箱根セミナ記録 8 7 (1987) 67-79

On the cobordism and homotopy of links in solid tori

渋谷哲夫
(大阪工業大学)

本稿では R^3 における tame な oriented link を取り扱う。

[4] の中で Gordon により編集された問題の中につぎのものがある。

<u>Question</u>: Which 1-links are cobordant to boundary links?

R^3 における2つの links L, L' が <u>cobordant</u> (i.e. locally flat な annuli が R^4 の half space で張れる) のとき、$L \sim L'$ と書く。

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ (各 K_i は knot) が <u>boundary link</u> とは $R^3 \supset {}^{\exists}\mathcal{F} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ (mutually disjoint orientable surfaces) で $\partial \mathcal{F} = L$, $\partial F_i = K_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ のときを言う。

以下ではこのQuestionをsolid toriに含まれるlinkの問題として考える。

R^3における2つのsolid tori V^*, V（ただしV^*はtrivial）に対しorientation preserving homeomorphism f of V^* onto Vが<u>faithful</u>とはV^*のlongitude（i.e. $\overline{R^3-V}$でsurfaceが張れるloop）をVのそれにうつすときを言う。

R^3における2組のdisjointなsolid tori $\mathcal{V}^*=V_1^*\cup\cdots\cup V_n^*$, $\mathcal{V}=V_1\cup\cdots\cup V_n$（ただし$\Gamma^*=C_1^*\cup\cdots\cup C_n^*$はtrivial link, C_i^*はV_i^*のcore）に対しorientation preserving homeomorphism f of $\mathcal{V}^*$ onto $\mathcal{V}$が<u>faithful</u>とは$f|_{V_i^*}: V_i^* \longrightarrow V_i$がfaithfulのときをいう。$f$がfaithfulのとき$\mathcal{V}^*$のlink $l^*=l_1^*\cup\cdots\cup l_n^*$（$l_i^*\subset V_i^*$）に対し$f(l^*)$, $f(l_i^*)$をl, l_iでそれぞれ表わす。

そのときつぎの予想を考える。

<u>Conjecture</u>　$\Gamma=f(\Gamma^*)\sim$（a boundary link）とする。もし$l^*\sim$（a boundary link）ならば$l\sim$（a boundary link）。

この予想が成立するかどうか大変疑問である。

つぎのような例を考える。V^*の中にFig.1のような2-component link ℓ^*をとりこれをfaithful homeo. fでΓがsliceでないknot（たとえば3_1）にうつすとする。そのとき$\ell^* \sim$ (a boundary link)（実際は$\sim$ (a trivial link)）である。著者は$\ell \sim$ (a boundary link)であるかどうか知らないが、Γがslice knotでないから、$\ell \not\sim$ (a boundary link)と考えている。（ただし$\ell^* \sim$ (a boundary link)であるが[7] P.141によりℓ^*はboundary linkではない。したがって下記のRemark 1によりℓはboundary linkでないことは示される。）

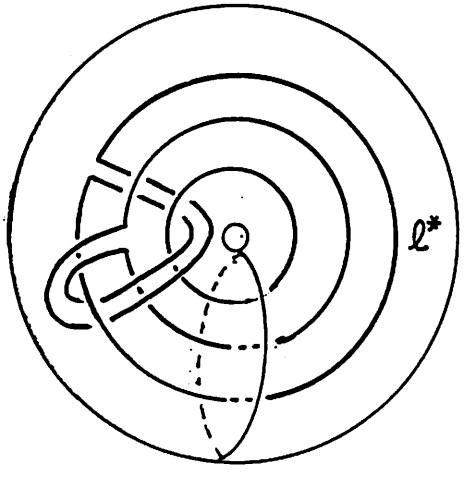


Fig. 1

そこでまず Conjecture の仮定の2つの条件の一方を強めた場合として Theorem 1, 2 を示す。

<u>Theorem 1</u>　$\Gamma \sim \Gamma^*(\approx 0)$ とする。そのとき $l^* \sim$ (a boundary link) ならば $l \sim$ (a boundary link)。□

<u>Theorem 2</u>　$\Gamma \sim$ (a boundary link) とする。そのとき l^* が boundary link ならば $l \sim$ (a boundary link)。□

