

block number 2 の DS-diagram

上智大学大学院理工学研究科数学専攻
博士前期課程
大塚 昭嘉

1 Block number of E-data

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とし, $V^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$, $V^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$ とする. code ϕ を, $\phi: V \rightarrow \{l, r\}$ により定義する. $V^+ \cup V^-$ の円順列を A で表すとし, **arrangement** と呼ぶとする.

Definition 1.1.

arrangement A と *code* ϕ の *set* を **formal E-data** と言い, $\mathcal{E} = (A, \phi)$ と表す.

A 中の連続する点の並びを **subword** と呼ぶ. V^+ (V^-) からのみから成る subword を **positive (negative) subword** と言い, maximal positive (negative) subword を **positive (negative) block** と呼ぶ.

Definition 1.2.

\mathcal{E} の *positive block* の数を \mathcal{E} の **block number** と言い, $bl(\mathcal{E})$ と表す.

Definition 1.3.

\mathcal{E} が **realizable**

\iff

次の手順で平面 *graph* が描けること.

- (1) $\mathbb{R}^2 \supset S^1$ に, A に従って $V^+ \cup V^-$ を配置する,
- (2) A の点によって区切られた S^1 上の各 *arc* に名前と向きをつける,
- (3) 各 $v_k \in V$ に対し *graph* の芽を次のように定める,

[72]

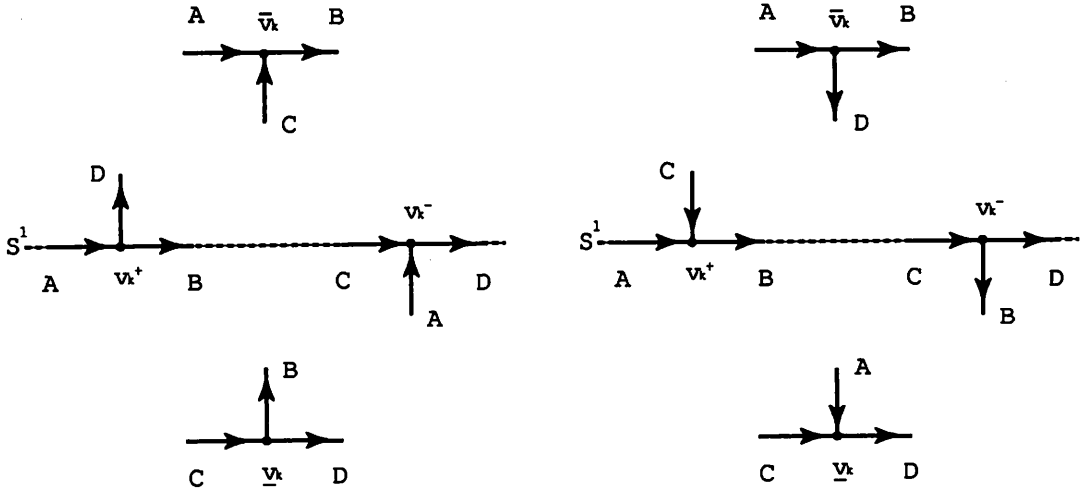


図 1: $\phi(v_k) = l$

図 2: $\phi(v_k) = r$

(4) 各辺の始端と終端を結ぶ.

$\phi(v) = l$ (又は r) のとき v を l (又は r) タイプと呼ぶ.

realizable E-data からある closed 3-manifold を実現することができる.

2 E-data of block number 2

2.1 inner-realizable

positive block の数が 2 の arrangement \mathcal{A} の各頂点に適当に code をつけると block number 2 の formal E-data をつくることができる. block number 2 の formal E-data の realizability を調べ, block number 2 の realizable E-data の分類をすることと, 実現している manifold の list を作るものが一つの目標である. 本論文では, 次の arrangement

$$\mathcal{A}^* = v^-V_1^+v^+V_2^+x^+x^-W_2^-y^-V_3^+y^+V_4^+u^+u^-W_1^-$$

に対して, $\phi(u) = \phi(v) = \phi(x) = \phi(y) = l$ を定め, 各 V_i ($i = 1, \dots, 4$) の点の数とタイプを与えることによって, realizability を考える. arrangement \mathcal{A}^* を S^1 に配置すると図 3 のようになっている.

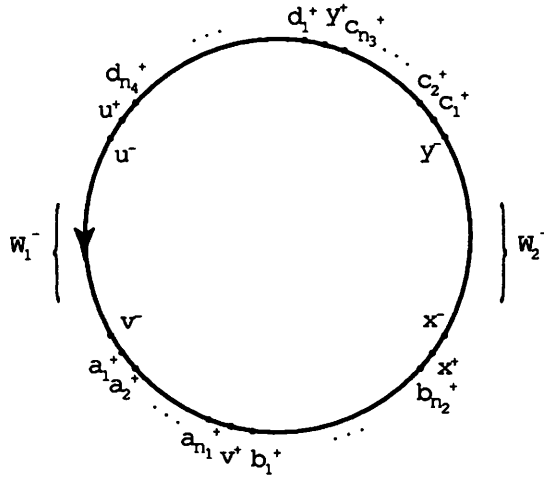


図 3: A^*

Def 1.3.(3) に従い, S^1 の positive block の arc と同一視される内部の辺を描いていく.

図 4 において, Def より B_1 が同一視される. a_1 の内点である \bar{a}_1 の周りの辺は a_1 が l タイプでも r タイプでも A_2B_2 が同一視される. v^- と a_1^+ の間に頂点がないので, v^+ と \bar{a}_1 をつなぐ辺の間 (B_1, A_2 の間) に頂点はない. 同様に, a_2 の内点である \bar{a}_2 の周りの辺は a_2 が l タイプでも r タイプでも A_3B_3 が同一視される. a_1^+ と a_2^+ の間に頂点がないので, \bar{a}_1 と \bar{a}_2 をつなぐ辺の間 (B_2, A_3 の間) に頂点はない. 以下, 同様に描いていく. \bar{x} の周りの辺は B_xC_x が同一視される. 上半分も同様に描いていくと, 図 5 のような graph が描ける. つまり, A^* と $\phi(u) = \phi(v) = \phi(x) = \phi(y) = l$ から図 5 の graph が描けることがわかる.

