箱根セミナ記録 9 3 (1993)85-93.

On knots obtained by nice fusions of 2-component links

渋谷哲夫 (大阪工大)

本稿は[2]の内容の一部を要約したものです。

§1 Introduction.

S^3の2-component oriented link $L=K\cup K'$に対し, VをS^3-K'のsolid torusでKをgeometric essentialに含む, すなわち$O_V(K)\neq 0$, ここで$O_V(K)$はKとVのmeridian diskの交点の最小数, とする。

Vのmeridian disk M_1を$\#(K\cap M_1)=O_V(K)$になるように.(#( )は交点数) M_1^*をVのmeridian diskでM_1に平行で$\#(K\cap M_1^*)=O_V(K)$となるように取る。ρをS^3のarcで$K\cap M_1^*$の一点とK'の一点を結び$\rho\cap V=\rho\cap M_1^*$ (={an arc})になるように選ぶ。このときρに沿って$L=K\cup K'$にbandをattach(fusion)して得られるknotを$K\natural K'$で表す。

このとき, つぎが証明できる。

<u>Theorem.</u> Vをknotted solid torusで$O_V(K)=2$とする。このとき$L=K\cup K'$をboundaryとするannulusが存在しなければ, $k=K\natural K'$はS^3でtrivialではない。

したがってつぎの系を得る。

<u>Corollary 1.</u> Vをknotted solid torusで$O_V(K)=2$とする。Kが$(2,p)$-cable knotでなければ, $k=K\natural K'$はS^3でtrivialでない。

§2 Proof of Theorem.

§1の記号のもとで，Vは以下 knotted と仮定し，$W=V\cup N(\rho\cup K':S^3)$ とする。また M_2 を $N(K':S^3)$ の meridian disk で $M_2\cap N(\rho:K')=\phi$, $K'\cap M_2=\{\text{a point}\}$ を満たすように取る。さらに M_0 を W の meridian disk で $M_0\supset M_1^*\cup\rho$, $M_0\cap M_2=\phi$ に取る，Fig. 1。しかも M_0 を適当に選べば，つぎを満たす。

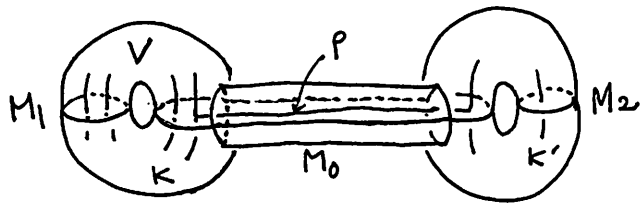

Fig. 1

<u>Lemma 1.</u> $k=K\cup K'$ に対し，W の meridian disk M_0 で $\#(k\cap M_0)=\#(k\cap M_1)-1$, $\#(k\cap M_2)=1$ を満たすものが存在する。

つぎの2つの Lemmas は明らか。

<u>Lemma 2.</u> $\mathcal{V}$ を knotted solid torus とし κ を $\mathcal{V}$ の knot で $O_{\mathcal{V}}(\kappa)\neq 0$ とする。このとき κ は S^3 で trivial knot でない。

<u>Lemma 3.</u> $\mathcal{V}$, κ を Lemma 2 のものとする。そのとき $\partial\mathcal{V}$ の meridian loop に S^3 で張る任意の disk は κ と交わる。

$\Delta=\partial V\cap N(\rho:S^3)$ とおくと，Δ は W の proper disk で $k\cap\Delta$ が2点，P と Q とする，から成る。

disk F ($\partial F\subset W$) について2つの変形を定義する。

(1) $F\cap\partial W$ の loop f の subarc $f_0(\subset f-\partial\Delta)$ と $\delta(\subset\partial\Delta-f)$ が $\partial f_0=\partial\delta$ で disk C を ∂W で bound するならば，C に沿って F を変形して $f\cap\partial\Delta$ の交点数を減らす，Fig. 2。

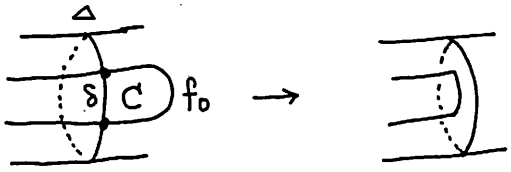

Fig. 2.

