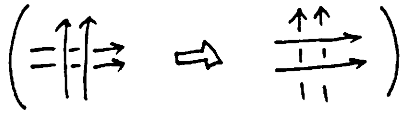
箱根セミナ記録 89 (1989)

Self #-unknotting operations of links

渋谷哲夫（大阪工大）

R^3 の二つの oriented links l と l' が #-<u>equivalent</u> であるとは有限回の  なる operation (これを #-operation と呼ぶ) で l と l' がうつりあうときに言う。そのとき つぎが知られている。

<u>Th</u> ([3]) (1) すべての knot は trivial knot と #-equivalent.

(2) $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$ と $l'=k_1'\cup\cdots\cup k_n'$ が #-equivalent

$$\iff \mathrm{Link}(k_i, l-k_i)\equiv \mathrm{Link}(k_i', l'-k_i') \pmod 2.$$

これにより link の #-equivalence による分類ができる。そこでこれより強い概念を導入する。すなわち l と l' が <u>self</u> #-<u>equivalent</u> であるとは、l と l' が #-equivalent で各 #-operation は link の1つの component について行なうこととする。

すると明らかに l と l' が self #-equivalent で

あれば l と l' は link homotopic になる。(逆は成立しない。)

最近 [1], [2] によりそれぞれ独立につぎが証明された。

『boundary link は trivial link に homotopic』

ここで R^3 の link l が <u>boundary link</u> とは l の各 component に互いに交わらないように orientable surface が R^3 の中で張れるときをいう。

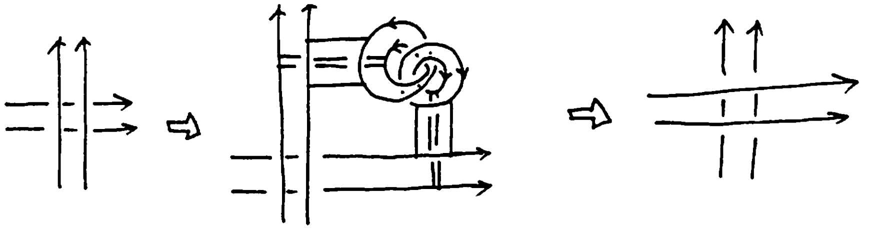
2つの links $l\,(\subset R^3[a])$, $l'\,(\subset R^3[b])$ が <u>cobordant</u> ($l \sim l'$ と書く) とは, l と l' の component を結ぶ互いに交わらない locally flat な annuli が $R^3[a,b]$ で張れるときをいう。

本稿は [5] の内容を要約したもので, まず [1], [2] で証明された上の定理の拡張としてつぎを示す。

<u>Th.1</u> l が boundary link に cobordant ならば, l は trivial link に self #-equivalent.

<u>Sketch of proof.</u> $\ell(\subset R^3[a])$, $\ell'(\subset R^3[b])$ に対し $R^3[a,b]$ で互いに交わらない proper annuli $\mathcal{A}$ で有限個の点（$\mathcal{S}(\mathcal{A})$ と書く）を除いて locally flat で $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \ni {}^{\forall}P$ に対し $(\partial N(P;R^4);\partial N(P;\mathcal{A})) \approx (S^3;$ $)$ となるものが存在するとき，$\mathcal{A}$ を ℓ と ℓ' を結ぶ #-annuli と呼ぶ。

#-operation は2重の Hopf link を下図のように結んで得られるから，つぎは明らかである。



<u>Step 0.</u> $\ell(\subset R^3[a])$ と $\ell'(\subset R^3[b])$ が self #-equivalent

$\Leftrightarrow$ ℓ と ℓ' を結ぶ level preserving な #-annuli が $R^3[a,b]$ に存在する。

そこで [1] の Th. 3 を使うとつぎが証明できる。

<u>Step 1.</u> $\ell(\subset R^3[0])$ が boundary link に cobordant ならば ℓ と trivial link $O(\subset R^3[3])$ を結ぶ #-annuli

$\mathcal{A}_1$が存在する。

つぎに[4]のLemma 1.17の証明と同様にして、

$\delta(\mathcal{A}_1)$ ($\neq \phi$ならば) つぎのような#-annuliが存在する。

<u>Step 2.</u> ℓと$\mathcal{O}$を結ぶ#-annuli $\mathcal{A}_2$で

(i) $\mathcal{A}_{20} = \mathcal{A}_2 \cap R^3[1,2]$はlevel-preserving annuliで

$\delta(\mathcal{A}_2) = \delta(\mathcal{A}_{20})$.

(ii) $\ell \sim \mathcal{A}_2 \cap R^3[1]$で$\ell' \sim \mathcal{A}_2 \cap R^3[2]$

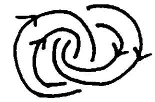
なるものが存在する。

そこで2つのlinksがcobordantならば、それらはself #-equivalentであることを示すことにより、

<u>Step 3.</u> ℓと$\mathcal{O}$を結ぶlevel-preserving #-annuliが存在する。

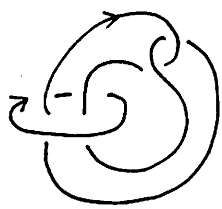
以上のことからTh. 1が証明される。

$\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$が<u>proper</u> (i.e., $\mathrm{Link}(k_i, \ell - k_i) \equiv 0 \pmod 2$) ならばArf invariant $\varphi(\ell)$が定義できる。そこでℓがproperのときℓの<u>reduced Arf</u>

invariant $\overline{\varphi}(\ell)$ を $\overline{\varphi}(\ell) \equiv \varphi(\ell) - \varphi(k_1) - \cdots - \varphi(k_n)$ (mod 2) と定義する。そのとき  の Arf invariant は 1 だからつぎが証明できる。

<u>Th. 2</u> ℓ と ℓ' が self #-equivalent ならば $\overline{\varphi}(\ell) = \overline{\varphi}(\ell')$。

このことから Whitehead link ℓ は trivial link に

k_1  k_2 $\quad \ell = k_1 \cup k_2$

homotopic になるが $\overline{\varphi}(\ell) = \varphi(\ell) = 1$ だから trivial link に self #-equivalent ではない。

References

[1] L. Cervantes and R. A. Fenn: Boundary links are homotopy trivial, Quart. J. Math. Oxford 39 (1988), 151-158.

[2] D. Dimovski: A geometric proof that boundary

links are homotopically trivial, Topology and its Appli. 29 (1988), 237-244.

[3] H. Murakami: Some metrics on classical knots, Math. Ann. 270 (1985), 35-45.

[4] T. Shibuya: On the cobordism of links in 3-space, Kobe J. Math. 1 (1984), 119-131.

[5] T. Shibuya: Self #-unknotting operations of links, Memo. of Osaka Inst. Tech. Series A 34 (1989), 9-17.