$V_1^+, V_2^+, V_3^+, V_4^+$ の各頂点の code は内部の graph を描くことにより決定することがわかる. つまり, S^1 上の頂点 w^+ と内部の頂点 \bar{z} がつながっているとき, 辺の向きが $w^+ \rightarrow \bar{z}$ ならば Def 1.3.(3) より w, z はともに l タイプ, $w^+ \leftarrow \bar{z}$ ならば Def 1.3.(3) より w, z はともに r タイプになる (orientable の case を考えているので定まる). 例えば, x^+ から出た芽が \bar{c}_1 とつながったとすると, c_1 は l タイプである. また, S^1 上の頂点 w^+ と z^+ がつながっているとき, 辺の向きが $w^+ \rightarrow z^+$ ならば w は l タイプで z は r タイプ, 逆ならば z は l タイプで w は r タイプ. 内点 \bar{w} と \bar{z} がつながっているとき, 辺の向きが $\bar{w} \rightarrow \bar{z}$ ならば w は r タイプで z は l タイプ, 逆ならば w は l タイプで z は r タイプ. S^1 の内部を描くことにより A^* の頂点に code が与えられ, formal E-data Δ^* になる.

Def 1.3(3) によると, x^+ から出た芽を描くということは, S^1 上の x^- から出ている negative block の arc の同一視を与えているということである. x^+ から出た芽が \bar{s}_1 (or t_1^+) とつながったとすると, S^1 上で, x^- の (S^1 の orientation に沿って) 次の頂点は s_1^- (t_1^-) が配置されることになる. 同様に, s_1^- (t_1^-) の次の頂点は s_1^+ (t_1^+) から出た芽を \bar{s}_2 (t_2^+) につなげることにより与えられ, s_2^- (t_2^-) が配置されることになる ($\bar{s}_i \in \{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4, \bar{y}\}, t_j^+ \in \{V_1^+, V_2^+, V_3^+, V_4^+\}$). negative block W_2^- は

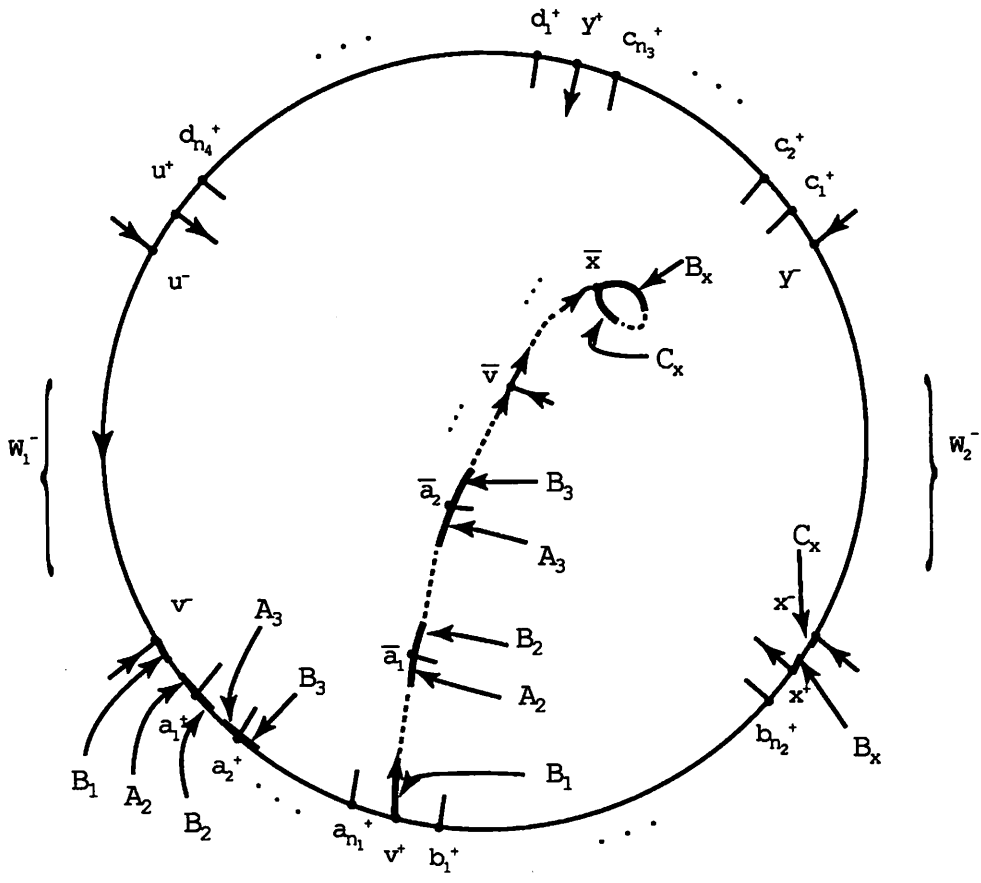


图 4:

