箱根セミナ記録 9 1 (1991)13-19.

Self #-equivalences of homology boundary links

渋谷哲夫 (大阪工大)

R^3 の oriented link に関して. [6] で boundary link と homology boundary link が定義されている。すなわち.

Def. $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n \subset R^3$ とする。

(1) l が boundary link

$\Leftrightarrow \exists \mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$: mutually disjoint orientable surfaces in R^3, $\partial\mathcal{F} = l$, $\partial F_i = k_i$.

(2) l が homology boundary link

$\Leftrightarrow$ (i) $\exists \mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$: mutually disjoint orientable surfaces in $R^3 - \mathrm{Int}\,\mathcal{V}$ ($\mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, $V_i = N(k_i : R^3)$) で $F_i \cap V_j = \partial F_i \cap \partial V_j = \lambda_{ij1} \cup \cdots \cup \lambda_{ijm}$ でこれらが ∂V_j の longitude.

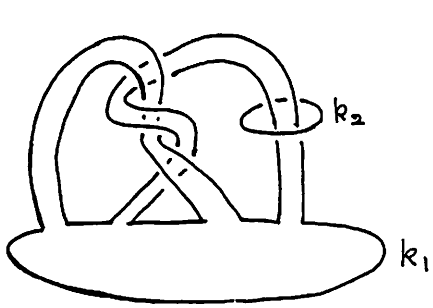
(ii) $\partial F_i = \bigcup_{j,h} \lambda_{ijh}$

(iii) $\sum_h \lambda_{ijh}$ is homologous to 0 in V_j for $j \neq i$

(iv) $\sum_h \lambda_{iih}$ is homologous to k_i in V_i

をすべて満たす。

定義より boundary link は homology boundary link になることは明らかであるが, [6] で逆が成立しない link の例 (Fig.1) が示されている。



$l_0 = k_1 \cup k_2$

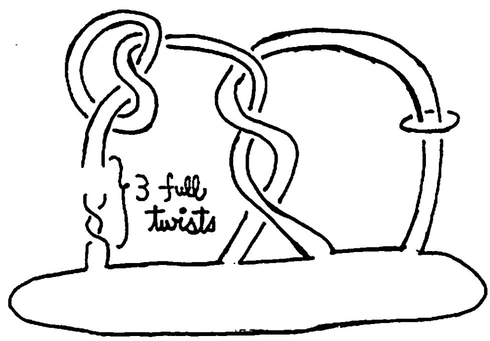
Fig. 1

l_0 は Def. (2) を満たす $\mathfrak{F}$ が張れるから homology boundary link であるが、boundary link ではない，[6]。しかし明らかに l_0 は slice link in the strong sense である（すなわち R^4 の上半空間で locally flat な disks が disjoint に張れる)。すなわち l_0 は cobordant to a trivial link（したがって to a boundary link）になる。

そこで一般につぎのような興味ある問題が提起される。

<u>Quest.</u> homology boundary link は cobordant to a boundary link か？

しかしこの問題は否定的に解決された。すなわち，[2]，[3] などでたとえば Fig. 2 のように homology boundary link であるが，cobordant to a boundary link でない例が知られるようになった。



$\sim$ (a boundary link)

Fig. 2

したがって cobordism で boundary link と homology boundary link を関係づけることはできないが，もう少し弱い関係として，[1] で以下が示されている。

<u>Prop.</u> Every homology boundary link is cobordant to a fusion of a boundary link.

ここで2つの links l, l' について l' が l の fusion

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ l を n-component とする。そのとき $^\exists\mathcal{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_p$: disjoint disks in R^3 ∋ $l \cap B_i = l \cap \partial B_i =$ (two arcs) で orientation coherently で $l' = l + \partial\mathcal{B}$ (+ は homology 和) が $(n-p)$-component になる。

本稿は[5]の内容を要約したもので. 上の Prop. を使い link の self #-equivalences に関するつぎの Th. を証明する。

<u>Th.</u> $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ を homology boundary link とする。

(1) l は trivial link に self #-equivalent (I) である。

(2) l は trivial link に self #-equivalent (II) である

$\Longleftrightarrow \varphi(k_i) = 0 \ , \ i=1, \cdots, n \ . \ (\varphi : \mathrm{Arf}$ invariant$)$.

ここで R^3 の2つの links l, l' について, l が有限回の Fig.3 の #-moves で l' に移るとき, l は l' にそれぞれ #-equivalent (I), 又は (II) と言う。

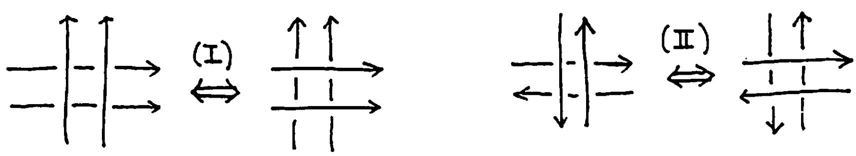


Fig. 3

特に各 #-move を link のある component (knot) で行なって得られるとき, l は l' にそれぞれ self #-equivalent (I) 又は (II) と言う。