(2) $F \cap \Delta$ の arc f_1 proper on Δ で f_1 が Δ 上で P と Q を分けないとき、F を $\Delta - f_1$ の disk で P, Q を含まない方を使って変形することにより、f_1 を除去できる, Fig. 3。

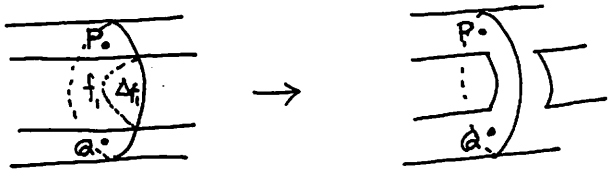

Fig. 3.

<u>Lemma 4.</u> $k = K \sqcup K'$ と M_1 を §1 のそれらとする。Theorem 1 の仮定のもと、もし k が trivial knot ならば、S^3 で ∂M_1 に張る任意の disk $\mathcal{M}$ に対し $k \cap \mathcal{M} \neq \phi$ である。

<u>Sketch of Proof.</u> 可能ならば $\mathcal{M}$ に Fig. 2, 3 の変形を適用する。さらに $k \cap M_2$ が一点だから、k を横切らない $\mathcal{M}$ の変形で $\mathcal{M} \cap M_2 = \phi$ となるように $\mathcal{M}$ を選ぶ。

上の変形ののち、ある $\mathcal{M}$ で $k \cap \mathcal{M} = \phi$ となる disk が存在したとする。

このとき まず $\mathcal{M} \cap \partial W = \partial \mathcal{M}$ の時を考える。この場合は $\mathcal{M} \subset W$ である。したがって $\mathcal{M} \cap \Delta \neq \phi$ ならば、それは loops から成る。c を $\mathcal{M} \cap \Delta$ の loop で innermost on Δ とし、Δ_c をその disk とする。$k \cap \mathcal{M} = \phi$ より、$k \cap \Delta_c = \phi$ 又は $P \cup Q$。$k \cap \Delta_c = \phi$ ならば、Δ_c に沿って $\mathcal{M}$ に 2-handle を張り c を除去する。$k \cap \Delta_c = P \cup Q$ のときは、Δ_c 上で P と Q を結ぶ arc に沿って k の fission を行ない Lemma 3 に矛盾することを示す。($\mathcal{M} \cap \Delta = \phi$ ならば、Δ_c に関する今の議論を Δ に適用する。)

つぎに $\mathfrak{M}\cap\partial W\neq\partial\mathfrak{M}$ の場合を考える。そこで m_0 を $\mathfrak{M}\cap\partial W$ の loop で innermost on $\mathfrak{M}$ として，$\mathfrak{M}_0$ を m_0 が $\mathfrak{M}$ で bound する disk とする。(ここで m_0 は ∂W 上で homotopic to 0 でないとしてよい。)

<u>Case 1.</u> $\mathfrak{M}_0\subset W$.

まず $\mathfrak{M}_0\cap\Delta=\phi$ のときを考える。このとき $m_0\cap(M_1\cup M_2)=\phi$ より，m_0 は ∂W 上で $\partial\Delta$, ∂M_1, ∂M_2 のどれかと平行 ($\approx$ で表す) である。$m_0\approx\partial M_1$ on ∂W ならば上の議論で矛盾を導びく。$m_0\approx\partial\Delta$ 又は $\approx\partial M_2$ のときも，$k\cap\mathfrak{M}_0=\phi$ を使い矛盾を導びき出す。