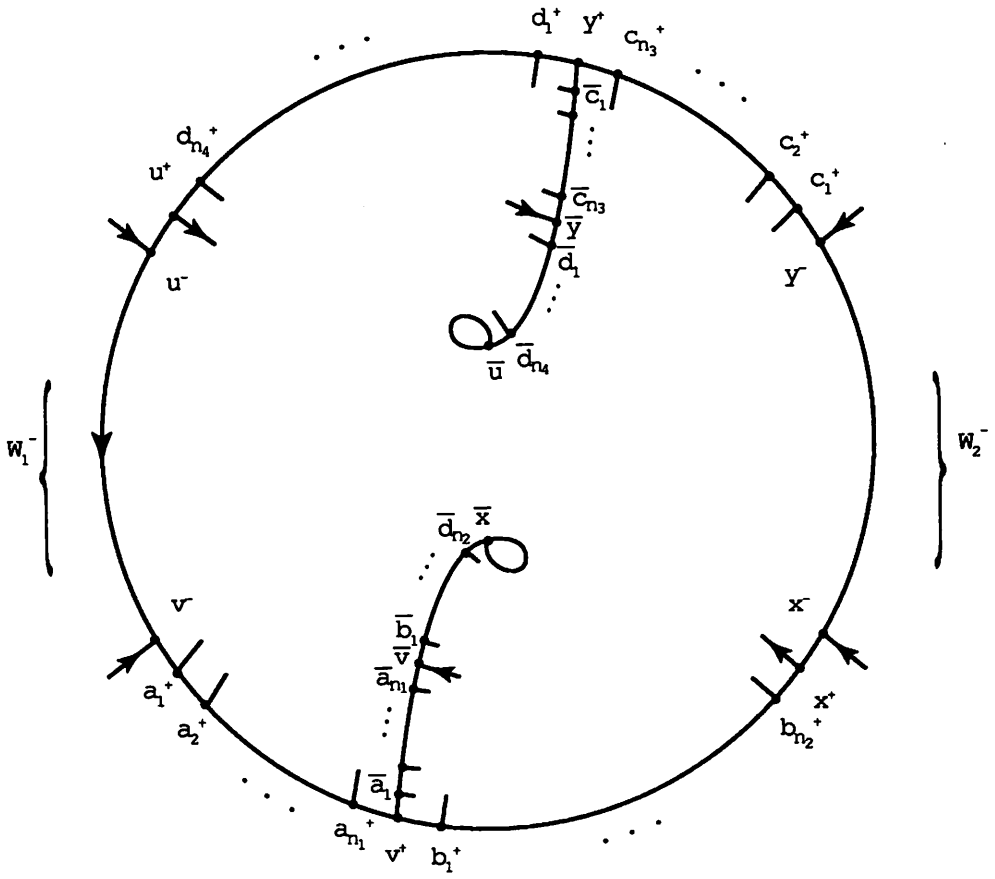


图 5:

[76]

x^- から始まり y^- で終わる. よって, x^+ から出た芽は,

$$x^+ \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots w_p \rightarrow \bar{y}$$

とつながっていき ($w_k \in \{\bar{s}_i, t_j^+\}$), W_2^- 上のマイナス頂点の配置の順番も

$$x^- \rightarrow w_1^- \rightarrow w_2^- \rightarrow \cdots w_p^- \rightarrow y^-$$

となることが分かる. u^+ から出た芽を描くということも同様で,

$$u^+ \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \cdots z_q \rightarrow \bar{v}$$

とつながっていき, W_1^- 上のマイナス頂点の配置の順番も

$$u^- \rightarrow z_1^- \rightarrow z_2^- \rightarrow \cdots z_q^- \rightarrow v^-$$

となることが分かる. $x^+ \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{y}$ の間に \bar{v} と u^+ が現れないことと, $u^+ \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{v}$ の間に \bar{y} と x^+ が現れないことは明らか.

なお、これから描くすべての graph において、次の図のような二角形が存在しないことは regular move により仮定されている。



図 6: 二角形

Definition 2.1.

E -data $\Delta = v^{-l} a_1^{+\delta_1^1} \dots a_{n_1}^{+\delta_{n_1}^1} v^{+l} b_1^{+\delta_1^2} \dots b_{n_2}^{+\delta_{n_2}^2} x^{+l} x^{-l} W_2^- y^{-l} c_1^{+\delta_1^3} \dots c_{n_3}^{+\delta_{n_3}^3} y^{+l} d_1^{+\delta_1^4} \dots d_{n_4}^{+\delta_{n_4}^4} u^{+l} u^{-l} W_1^-$
 $(\delta_j^i = l \text{ 又は } r, V_1 = \{a_1, \dots, a_{n_1}\} \quad V_2 = \{b_1, \dots, b_{n_2}\} \quad V_3 = \{c_1, \dots, c_{n_3}\} \quad V_4 = \{d_1, \dots, d_{n_4}\})$
 l, r は頂点のタイプを表す) が, **inner-realizable**

\iff

$V_1^+, V_2^+, V_3^+, V_4^+$ の各頂点の配置と, 各頂点のタイプに合致するように S^1 の内部に graph が描け, かつ, S^1 の *negative block* に V_1, V_2, V_3, V_4 のマイナスの頂点がすべて配置されていること.

Definition 2.2.

(n_1, n_2, n_3, n_4) が **inner-realizable**

\iff

$\#V_i = n_i$ で, V_i^+ の各頂点のタイプをうまく選ぶと, **inner-realizable** であるような E -data が一つは存在すること.

2.2 制限した class の分類

簡単のために $(0, 0, n_3, n_4)$ の場合を考え, 単に (n_3, n_4) と表すとする.

Proposition 2.1.

(n_3, n_4) ですべての頂点が l タイプ

\Rightarrow

graph が描けるならば, 図 7 の形のみ.

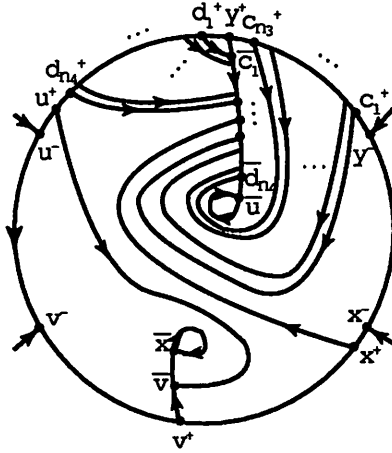


図 7:

Proposition 2.2.

(n_3, n_4) が inner-realizable

\Rightarrow

V_3, V_4 のすべての頂点は l タイプ.

prop 2.1, prop 2.2 により (n_3, n_4) が inner-realizable であれば描ける graph は prop 2.1 の図であることが分かる.

ここでは, (n_3, n_4) の class の分類を与える次の定理を証明する.

Theorem 2.1.

(n_3, n_4) が inner-realizable

\iff

V_3, V_4 のすべての頂点は l タイプで, $n_3 + 1$ と $n_4 + 1$ が互いに素である.

次の Lemma は直接的に Thm 2.1 の証明に用いないが, Thm 2.1 が正しいことを暗に示している.

Lemma 2.1.

$n_3 \neq 0$ 又は $n_4 \neq 0$ とする.

(n_3, n_4) が inner-realizable

\iff

V_3, V_4 のすべての頂点は l タイプで, $(n_4 + 1) - k(n_3 + 1) \equiv n_3 + 1 \pmod{n_3 + n_4 + 2}$

$0 \leq k \leq n_3 + n_4 - 1$ となる k が存在しない.

Cororally 1.

$n \neq 0$ のとき, (n, n) は inner-realizable ではない.