"$\sim$" は equivalence relation だから、Theorem 1 はつぎより明らか。

<u>Lemma 1</u> ([9], [10])　$\Gamma \sim \Gamma^*$ ならば $l \sim l^*$。□

Theorem 2 を示すために Lemma 2 を準備する。

<u>Lemma 2</u>　$\mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_n \supset l = l_1 \cup \cdots \cup l_n$ $(l_i \subset V_i)$ をとる。そのとき Γ, l_i $(i=1,\cdots,n)$ が boundary links ならば l も boundary link。□

<u>Proof</u>　l_i は boundary link だから l_i の各 component k_{ij} に mutually disjoint surface F_{ij} が張れる。さらに $F_{ij} \cap \partial V_i$ は V_i の longitude だけになるようにとれる。そこで $\mathcal{V} \cap (\bigcup_{i,j} F_{ij})$ のうちで l の component を boundary に含むものを F とする。Γ が boundary link だから $F \cap \partial\mathcal{V}$ の各 component に $\overline{R^3 - \mathcal{V}}$ で surface が張れ

その union を S とする。そのとき $\partial(F\cup S)=l$ で l の各 component に mutually disjoint surfaces が張れている。したがって l は boundary link になる。□

<u>Proof of Theorem 2</u> Γ が boundary link Γ_0 に cobordant とする。Γ_0 の regular neighborhood より得られた solid tori を $\mathcal{V}_0$ とし. $f_0:\mathcal{V}^*\longrightarrow\mathcal{V}_0$ を faithful homeo. とする。また $f_0(l^*), f_0(l_i^*)$ をそれぞれ l_0, l_{0i} と書く。

Lemma 1 の証明より Lemma 1 は拡張できて $\Gamma\sim\Gamma_0$ より $l\sim l_0$ が得られる。l^* が boundary link だから各 l_i^* が boundary link でしたがって l_{0i} は boundary link になる。Γ_0 は boundary link だから Lemma 2 より l_0 は boundary link になる。故に $l\sim$ (a boundary link)。□

そこでいま $V_i^*\supset l_i^*$ の代わりに knot k_i^* をとり $l_0^*=k_1^*\cup\cdots\cup k_n^*$ とすると l_0^* の各成分は互いに split しているから boundary link になる。したがって Theorem 2 よりつぎを得る。

<u>Corollary 1</u> $\Gamma\sim$ (a boundary link) ならば $l_0\sim$ (a boundary link). □

<u>Remark 1</u>　Theorem 2 で $n=1$ のときは明らかに Γ は boundary link で l^* が boundary link であることと l が boundary link になることが同値である。□

つぎに 2つの n-component links $L=K_1\cup\cdots\cup K_n$, $L'=K_1'\cup\cdots\cup K_n'$ について L が L' に <u>homotopic</u> とは L の各 component K_i の自分自身の上下を有限回いれかえて $L'=K_1'\cup\cdots\cup K_n'$ が得られるときをいう, Fig. 2.

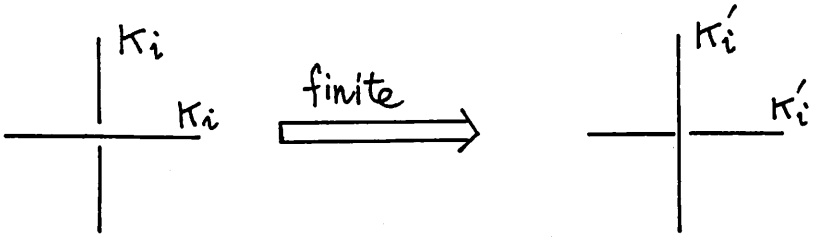


Fig. 2

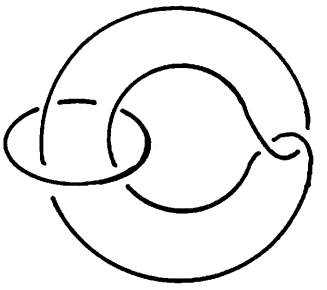
そのときつぎの性質が知られている。

<u>Theorem A</u> ([2], [3]) $L\sim L'$ ならば L は L' に homotopic。□

<u>Theorem B</u> ([1], [6], [11]) L が boundary link ならば L は trivial link に homotopic。□

