箱根セミナ記録 88 (1988)

The Arf Invariant of Proper Links in Solid Tori

渋谷哲夫

3次元空間 R^3 の中の oriented n-component link $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ が proper とは $\mathrm{Link}(K_i, L - K_i) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall i$, のときをいう。

2つの links $L_1 (\subset R^3[a])$, $L_2 (\subset R^3[b])$ が related とは $R^3[a,b]$ に locally flat ori. proper surface F of genus zero で $\partial F \cap R^3[a] = L_1$, $\partial F \cap R^3[b] = -L_2$, ($-L$ は L の reflective inverse) となるときをいう, ただし $a < b$.

link L が proper のとき, L の Arf invariant, $\varphi(L)$, は L に related な knot K のそれと定義する。このような K は unique ではないが, [3] により $\varphi(L)$ は well-defined であることが知られている。

本稿では R^3 の中の solid tori に含まれる proper links の Arf invariant について調べる([5]の一部の紹介)。

R^3 の2組の solid tori の disjoint union $\mathcal{V}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_n^*$, $\mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ を考える。ただし V_i^* の core C_i^* に対し $\Gamma^* = C_1^* \cup \cdots \cup C_n^*$ は trivial link とする。$f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{V}$ を ori. pres. homeo. とするとき f が faithful とは $f|_{V_i^*} : V_i^* \longrightarrow V_i$ が faithful (i.e., $f(\lambda_i^*) = \lambda_i$, λ_i^*, λ_i は $\partial V_i^*, \partial V_i$ の longitude), $\forall i$, の時をいう。そこで f が faithful の時, $\mathcal{V}^*$ に含まれる link $l^* = l_1^* \cup \cdots \cup l_n^*$ (ただし $l_i^* \subset V_i^*$) に対し, $l = f(l^*)$, $l_i = f(l_i^*)$ と書く。また $l_i \subset V_i$ に対し l_i の V_i における winding number $w(l_i)$ を l_i と V_i の meridian disk との (algebraic) intersection number とする。

そのとき つぎの定理を証明する。

<u>Theorem</u> l^*, $l = l_1 \cup \cdots \cup l_n$, $\Gamma = f(\Gamma^*)$ を上の記号のもの, $q = \mathrm{Link}(\Gamma) = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Link}(C_i, C_j)\right)$ とする。もし l^*, Γ が proper ならば l も proper である。さらに $w(l_i) \equiv w(l_j) (= p) \pmod 4$

$\forall i, j$, の時. つぎが成立する。

(1) $\varphi(\ell) \equiv \varphi(\ell^*) + \varphi(\Gamma) \pmod 2$ if p is odd

(2) $\varphi(\ell) = \varphi(\ell^*)$ if p, q are even or q is odd and $p = 4m$

$\equiv \varphi(\ell^*) + 1 \pmod 2$ if q is odd and $p = 4m+2$.

これよりつぎを得る。

<u>Corollary</u> もし q が even ならば.

$\varphi(\ell) \equiv \varphi(\ell^*) + \varphi(\Gamma) \pmod 2$ if p is odd

$= \varphi(\ell^*)$ if p is even.

Theoremの証明

<u>Lemma 1</u> ([3]) L_1, L_2 が proper で related な links ならば $\varphi(L_1) = \varphi(L_2)$.

つぎに $L_0 = K_1 \cup K_2$ を 2-component link とし $L_0' = \overline{K_1} \cup K_2$ (ただし $\overline{K}$ は K の ori. を逆にしたもの) とする。

<u>Lemma 2</u> ([1]) L_0, L_0' の Jones polynomial について,

$V_{L_0'}(t) = t^{-3s} V_{L_0}(t)$, ここで $s = \mathrm{Link}(K_1, K_2)$.

<u>Lemma 3</u> ([2]) L を n-component link とすると.

$$V_L(\sqrt{-1}) = \begin{cases} (\sqrt{2})^{n-1} \times (-1)^{\varphi(L)} & \text{if } L \text{ is proper} \\ 0 & L \text{ is non-proper} \end{cases}$$

そこでこれらを使ってつぎの Lemma 4 を示す。そこで

$L = L_1 \cup L_2$ (ただし $L_1 = K_1 \cup \cdots \cup K_{m_1}$, $L_2 = K_{m_1+1} \cup \cdots \cup K_{m_1+m_2}$,

それぞれ m_1, m_2-component links) とするとき $\mathrm{Link}(L_1, L_2)$

$= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \mathrm{Link}(K_i, K_j)$ と定義する。また L_1 に対し,