以下, Thm 2.1 の証明のためにいくつかの準備をする.

Lemma 2.2.

(n_3, n_4) が *inner-realizable*

\implies

(n_4, n_3) も *inner-realizable*.

Proposition 2.3.

V_4 のすべての頂点が l タイプならば, $(0, m)$ は *inner-realizable* ($0 \leq m, m \in \mathbb{Z}$).

Lemma 2.3.

(1) (n_3, n_4) が *inner-realizable*

\implies

$(n_3, n_4 + (n_3 + 1))$ も, 新たに加える頂点がすべて l タイプならば *inner-realizable*.

(2) $n_3 < n_4$ のとき,

(n_3, n_4) が *inner-realizable*

\implies

$(n_3, n_4 - (n_3 + 1))$ も *inner-realizable*.

Cororally 2.

(1) (n_3, n_4) が *inner-realizable*

\implies

$(n_3, n_4 + m(n_3 + 1))$ も, 新たに加える頂点がすべて l タイプならば *inner-realizable*.

(2) $n_3 < n_4$ のとき,

(n_3, n_4) が *inner-realizable*

\implies

$(n_3, n_4 - m(n_3 + 1))$ も *inner-realizable*. ただし, $n_4 - m(n_3 + 1) > n_3$ とする.

以上の準備の下, Thm 2.1 を証明する.

Proof.

ユークリッドの互除法を用いる.

$n_3 + 1 = N_3, n_4 + 1 = N_4$ とおく ($n_3, n_4 \geq 0$, よって $N_3, N_4 \geq 1$). $n_3 < n_4$ とする (大小はどちらでもかまわない).

N_4 を N_3 で割ったときの商を q_1 , 余りを r_1 とすると,

$$N_4 = N_3 q_1 + r_1 \text{ ただし, } 0 \leq r_1 < N_3.$$

次に, N_3 を r_1 で割ったときの商を q_2 , 余りを r_2 とすると,

$$N_3 = r_1 q_2 + r_2 \text{ ただし, } 0 \leq r_2 < r_1.$$

同様にしていくと,

$$r_{i-2} = r_{i-1} q_r + r_r \text{ ただし, } 0 \leq r_i < r_{i-1}.$$

このとき, 有限の第 p 回で $r_p = 0$ となり, そのときの r_{p-1} は N_3, N_4 の最大公約数である. $r_p = 0$ のとき, $(r_{p-1}, r_{p-1}) = (N'_3, N'_4)$ とする. これは, (N_3, N_4) において左右の大小が逆転するまで N_4 から N_3 を引いて, 左右の大小が逆転したら, 大きいほうから小さいほうを, 大小が逆転するまで引く \dots , を繰り返していき, 0 になる直前で止めたもの, と解釈できる.

N_3 と N_4 が互いに素ならば, $(N'_3, N'_4) = (1, 1)$ となり, N_3 と N_4 が互いに素でないならば, $(N'_3, N'_4) = (k, k)$ ($2 \leq k, k \in \mathbb{Z}$) となる. $(n'_3, n'_4) = (N'_3 - 1, N'_4 - 1)$ とする. N_3 と N_4 が互いに素ならば, $(n'_3, n'_4) = (0, 0)$ となり, N_3 と N_4 が互いに素でないならば, $(n'_3, n'_4) = (k - 1, k - 1)$ ($2 \leq k, k \in \mathbb{Z}$) である.

(\Leftarrow)

N_3 と N_4 が互いに素とする. このとき, $(N'_3, N'_4) = (1, 1), (n'_3, n'_4) = (0, 0)$ である. $(N'_3, N'_4 + mN'_3) = (1, 1 + m)$ を考えると, (n'_3, n'_4) の方では $(n'_3, n'_4 + m(n'_3 + 1)) = (0, m)$. V_3, V_4 のすべてが l タイプであるから, prop 6.3 より $(0, 0), (0, m)$ は inner-realizable. $(N'_3, N'_4 + mN'_3), (n'_3, n'_4 + m(n'_3 + 1))$ をあらためて $(N'_3, N''_4), (n'_3, n''_4)$ とし, 同様に, ユークリッドの互除法の操作をさかのぼっていく $(N_3^{(i)} + mN_4^{(i)}, N_4^{(i)})$ の場合もある. 有限の p 回の操作で $(N_3, N_4) = (N_3^{(i)}, N_4^{(j)})$ となり, このとき lemma 6.2 と cor 2.(1) により,

$$(n'_3, n'_4) \Rightarrow (n'_3, n''_4) \Rightarrow \dots \Rightarrow (n_3^{(i)}, n_4^{(j)})$$

のすべての段階で inner-realizable. よって, V_3, V_4 のすべてが l タイプで N_3, N_4 が互いに素ならば (n_3, n_4) は inner-realizable. 実際,

$$(n_3^{(i)}, n_4^{(j)}) = (\dots ((((r_{p-1} q_p) q_{p-1} + r_{p-1}) q_{p-2} + r_{p-2}) \dots) q_2 + r_2 - 1, (\dots ((((r_{p-1} q_p) q_{p-1} + r_{p-1}) q_{p-2} + r_{p-2}) \dots) q_2 + r_2) q_1 + r_1 - 1)$$

である.

(\Rightarrow)

対偶を示す.

V_3, V_4 のすべての頂点が l タイプでないとき, prop 6.2 より, (n_3, n_4) は inner-realizable ではない. N_3, N_4 が互いに素でないとき, $(N'_3, N'_4) = (k, k)$ ($2 \leq k$) であり, $(n'_3, n'_4) = (k - 1, k - 1)$ である. $k - 1 = l$ ($1 \leq l$) とすると, cor 1 より (l, l) は inner-realizable ではない. よって, cor 2.(2) の対偶より, $(l, l + m(l + 1))$ も inner-realizable ではない. 有限の p 回の操作で $(N_3, N_4) = (N_3^{(s)}, N_4^{(t)})$ となるが, このとき lemma 6.2 と cor 2.(2) の対偶により,

$$(n'_3, n'_4) \Rightarrow (n'_3, n''_4) \Rightarrow \dots \Rightarrow (n_3^{(s)}, n_4^{(t)})$$

のすべての段階で inner-realizable ではない。よって N_3, N_4 が互いに素でないならば, $(n_3, n_4) = (n_3^{(s)}, n_4^{(t)})$ は inner-realizable ではない。

□

(n_3, n_4) が inner-realizable で, S^1 の外側の graph が描けるならば, その E-data は realizable である。よって, 厳密に realizability を考えるときは inner-realizable であるだけでは十分ではない。しかし (n_3, n_4) の class では, inner-realizable であるかを考えるだけでよいことを次の Lemma が示している。

Lemma 2.4.

