をくり返すことにより, 有限回の self Δ-moves で l を trivial link に変形できる。□

Theorem の拡張としてつぎの予想がある。

<u>Conjecture.</u> 2つの links が concordant ([3], [4]) ならば, それらは self Δ-equivalent である。

References

[1] L. Cervantes and R. A. Fenn: Boundary links are homotopy trivial, Quart. J. Math. Oxford, 39 (1988), 151-158.

[2] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki: Descriptions on surfaces in four space, I, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10 (1982), 75-125.

[3] C. H. Giffen: Link concordance implies link homotopy, Math. Scand., 45 (1979), 243-254.

[4] D. L. Goldsmith: Concordance implies homotopy for classical links in M^3, Comm. Math. Helv., 54 (1979), 347-355.

[5] J. W. Milnor: Link group, Ann. of Math., 50 (1954), 177-195.

[6] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann., 284 (1989), 75-89.

[7] T. Shibuya: Self #-unknotting operation of links, Memo. Osaka Insti. Tech., 34 (1989), 9-17

[8] T. Shibuya: Two self #-equivalences of links in solid tori, Memo. Osaka Insti. Tech., 35 (1990), 13-24.

[9] T. Shibuya: Ribbon links are self Δ-equivalent to trivial, pre-print.