つぎに $\mathfrak{M}_0\cap\Delta\neq\phi$ のときを考える。このとき，$\mathfrak{M}_0\cap\partial V$ は loops からなる。δ をこの中の innermost loop とし $\mathfrak{M}_\delta$ を $\mathfrak{M}_0$ 上で δ が bound する disk とする。そのとき，$\mathfrak{M}_\delta\subset V$ が分かる。そこで Δ 上で P と Q を結ぶ arc d を取り，$s=\#(\delta\cap d)$ とする。そこで以下のそれぞれの cases を考えて各々に矛盾を導びく。

(i) s が odd で δ が homotopic to 0 on ∂V でない。

(ii) s が odd で δ が homotopic to 0 on ∂V である。

(iii) s が even で δ が homotopic to 0 on ∂V である。

(iv) s が even で δ が homotopic to 0 on ∂V でない。

<u>Case 2.</u> $\mathfrak{M}_0\subset\overline{S^3-W}$.

Case 1 より $\mathfrak{M}\cap\partial W$ の $\mathfrak{M}$ 上で innermost な loop は各々 $\overline{S^3-W}$ で disk を bound する。したがって $\mathfrak{M}\cap W$ の perforated disk Σ で <u>innermost on</u> $\mathfrak{M}$ が存在する。(ここで Σ が innermost on $\mathfrak{M}$ とは $\partial\Sigma$ の1つの loop，これを $\partial\Sigma$ の <u>outermost loop</u> と呼ぶ，を除いて各々が innermost on $\mathfrak{M}_0$ のときを言う。) この Σ について，c_0 を $\partial\Sigma$ の outermost loop とすると，$\partial\Sigma-c_0$ の各 loop c は $c\cap(M_1\cup M_2)=\phi$ だから，∂W 上で homologous to 0 である。(ただし homotopic to 0 on ∂W でない。)

そこである loop $c\,(\subset\partial\Sigma-c_0)$ で $c\cap\partial\Delta=\phi$ なるものが存在する場合を考える。$\mathfrak{M}_c$ を $\mathfrak{M}$ 上で c が bound する disk とする。$c\cap(M_1\cup M_2)=\phi$ で $\mathfrak{M}_0\subset\overline{S^3-W}$ より，c は ∂W 上で $\partial\Delta$ と平行になる，すなわち <u>∂W 上で</u> c と $\partial\Delta$ で annulus A を bound する。故に $\mathfrak{M}_A\,(=A\cup\mathfrak{M}_c)$ は $\overline{S^3-W}$ の disk で $\partial\mathfrak{M}_A=\partial\Delta$ である。k を trivial knot とし，k が bound する disk を D とすると，$k\subset\mathrm{Int}\,W$ だから，$D\cap\mathfrak{M}_A$ は loops と arcs

proper on $\mathfrak{M}_A$ から成り，したがって $D\cap\mathfrak{M}_A$ の arcs は D を適当に変形して除去できる。その結果，k が bound する disk D_0 で $D_0\cap\partial\Delta=\phi$ なるものがある。そこで P と Q を結ぶ arc $d(\subset D_0\cap\Delta)$ に沿って k を fission すると，2つの trivial knots がそれぞれ $W-\Delta$ の connected components に含まれ，Lemma 2 に矛盾する。

したがって $\partial\Sigma-C_0$ のすべての loop c は $c\cap\partial\Delta\neq\phi$ である。c は homologous to で not homotopic to 0 on ∂W だから $\#(c\cap\partial\Delta)\geq 4$ である。この場合，$\Sigma\cap V$ の disk σ が取れて，この σ に Case 1 の議論を適用することにより矛盾を導びく。

<u>Proof of Theorem.</u> S^3 で k を trivial knot，D を k に張る disk とし，$\Gamma=D\cap\partial W$ とおく。Γ は loops から成り，∂W 上で homotopic to 0 の loop は除去しておく。$K'\cap M_2$ が一点だから，$\gamma(\in\Gamma)$ で $\gamma\cap\partial M_2$ が一点である loop が存在する，すなわち ある $a, b, c(\in\mathbb{Z})$ で γ は homologous to $a\lambda_1+b\mu_1+\lambda_2+c\mu_2$ on ∂W と表せる，ここで λ_1, λ_2 は ∂V, $\partial N(K':S^3)$ の longitudes，$\mu_i=\partial M_i$。