(n_3, n_4) が inner-realizable

⇒

V_3, V_4 はすべて l タイプで, 一意に S^1 の外側の graph が描ける。

2.3 制限した class の例

(n_3, n_4) の class の具体例を紹介する。

2.3.1 例 1

$(5, 0)$ を考える。

図8は $(5, 0)$ の positive block と内点の頂点の並びである。Prop 2.3 より, $(5, 0)$ は inner-realizable。よって V_3, V_4 のすべては l タイプであり, 一意に内側の graph が描ける。実際,

$$\begin{aligned} x^+ &\rightarrow \bar{c}_1 \\ c_1^+ &\rightarrow \bar{c}_2 \\ c_2^+ &\rightarrow \bar{c}_3 \\ c_3^+ &\rightarrow \bar{c}_4 \\ c_5^+ &\rightarrow \bar{y} \end{aligned}$$

とつなげると内側の graph が描け, negative block に V_3^-, V_4^- のすべての頂点が配置されている (u^+ は \bar{v} とつなげる)。さらに Lemma 2.4 より, 外側の graph も描ける (図 9)。

よって, E-data

$$\Delta_1 = v^{-l} v^{+l} x^{-l} x^{+l} c_1^{-l} c_2^{-l} c_3^{-l} c_4^{-l} c_5^{-l} y^{-l} c_1^{+l} c_2^{+l} c_3^{+l} c_4^{+l} c_5^{+l} y^{+l} u^{+l} u^{-}$$

が realizable であることが分かる。

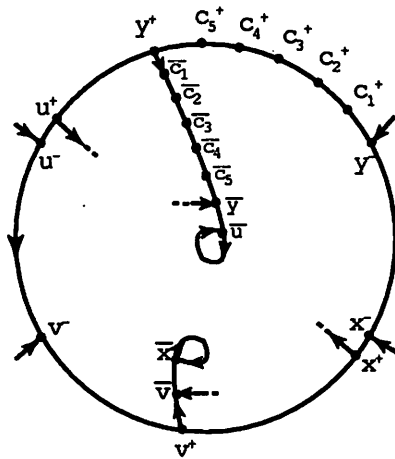


図 8: $(5, 0)$ の positive block と内側の頂点

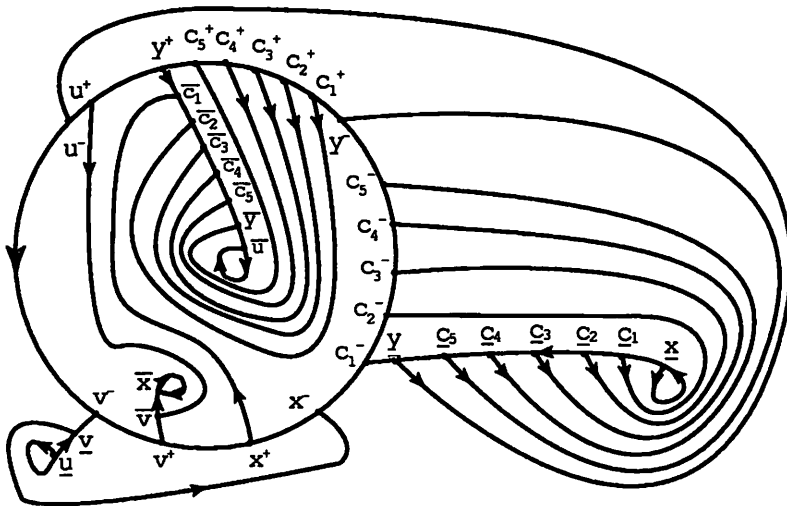


図 9: $(5, 0)$ の graph

2.3.2 例2

(3,4) を考える.

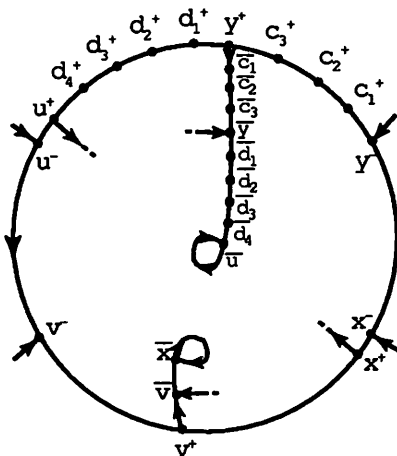


図 10: (3,4) の positive block と内側の頂点

図 10 は (3,4) の positive block と内点の頂点の並びである. Thm 2.1 より, (3,4) は inner-realizable. よって V_3, V_4 のすべては l タイプであり, 一意に内部の graph が描ける. 実際,

$$\begin{aligned}
 x^+ &\rightarrow \overline{d_1} \\
 d_1^+ &\rightarrow \overline{c_1} \\
 c_1^+ &\rightarrow \overline{d_2} \\
 d_2^+ &\rightarrow \overline{c_2} \\
 c_2^+ &\rightarrow \overline{d_3} \\
 d_3^+ &\rightarrow \overline{c_3} \\
 c_3^+ &\rightarrow \overline{d_4} \\
 d_4^+ &\rightarrow \overline{y}
 \end{aligned}$$

とつなげると内側の graph が描け, negative block に V_3^-, V_4^- のすべての頂点が配置されている (u^+ は \bar{v} とつなげる). さらに Lemma 2.4 より, 外側の graph も描ける (図 11).

よって, E-data

$$\Delta_2 = v^{-l} v^{+l} x^{+l} x^{-l} d_1^{-l} c_1^{-l} d_2^{-l} c_2^{-l} d_3^{-l} c_3^{-l} d_4^{-l} y^{-l} c_1^{+l} c_2^{+l} c_3^{+l} y^{+l} d_1^{+l} d_2^{+l} d_3^{+l} d_4^{+l} u^{+l} u^{-}$$

が realizable であることが分かる.