$\bar{L}_1 = \bar{K}_1 \cup \cdots \cup \bar{K}_{m_1}$ と書く。

<u>Lemma 4</u> 上の $L = L_1 \cup L_2$ に対し, $L' = \bar{L}_1 \cup L_2$ とする。

そのとき L が proper ならば L' も proper で $s = \mathrm{Link}(L_1, L_2)$

は even である。さらに

$$\varphi(L) = \varphi(L') \qquad \text{if } s \equiv 0 \pmod 4$$

$$\equiv \varphi(L') + 1 \pmod 2 \qquad s \equiv 2 \pmod 4$$

<u>Proof</u> L が proper より L の任意の knot K_h に対し

$\mathrm{Link}(K_h, L - K_h) = 2r_h$ (r_h は整数) とおくとき,

$$\mathrm{Link}(\bar{K}_i, L' - \bar{K}_i) = 2(r_i - \mathrm{Link}(K_i, L_2)) \quad \text{for } K_i \subset L_1$$

$$\mathrm{Link}(K_j, L'-K_j) = 2(r_j - \mathrm{Link}(K_j, L_1)) \quad \text{for } K_j \subset L_2$$

$$s = \mathrm{Link}(L_1, L_2) = 2(r_1 + \cdots + r_{m_1} - \mathrm{Link}(L_1))$$

であることが計算でき、L'もproperでsはevenになる。

つぎに $L = L_1 \cup L_2$, $L' = \overline{L}_1 \cup L_2$ の $L_1, L_2, \overline{L}_1$ の(complete) fusionで得られるknotを $K_1, K_2, \overline{K}_1$ とし $L_0 = K_1 \cup K_2$, $L_0' = \overline{K}_1 \cup K_2$ とする。すると $\mathrm{Link}(K_1, K_2) = s$ (even)でL_0はLに、L_0'はL'にrelatedでproperより、$\varphi(L_0) = \varphi(L)$, $\varphi(L_0') = \varphi(L')$。$L_0, L_0'$に対しLemmas 2, 3を適用してLemma 4を得る。▨

つぎに各solid torus V_iの中にp_i本のc_iとparallelで同じ方向でnon-twistedなloopsをとり$p_i c_i$で表す(すなわち$p_i c_i$はV_iの中のnon-twistedなannulus上にとる。) 特に$p_i = p_j (= p)$のとき $pc_1 \cup \cdots \cup pc_n$を$p\Gamma$で表す。以下 $q = \mathrm{Link}(\Gamma) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Link}(c_i, c_j)$ で書く。

<u>Lemma 5</u> $\varphi(2\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } q \text{ is even} \\ 1 & \text{if } q \text{ is odd} \end{cases}$

<u>Proof</u> 2Γは常にproperである。$2\Gamma = \Gamma \cup \Gamma'$とおくと

$\mathrm{Link}(\Gamma, \Gamma') = 2q$ となる。また $\bar{\Gamma} \cup \Gamma'$ は trivial knot に related である。したがって

$$q : \text{even} \rightarrow \varphi(2\Gamma) = \varphi(\bar{\Gamma} \cup \Gamma') = 0$$

$$q : \text{odd} \rightarrow \varphi(2\Gamma) \equiv \varphi(\bar{\Gamma} \cup \Gamma') + 1 = 1 \pmod 2. \quad \blacksquare$$

同様にして一般につぎを得る。

<u>Lemma 6</u> Γ が proper ならば $p\Gamma$ も proper で

(1) $\varphi(p\Gamma) = \varphi(\Gamma)$ if p is odd

(2) $\varphi(p\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } p, q \text{ are even or } q \text{ is odd and } p = 4m \\ 1 & \text{if } q \text{ is odd and } p = 4m+2. \end{cases}$

<u>Proof</u> pC_i は non-twisted だから Γ が proper ならば $p\Gamma$ も proper.

$pC_i = C_{i1} \cup \cdots \cup C_{ip}$ とし $L_1 = C_{11} \cup C_{21} \cup \cdots \cup C_{n1}$, $L_2 = p\Gamma - L_1$ とする。そのとき $\bar{L}_1 \cup L_2$ は $(p-2)\Gamma$ に related である。$\mathrm{Link}(L_1, L_2) = 2(p-1)q$ だから

(1) p が odd, 又は q が even のとき, Lemma 4 より

$$\varphi(p\Gamma) = \varphi(\bar{L}_1 \cup L_2) = \varphi((p-2)\Gamma)$$

したがって p が odd ならば $\varphi(p\Gamma) = \varphi(\Gamma)$,

p, q が even ならば $\varphi(p\Gamma)=\varphi(\theta)=0$.

(2) p が even で q が odd のとき，Lemma 4.5 より

$$\varphi(p\Gamma)\equiv\varphi((p-2)\Gamma)+1\equiv\varphi((p-4)\Gamma)\pmod 2$$

したがって $p=4m$ ならば $\varphi(p\Gamma)=\varphi(\theta)=0$

$p=4m+2$ ならば $\varphi(p\Gamma)=\varphi(2\Gamma)=1$ ▨

Lemma 6 を一般にしてつぎのような形で成り立つ。

<u>Lemma 7</u> $p_i\equiv p_j \pmod 4$ で $p=\mathrm{Min}\{p_1,\cdots,p_n\}$. そのとき $\Gamma=c_1\cup\cdots\cup c_n$ が proper ならば $\varphi(p\Gamma)=\varphi(p_1c_1\cup\cdots\cup p_nc_n)$.