<u>Remark.</u> Fig. 4 より l が l' に (self) #-equivalent (II) ならば l が l' に (self) #-equivalent (I) である。

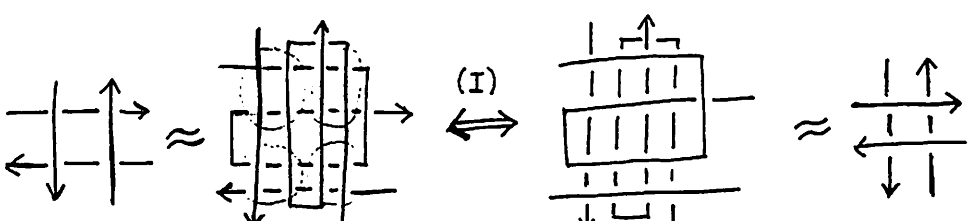


Fig. 4

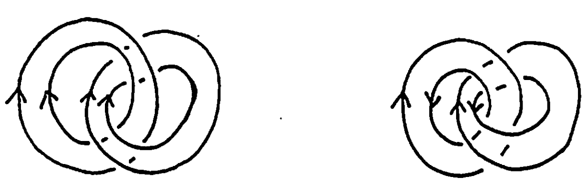
<u>Proof of Theorem.</u>

定理を証明するために, つぎの2つの Lemmas を使う, [4], [5].

Lemma 1. $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ を boundary link とする。
(1) ℓ は trivial link に self #-equivalent (I) である。
(2) ℓ は trivial link に self #-equivalent (II) である
$\Leftrightarrow \varphi(k_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n.$

$\ell\ (\subset R^3[a])$ が $\ell'\ (\subset R^3[b])$ に #-cobordant (I) (or (II)) とは つぎの条件を満たす mutually disjoint proper annuli $\mathcal{A}$ が $R^3[a, b]$ for $a \neq b$ に存在するときを言う。

「$\mathcal{A}$ は有限ケの点（これらが $\mathcal{A}$ の singular points で $S_{\mathrm{I}}(\mathcal{A})$ (or $S_{\mathrm{II}}(\mathcal{A})$) と表す，になる）を除いて locally flat で $\mathcal{A} \cap R^3[a] = \ell$ $\mathcal{A} \cap R^3[b] = -\ell'$, each annulus A of $\mathcal{A}$ に対し $A \cap R^3[a] \neq \phi$, $A \cap R^3[b] \neq \phi$ で $S_{\mathrm{I}}(\mathcal{A})$ (or $S_{\mathrm{II}}(\mathcal{A})$) $\neq \phi$ ならば，それに含まれる任意の点 P について $(\partial N(P : R^3[a, b]), \partial N(P : \mathcal{A}))$ が Fig. 5 (I) (or (II)) の link になる。」



(I) Fig. 5 (II)

さらに $\mathcal{A}$ を ℓ と ℓ' の間の #(I) (or #(II))-annuli と言う。

Lemma 2. ℓ, ℓ' を R^3 の link とする。
(1) ℓ は ℓ' に self #-equivalent (I) $\Leftrightarrow$ ℓ は ℓ' に #-cobordant (I).
(2) ℓ は ℓ' に self #-equivalent (II) $\Leftrightarrow$ ℓ は ℓ' に #-cobordant (II).

したがって Lemma 2 より Th. (1), (2) を示すには ℓ と trivial link の間に #(I) (or #(II))-annuli を構成すればよい。

Proof of Th. Prop. より homology boundary link $\ell\ (\subset R^3[0])$ は boundary link $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n\ (\subset R^3[2])$ の fusion $L_0 = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ $(\subset R^3[1])$ に cobordant とする，ここで K_i は $L_i = K_{i1} \cup \cdots \cup K_{ip_i}$ の fusion

とする，Fig 6。

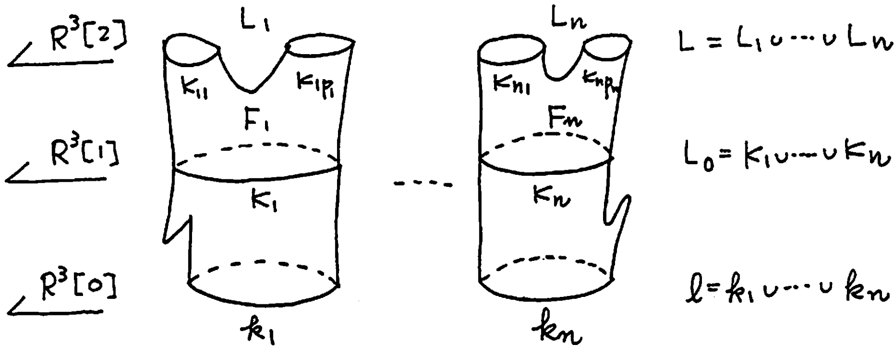


Fig. 6

(1) L は boundary link であるから，Lemma 1 より L は trivial link に self #-equivalent (I) であり，したがって Lemma 2 により l は trivial link に self #-equivalent (I) である。