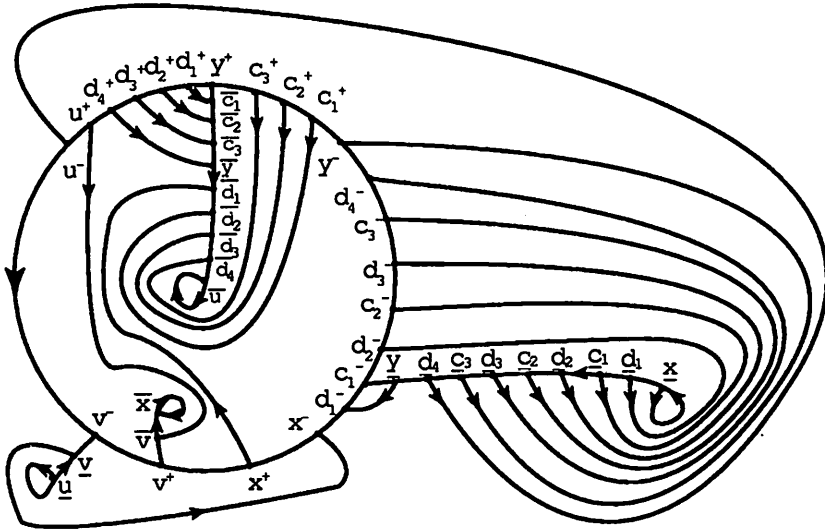


図 11: (3, 4) の graph

2.4 一般の class の分類

次に、一般の (n_1, n_2, n_3, n_4) の class を考える。

(n_1, n_2, n_3, n_4) において $(n_1, n_2, 0, 0), (0, 0, n_3, n_4)$ が inner-realizable のとき、 (n_1, n_2, n_3, n_4) を $((\circ), (\circ))$ タイプ、 $(n_1, n_2, 0, 0), (0, 0, n_3, n_4)$ が inner-realizable でないとき $((\times), (\times))$ タイプと呼ぶことにする (片方が inner-realizable でもう片方が inner-realizable でないときは $((\circ), (\times))$ タイプ又は $((\times), (\circ))$ タイプと呼ぶ)。

Theorem 2.2.

$((\circ), (\circ))$ タイプですべての頂点が l タイプのとき、一つの set (n_1, n_2, n_3, n_4) に対し、図 12 (1) のタイプの graph は必ず描け、inner-realizable. また、 $n_1 \neq 0$ かつ $n_3 \neq 0$ ならば図 12 (2) のタイプの graph も描け、inner-realizable.

Lemma 2.5.

$((\circ), (\circ))$ タイプで図 12 (1), (2) のタイプは一意に S^1 の外側も描ける。

$((\circ), (\circ))$ タイプであっても図 12 (1), (2) のタイプ以外にも graph が描ける例があり、また、 r タイプも混じっている inner-realizable な例もある。さらに、 $((\circ), (\times))$ $((\times), (\circ))$ タイプですべて l タイプで inner-realizable な例、 r タイプも混じっている inner-realizable な例もあり、一般の class はまだ厳密に分類できていない。なお、 $((\circ), (\circ)), ((\circ), (\times))$ $((\times), (\circ))$ タイプでは、inner-realizable で外側が描けない例は見つかっていないが、 $((\times), (\times))$ では inner-realizable で外側も描ける、つまり、E-data が realizable である例は見つかっていない。

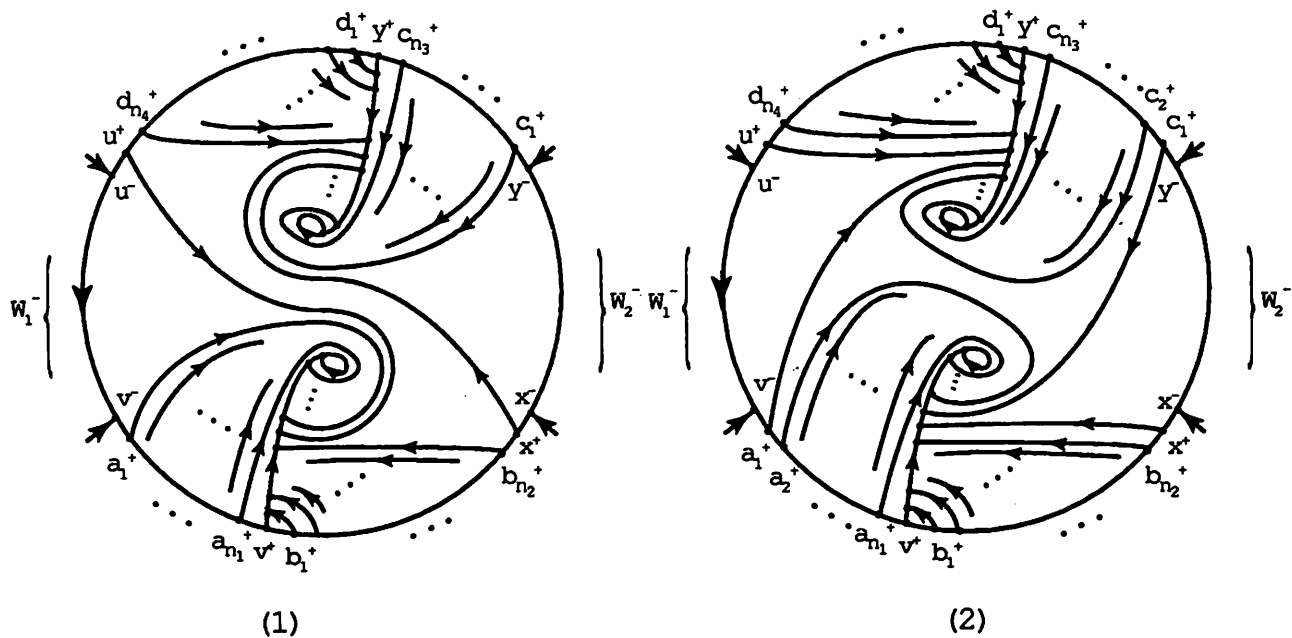


図 12:

2.5 一般の class の例

(n_1, n_2, n_3, n_4) の class の具体例を紹介する.