このとき $\Gamma=\{\gamma\}$ を示す。そこで Γ が $\delta(\neq\gamma)$ を含むとする。まず δ が ∂W 上で homologous to 0 でない場合を考える。$\Gamma\cap\partial M_2=\gamma\cap\partial M_2$ だから，δ は homologous to $q\lambda_1+r\mu_1+s\mu_2$ for $q, r, s(\in\mathbb{Z})$ と表せる。δ を D 上で S^3-W 方向に少し移動した loop を δ^+ とおくと，$\mathrm{Link}(\gamma,\delta^+)=ar+qn+s=0$，$\mathrm{Link}(\delta,\delta^+)=qr=0$ である，ここで $n=\mathrm{Link}(\text{core of } V, K')$。$\delta$ は ∂W 上で homologous to 0 でないから，$r=0$ ならば $q=1$ で δ は homologous to $\lambda_1-n\mu_2$ on ∂W である。$\delta\cap M_2=\phi$ だから $\delta\subset\tilde{V}=\overline{W-N(M_2:W)}(\approx V\neq 0)$ で Lemma 2 より δ は trivial でない。ところが δ は D 上の loop で trivial になり矛盾。$q=0$ ならば $r=1$ で δ は homologous to $\mu_1-a\mu_2$ on ∂W である。Lemma 1 より $k\cap M_0$ は一点だから，Γ の loop γ_0 で $\Gamma\cap\partial M_0=\gamma_0\cap\partial M_0\ (=\{\text{一点}\})$ があり，故に $\gamma_0\neq\delta$ である。したがって $\delta\cap\mathcal{T}(M_0\cup M_2)=\phi$ となり，δ は homotopic to ∂M_1 又は to ∂M_2 on ∂W である。δ が homotopic to ∂M_1 on ∂W ならば Lemma 4 に矛盾する。δ が homotopic to ∂M_0 on ∂W ならば，$\mathrm{Link}(k,\delta)=1$ で矛盾。

したがって $\Gamma-\gamma$ の各 loop は homologous to (しかし homotopic to でない) 0 on ∂W である。そこで $B^3=\overline{W-N(M_0\cup M_2:W)}$, $M_i^{\pm}=B^3\cap N(M_i:W)$ とおくと、B^3 は 3-ball で $\partial B^3\supset M_i^{\pm}$, ここで $M_0^+\cup M_2^+$, $M_0^-\cup M_2^-$ は $\partial B^3-\partial M_1$ の異なる connected components に含まれる, Fig. 4。$\gamma\cap\partial M_i$ は一点 $(i=0,2)$ だから、$\gamma\cap\partial B^3$ は 2本の arcs, β と β' とする, から成り.