Lemma 7 の p_ic_i の各々は c_i と同じ方向の loop であるが，Theorem を証明するために c_i と逆の方向の component も含む link $\mathcal{L}_i$ を考える。すなわち $\mathcal{L}_i$ を V_i の中の link で c_i と parallel で non-twisted で r_i ($=o(l_i)\cdots$ order of l_i in V_i, すなわち l_i と V_i の meridian disk との geometric intersection number) 本の loops で $w(\mathcal{L}_i)=p_i(=w(l_i))$ となるようにとり，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n$ とおく。すると $\mathcal{L}$ は $p_1c_1\cup\cdots\cup p_nc_n$ に related だから，

<u>Lemma 8</u> Γ が proper で $p_i\equiv p_j \pmod 2$ ならば $\mathcal{L}$ も

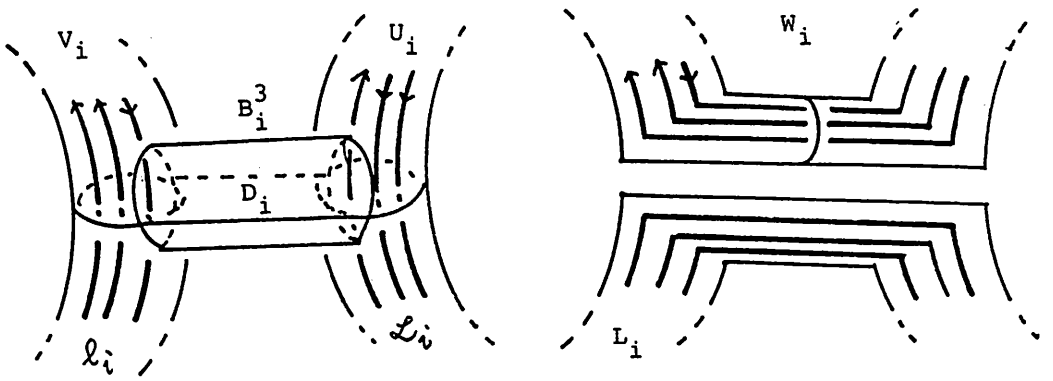
proper で $\varphi(\mathcal{L}) = \varphi(p_1 c_1 \cup \cdots \cup p_n c_n)$。

2つの links $L_1 (\subset R^3[a])$, $L_2 (\subset R^3[b])$ が cobordant (すなわち L_1 と L_2 の各 component ごとに locally flat mutually disjoint な annuli が $R^3[a,b]$ で張れる) のとき $L_1 \sim L_2$ で表わす。そのとき.

<u>Lemma 9</u> ([4]) もし $\Gamma \sim \Gamma^*$ ならば $\ell \sim \ell^*$.

以上を使うと Theorem が証明できる。

<u>Sketch of Proof</u> $\mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ と split した disjoint solid tori $\mathcal{U} = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ でその core が $-\Gamma = (-c_1) \cup \cdots \cup (-c_n)$ なるものをとる、Γ に対し $-\Gamma$ は Γ の reflective inverse。



$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n$ を Lemma 8 のように $\mathcal{U} = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ でとる。

$\ell = \ell_1 \cup \cdots \cup \ell_n \subset \mathcal{V}$ に対し $\ell \cup \mathcal{L} \approx \ell \circ \mathcal{L}$ (split union) である。

$V_i \cup U_i$ に 3-ball B_i^3 を $\mathcal{V}$ と $\mathcal{U}$ を分ける S^2 に対し対称に

なるようにつけ $V_i \cup U_i \cup B_i^3$ から新しい solid torus W_i を図のように作る。$\mathcal{W} = W_1 \cup \cdots \cup W_n$ の core は $\Gamma \# (-\Gamma)$ (S^2 に対して対称になるように) で $\ell \cup \mathcal{L}$ を $\mathcal{W}$ の中で fusion を行なって $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ を得る。$\Gamma \# (-\Gamma) \sim 0$ だから $L \sim L^*$ (Lemma 9)。ところが $\mathcal{L}_i$ は non-twisted だから $L^* \approx \ell^*$。Γ が proper より $\mathcal{L}$ も proper で、したがって ℓ も proper である。故に

$$\varphi(\ell) + \varphi(\mathcal{L}) \equiv \varphi(\ell \circ \mathcal{L}) = \varphi(L) = \varphi(L^*) = \varphi(\ell^*) \pmod 2.$$

したがって Lemmas 6, 7, 8 より Theorem を得る。

References

[1] V.F.R. Jones: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103–111.

[2] H. Murakami: A recursive calculation of the Arf invariant of a link, Math. Soc. Japan, 38 (1986), 335–338.

[3] R.A. Robertello: An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 543–555.

[4] T. Shibuya: A condition for links to be cobordant to zero, Memoirs of Osaka Insti. Tech. 30 (1985), 11–16.

[5] T. Shibuya: The Arf invariant of proper links in solid tori, to appear