2.5.1 例 3

$((\circ), (\circ))$ タイプである, $(3, 4, 2, 3)$ を考える.

図 13 は $(3, 4, 2, 3)$ の positive block と内点の頂点の並びである. $(3, 4)$ と $(2, 3)$ はともに inner-realizable なので, Thm 2.2, Lemma 2.5 より V_1, V_2, V_3, V_4 のすべては l タイプであり, 図 12 の (1) のタイプが描ける (図 14).

さらに, $n_1 \neq 0, n_3 \neq 0$ なので, 図 12 の (2) のタイプも描ける (図 15)

よって, E-data

$$\Delta_3 = v^{-l} a_1^{+l} a_2^{+l} a_3^{+l} v^{+l} b_1^{+l} b_2^{+l} b_3^{+l} b_4^{+l} x^{+l} x^{-l} d_1^{-l} c_1^{-l} d_2^{-l} c_2^{-l} d_3^{-l} y^{-l} c_1^{+l} c_2^{+l} y^{+l} d_1^{+l} d_2^{+l} d_3^{+l} u^{+l} u^{-l} b_1^{-l} a_1^{-l} b_2^{-l} a_2^{-l} b_3^{-l} a_3^{-l} b_4^{-l}$$

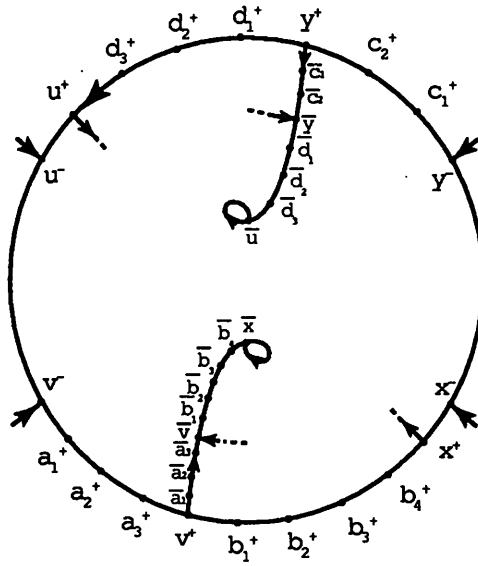


図 13: (3, 4, 2, 3) の positive block と内側の頂点

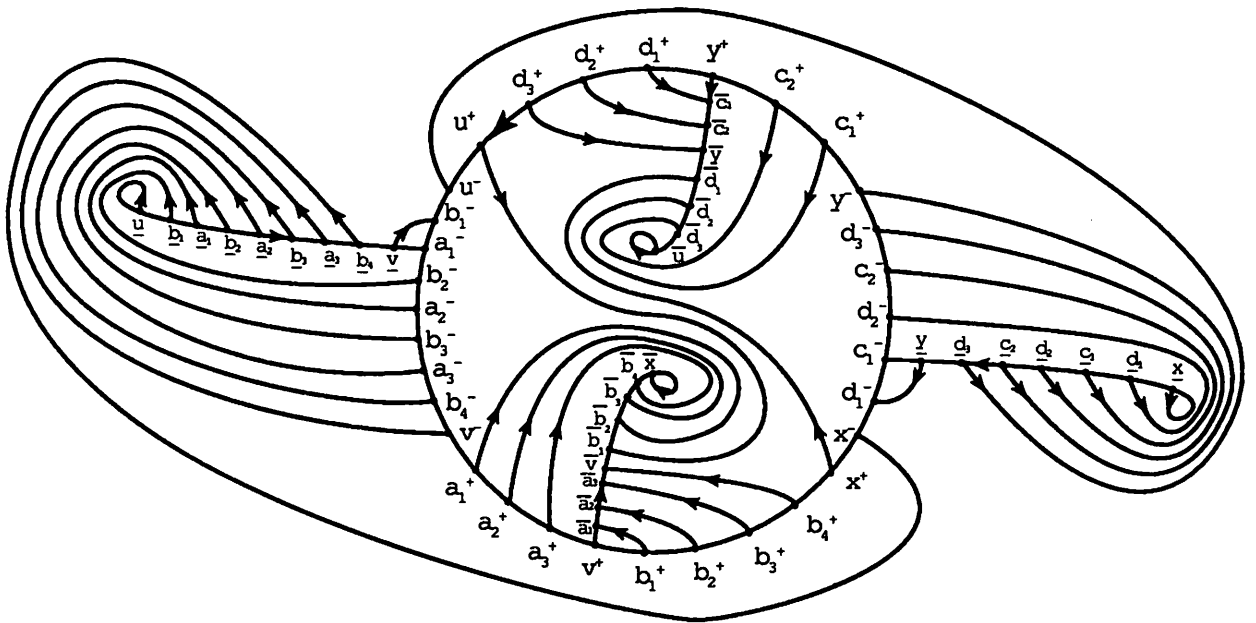


図 14: 図 12 の (1) のタイプの (3, 4, 2, 3) の graph

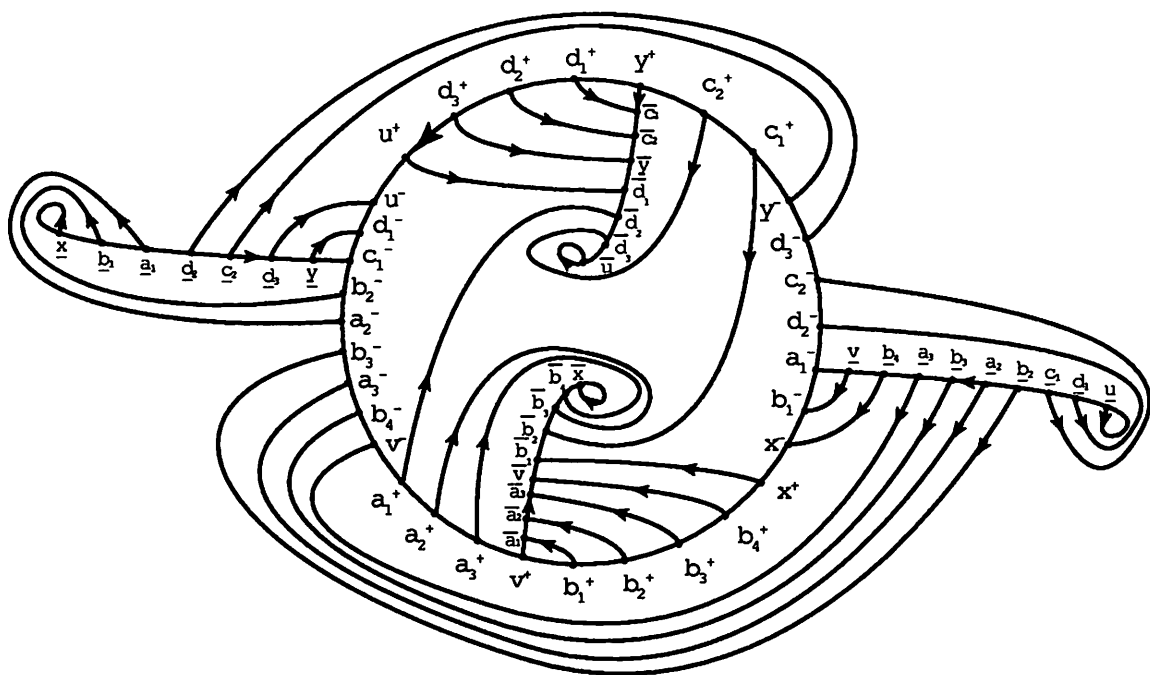


図 15: 図 12 の (2) のタイプの (3, 4, 2, 3) の graph

と,