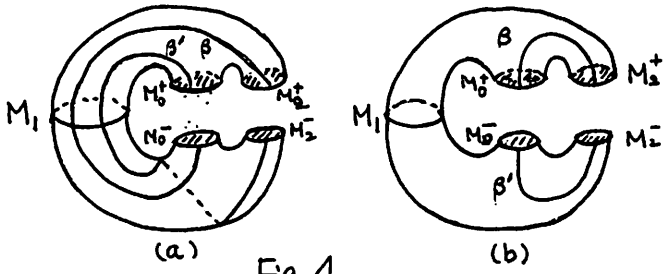

Fig. 4

γ が ∂W 上の loop だから、つぎの 2つの cases に分かれる。

(i) β が ∂M_0^+ と ∂M_2^- の点を結び, β' が ∂M_0^+ と ∂M_2^- の点を結ぶ, Fig. 4(a)。

(ii) β が ∂M_0^+ と ∂M_2^+ の点を結び, β' が ∂M_0^- と ∂M_2^- の点を結ぶ, Fig. 4(b)。

$\Gamma-\gamma\neq\phi$ ならば $\Gamma-\gamma$ はある loop δ で homologous to 0 で not homotopic to 0 on ∂W を含み, $\delta\cap\partial(M_0\cup M_2)=\phi$ より, δ は $F=\partial B^3-\bigcup_{i=0,2}(M_i^+\cup M_i^-)$ に含まれる。δ は homologous to 0 on ∂W で $\delta\cap\gamma=\phi$ なので Case (i), (ii) のいずれの場合も δ は F 上で disk を bound する, すなわち、δ は ∂W 上で homotopic to 0 となり矛盾する。

したがって $\Gamma=\{\gamma\}$ を得る。このとき、D 上で γ が bound する disk を D_γ とすると $\sigma=\overline{D-D_\gamma}$ は W の annulus で, $\sigma\cap\Delta$ は loops と arcs より成る。$\sigma\cap\Delta$ が loop c を含めば、c は σ 上で disk を bound することが分かり、その disk を使って c を除去する。その結果、$\sigma\cap\Delta$ が P と Q を結ぶ arc d を含めば $\sigma-d$ の一方は disk σ' で $\sigma'\subset V$ 又は $\sigma'\subset\overline{W-V}$ になる。$\sigma'\subset V$ ならば Lemma 2 に矛盾し、$\sigma'\subset\overline{W-V}$ ならば $\mathrm{Link}(\partial\sigma',\partial M_2)=\mathrm{Link}(K',\partial M_2)=1$ に矛盾する。したがって $\sigma\cap\Delta$ は P と γ の一点, Q と γ の一点を結ぶ arcs α_1, α_2 を含む, Fig. 5。したがって W 内で k の

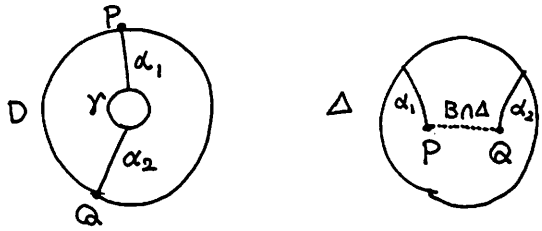

Fig. 5

fission の band B で $k+\partial B=K\cup K'$, $B\cap D=\partial B\cap\partial D$ $(=\{\text{two arcs}\})$ となるものが取れる。すなわち $B\cup D$ は annulus で $\partial(B\cup D)=K\cup K'$ となり、Theorem の仮定に矛盾する。

Corollary は K が $(2,p)$- cable knot でなければ、K と K' を boundary に持つ annulus が存在しないことが分かり、Theorem より得られる。

<u>Remark 1.</u> (1) Theorem で $K'\subset S^3-V$ に取ったが $K'\cap V\neq\phi$ ならば Theorem は成立しない。たとえば K を V の doubled knot とし、K', ρ を Fig. 6(a) のそれらとすると、$k=K\cup K'$ は trivial knot になる。

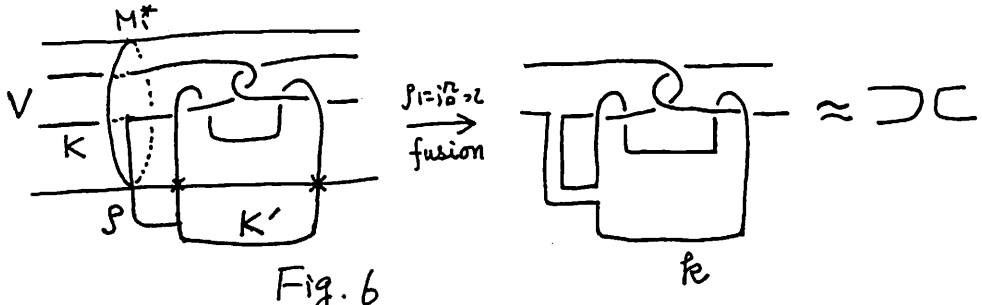

Fig. 6

(2) Theorem で $O_V(K)=2$ の代りに $O_V(K)=1$ の場合は Theorem は成立しない。(たとえば、unknotting number 1 の knots はその例になる、Fig. 7。)