したがって Theorem A, B より $L\sim$(a boundary link) ならば L は trivial link に homotopic になる。しかしこの逆は成立しない。たとえば Whitehead link L_0 (Fig. 3) は明らかに trivial link に

homotopic であるが boundary link に cobordant でない。(なぜなら一般に $L=K_1\cup\cdots\cup K_n$ が boundary link ならば L の Arf invariant は $\varphi(L)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(K_i)$ となる。Whitehead link L_0 を boundary link に cobordant と仮定すると、L_0 の各 component は trivial knot だから $\varphi(L_0)=0$。ところが L_0 は Whitehead link だから $\varphi(L_0)=1$ である。)



L_0

Fig. 3

つぎに Conjecture の後半の仮定を省くときつぎの定理が成立する。

<u>Theorem 3</u>　$\Gamma\sim$(a boundary link) ならば ℓ は ℓ^* に homotopic になる。□

これを示すためにつぎの Lemma 3 が必要になる。

前のページで L が L' に homotopic ということを定義したが、

これは以下のように言い換えてよい。

$L=K_1\cup\cdots\cup K_n$, $L'=K_1'\cup\cdots\cup K_n'$ を $R^3[a]$, $R^3[b]$ $(a<b)$ にそれぞれ含まれる links とする。そのとき L が L' に homotopic とは

☆ $R^3[a,b]$ で各 K_i と K_i' に proper locally flat level-preserving annulus A_i で $A_i\cap A_j=\phi$ $(i\neq j)$ で各 A_i の singularity, $\mathcal{S}(A_i)$ と書く, は A_i の interior に含まれる有限個の孤立点より成り $\mathcal{S}(A_i)\ni{}^\forall P$ に対し $(\partial N(P:R^4);\partial N(P:A_i))\approx(S^3;\bigcirc)$ となるものが存在する。

そのとき Theorem A を使ってつぎの事が示される。

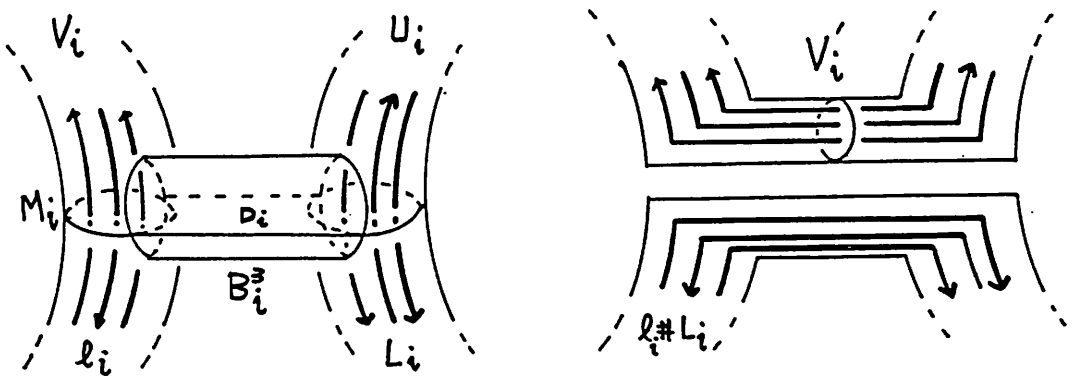
<u>Lemma 3</u> ([9]) L が L' に homotopic であることと ☆ から level-preserving という条件を省いた annulus が存在するということが同値である。□

Lemma 3 を使って Theorem 3 を示す。

<u>Proof of Theorem 3</u> Γ が boundary link Γ_0 に cobordant とし, f_0, l_0 を Theorem 2 の証明と同じものをとると $\Gamma\sim\Gamma_0$ より $l\sim l_0$ となる。したがって Theorem A を使うと Theorem 3 を示す

には Γ が boundary link のとき l が l^* に homotopic であることを示せばよい。

そこで $R^3[0] \supset l$ に対し $A_0 = l \times [0,1] \subset R^3[0,1]$ をとる。$R^3[1]$ に solid tori $\mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ with a core Γ と $\mathcal{V}$ と split して $-\Gamma$ (Γ の reflective inverse) を core とする solid tori $\mathcal{U} = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ ($\subset R^3[1]$) をとる。$\mathcal{V}$ と $\mathcal{U}$ を分ける 2-sphere S^2 に対し $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ を対称に置き、各 V_i と U_i の表面の対称な2点を S^2 に関し対称になるような arc α_i で結びその α_i に沿って 3-ball B_i^3 を attach する, Fig. 4(a)。そのとき各 V_i の meridian disk M_i と $l_i (= l \cap V_i)$ との intersection の points の最小数を p_i とするとき、U_i の中に U_i の core と parallel な non-twisted p_i-component