(2) Fig. 5 (II) の link の Arf invariant は 0 だから Th. (2) の必要性は明らか。したがって十分性のみを示す。

$R^3[2]$ で completely splitted link $\bigcup_{i=1}^{n} (\kappa_{i1}\circ\cdots\circ\kappa_{ip_i})$, $\kappa_{ij}\approx K_{ij}$ ($\subset L_i$) が L と split するようにとり，各 κ_{ij} と K_{ij} の knot product by a band B_{ij} を行なう。そこで $\mathcal{L}_i = (K_{i1}\#\kappa_{i1})\cup\cdots\cup(K_{ip_i}\#\kappa_{ip_i})$, $\mathcal{B}_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} B_{ij}$, $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ とおく。L が boundary link だから，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n$ も boundary link であり 各 $\varphi(K_{ij}\#\kappa_{ij})=0$ だから Lemma 2 より $\mathcal{L}$ は trivial link $\mathcal{O}$ ($\subset R^3[3]$) に self #-equivalent (II) であり $R^3[2,3]$ において $\mathcal{L}$ と $\mathcal{O}$ の間の #(II)-annuli $\mathcal{A}$ が存在する。

L_0 は L の fusion であるから $R^3[1,2]$ に互いに disjoint locally flat な genus 0 の surface $\mathcal{F}=F_1\cup\cdots\cup F_n$ で $\partial\mathcal{F}\cap R^3[1]=L_0$, $\partial\mathcal{F}\cap R^3[2]=-L$ が存在する，Fig. 6。ここで $\bigcup_{i=1}^{n}(\kappa_{i1}\circ\cdots\circ\kappa_{ip_i})$ は completely splitted link で L とも split しているので，互いに disjoint な cones $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_i=\bigcup_{j=1}^{p_i} C_{ij}$ in $R^3(1,2]$, $\partial C_{ij}=-\kappa_{ij}$ で $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}=\phi$ なる $\mathcal{C}$ が存在する。α_i を $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}_i\cup\mathcal{C}_i\cup F_i$ 上の simple arc で C_{ij} の各 local knotted point を通り $\alpha_i\cap S_{II}(\mathcal{A})=\phi$ であるようにとる。そのとき $(\partial N(\alpha_i : R^3[1,3]), \partial N(\alpha_i : \mathcal{C}_i\cup\mathcal{A}))\approx(S^3, \kappa_{i1}\#\cdots\#\kappa_{ip_i})$ でしたがって l と $\bigcup_{i=1}^{n}(\kappa_{i1}\#\cdots\#\kappa_{ip_i})$ (この link は completely splitted) は #-cobordant (II) であり，Fig 5 (II) の link の Arf invariant は 0 だから，$\varphi(\kappa_{i1}\#\cdots\#\kappa_{ip_i})=\varphi(k_i)=0$ (条件より)。だから

Lemma 2 より, $\bigcup_i (K_{i1}\#\cdots\#K_{ip_i})$ は trivial link に self #-equivalent (II) であり, したがって l は trivial link に #-cobordant (II) である。すなわち lemma 2 により, l は trivial link に self #-equivalent (II) になる。

links が self #-equivalences ならば それらは link homotopic になるから Th. から次を得る。

<u>Cor.</u> homology boundary link は trivial link に link homotopic になる。

boundary link, homology boundary link は序の条件を満たす orientable surface が存在することであるがこの surface の "orientable" の条件だけを省いて残りの条件を満たすものが存在するとき, それぞれ Z_2-boundary link, Z_2-homology boundary link と言う。

self #-equivalences は link の component 同士の linking number を変えないので ある link l が trivial link に self #-equivalent (I) ならば l の2つの components の linking number は 0 である。

そこで Th. の拡張として次の Conj. が成立するかどうか？

<u>Conj.</u> $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ が Z_2-boundary (or Z_2-homology boundary link) で $\mathrm{Link}(k_i, k_j) = 0$, $i \neq j$, ならば l は self #-equivalent (I) である。

boundary link と homology boundary における "orientable" の条件は重要で筆者は Conj. は否定的に解決されるだろうと考えている。($n=2$ については Conj. は正しいことが証明できる。)

References

[1] T. D. Cochran and J. P. Levine: Homology boundary links and the Andrews-Curtis conjecture, Topology 30 (1991), 231–239.

[2] T. D. Cochran and K. E. Orr: Not all links are concordant to boundary links, Bull. of the Amer. Math. Soc. 23 (1990), 99–106.

[3] C. Livingston: Links not concordant to boundary link, Proc. of the Amer. Math. Soc. 110 (1990), 1129–1131.

[4] T. Shibuya: Self #-unknotting operations of links, Memo of Osaka Insti. Tech., 34 (1989), 9–17.

[5] T. Shibuya: Self #-equivalences of homology boundary links, Kobe J. of Math., to appear.

[6] N. Smythe: Boundary links, Topology Seminar, Wisconsin, 1965, Ann. of Math. Studies 60, 69–72, Princeton Univ. Press.