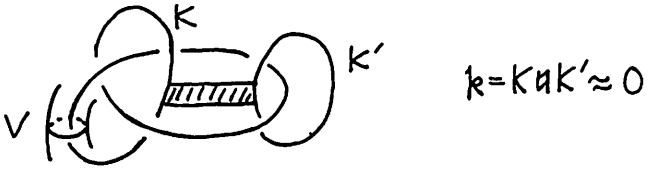

Fig. 7

しかしつぎの予想については部分的な解答はあるが、[2]、全面的解決には致っていない。

<u>Conjecture</u> V, $k=K\cup K'$ を Theorem で $O_V(K)\geqq 3$ とし、$L=K\cup K'$ を boundary とする annulus が存在しなければ、k は S^3 で trivial knot でない。

2-component links の fusion から得られる knots の triviality については最近、張替氏によって [1] で示された結果を使うとつぎが示される。(本稿では oriented link だけを扱うので、以下のような形になりますが、[1] では non-oriented handcuff に関する結果です。)

<u>Remark 2.</u> ([1]). oriented handcuff の arc ρ を固定して ρ に沿う fusion によって得られる knots (band の twist の回数が異なる) で trivial になるのは高々一つである。

§3. Application.

寺垣内氏により [3] でつぎの問題が提起された。

<u>Question.</u> ([3]) 2つの satellite knots の product knot は適当な twisting で trivial knot にできるか?

この問題について以下の場合については、Theorem を使うと否定的に解決される。

K と K' を S^3 の split した knots とし V_0 を S^3 の solid torus (knotted でなくともよい) で $V_0 \supset K$ ($o_{V_0}(K) \neq 0$), $V_0 \cap K' = \phi$ に取る。(したがって V_0 と K' は split している。) そこで K と K' の product $k_0 = K \# K'$ を実現する band B_0 を取り、$W_0 = V_0 \cup N(B_0 \cup K' : S^3)$ とする。さらに J を $S^3 - W_0 - B_0$ の trivial knot とし $\mathcal{V} = \overline{S^3 - N(J : S^3)}$ とおくと、$\mathcal{V}$ は solid torus で $W_0 \cup k_0$ を含む。$\partial\mathcal{V}$ の longitude λ, meridian μ に対し f_m を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への orientation preserving homeomorphism で $f_m(\lambda) = \lambda + m\mu$ ($m \in \mathbb{Z}$) とする。このとき $f_m(k_0)$, $f_m(K)$, $f_m(K')$, $f_m(V_0)$ をそれぞれ k_m, K_m, K'_m, V_m で表す。

そのとき、Theorem より容易につぎが得られる。

<u>Corollary 2.</u> $k_0 = K \# K'$, k_m を上のそれらとする。もし V_m が

knotted で K が $O_{V_0}(K)=2$ の knot で $K_m \cup K'_m$ を boundary にする annulus が存在しなければ（たとえば，K が $(2,p)$-torus or-cable knot でない），k_m は trivial knot でない。

<u>Remark 3.</u> (1) Corollary 2 では K, K' が satellite knots でなくとも V_m が knotted であれば適用できる。

(2) $J \cap W_0 = \phi$ になるように J を選んだが，この条件がなければ，Corollary 2 は，成立しない，たとえば [3] の Fig. 3。

References

[1] T. Harikae: On the triviality of spatial theta-curves and handcuff graphs, pre-print.

[2] T. Shibuya: On knots obtained by nice fusions of 2-component links, pre-print.

[3] M. Teragaito: Composite knots trivialized by twisting, J. of Knot Theory and Its Ramification, 1 (1992), 467-470.