(a) (b)

Fig. 4

link L_i をとり それを $W_i = V_i \cup U_i \cup B_i^3$ の中で Fig.4(b) のように non-twisted fusion を行なう。その結果得られる link を $l_i \# L_i$ と表わす。そこで W_i に Fig.4(a) の proper disk D_i をとる。$V_i' = \overline{W_i - N(D_i : W_i)}$ は solid torus になる。$\mathcal{V}' = V_1' \cup \cdots \cup V_n'$ とおくと $\mathcal{V}'$ は $(l_1 \# L_1) \cup \cdots \cup (l_n \# L_n)$ ($= l \# L$ と表わす) を含む。$\mathcal{V}'$ の作り方から $\mathcal{V}'$ は S^2 に関して対称であるから $\mathcal{V}'$ の core Γ_0 $(= \Gamma \# (-\Gamma))$ は $\Gamma_0 \sim 0 (= \Gamma_0^*)$ である, [5]。したがって Lemma 1 より $l \# L \sim (l \# L)^* \approx l^*$。これより $l \# L \subset R^3[1]$, $l^* \subset R^3[2]$ に対し locally flat mutually disjoint な annuli $\mathcal{A}_1 \subset R^3[1,2]$ が張れる。また各 L_i は non-twisted parallel link で $-\Gamma$ は boundary link だから, $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ は boundary link になり Theorem B より homotopic to zero になる。しかも L は l と split しているから $R^3(0,1]$ で L に mutually disjoint な disks $\mathcal{D}$ で $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}_0 = \phi$ であるものが張れる。したがって $l \subset R^3[0]$, $l^* \subset R^3[2]$ に Lemma 3 を満たす annuli $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{D}$ が張れたことになり l は l^* に homotopic になる。□

Theorem 3より本稿のconjectureに関しては下記の所までは言える。

<u>Corollary 2</u>　$\Gamma \sim$ (a boundary link) とする。もし $l^* \sim$ (a boundary link) (l^* が homotopic to zero で十分) ならば l は homotopic to zero である。□

<u>Remark 2</u>　Theorem 3の仮定を弱めて Γ is homotopic to zero ($\approx \Gamma^*$) にすると、結論は正しくなくなる。すなわち Γ is homotopic to zero でも l is not homotopic to l^* という例がある。たとえば Γ として Fig. 3 の Whitehead link をとり l として Fig. 5 のような Γ の non-twisted parallel link をとると l is not homotopic to l^* (≈ 0) なることが [6] によって示されている。□

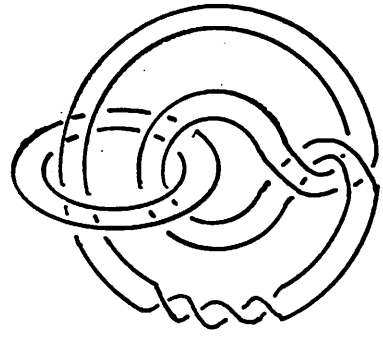


Fig. 5

References

[1] D. Dimovski: A geometric proof that boundary links are homotopically trivial, to appear

[2] C. H. Giffen: Link concordance implies link homotopy, Math. Scand., 45(1979), 243–254.

[3] D. Goldsmith: Concordance implies homotopy for classical links in M^3, Comm. Math. Helv., 54(1979), 347–355.

[4] J. C. Hausmann: Knot theory, Springer Lecture Notes. Math. 685(1977), 309–311.

[5] F. Hosokawa: A concept of cobordism between links, Ann. of Math. (2), 86(1967), 362–373.

[6] J. W. Milnor: Link group, Ann. of Math., 59 (1954), 177–195.

[7] D. Rolfsen: Knots and links, Publish or Perish, Inc. Berkeley, CA (1976).

[8] T. Shibuya: On the cobordism of compound knots,

Math. Sem. Notes Kobe Univ., 8(1980), 331–337.

[9] T. Shibuya: On the cobordisms of links in 3-space, Kobe J. Math., 1 (1984), 119–131.

[10] T. Shibuya: A condition for links to be cobordant to zero, Memoirs of Osaka Insti. Tech., 30 (1985), 11–16

[11] N. Smythe: Boundary links, Topology Seminar Wisconsin, 1965 (R.H. Bing, R.J. Bean (eds)), Ann. of Math. Studies 60 (1966), 69–72.