$$\Delta_4 = v^{-l} a_1^{+l} a_2^{+l} a_3^{+l} v^{+l} b_1^{+l} b_2^{+l} b_3^{+l} b_4^{+l} x^{+l} x^{-l} b_1^{-l} a_1^{-l} d_2^{-l} c_2^{-l} d_3^{-l} y^{-l} c_1^{+l} c_2^{+l} y^{+l} d_1^{+l} d_2^{+l} d_3^{+l} u^{+l} u^{-l} d_1^{-l} c_1^{-l} b_2^{-l} a_2^{-l} b_3^{-l} a_3^{-l} b_4^{-l}$$

が realizable であることが分かる。

2.5.2 例4

例3まではすべて*l*タイプであったが、((○),(○))タイプで、すべて*l*タイプでないように graph を描けるときもある。

(2,4,3,6) は((○),(○))タイプなので、図12の(1),(2)の二つのタイプの graph は描くことができるが、図16のような graph も描くことができる。

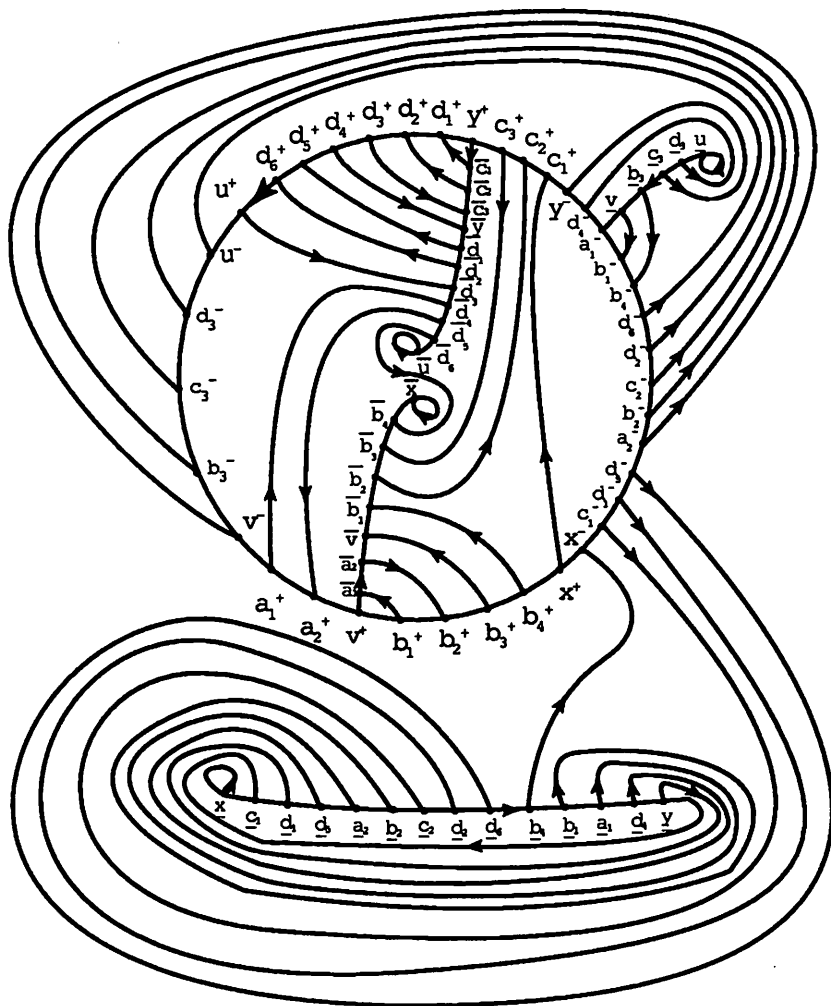


図16: *r*タイプが混ざる例

図16において、 $x, u, v, y, a_1, b_1, b_3, b_4, c_3, d_3, d_4$ は *l*タイプ、 $a_2, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, d_5, d_6$ は *r*タイプで、E-data

$$\Delta_5 = v^{-l} a_1^{+l} a_2^{+r} v^{+l} b_1^{+l} b_2^{+r} b_3^{+l} b_4^{+l} x^{+l} x^{-l} c_1^{-r} d_1^{-r} d_5^{-r} a_2^{-r} b_2^{-r} c_2^{-r} d_2^{-r} d_6^{-r} b_4^{-l} b_1^{-l} a_1^{-l} d_4^{-l} y^{-l} \\ c_1^{+r} c_2^{+r} c_3^{+l} y^{+l} d_1^{+r} d_2^{+r} d_3^{+l} d_4^{+l} d_5^{+r} d_6^{+r} u^{+l} u^{-l} d_3^{-l} c_3^{-l} b_3^{-l}$$

は realizable.

2.5.3 例5

(2, 3, 1, 5) を考える. これは, ((○), (×)) タイプである. (2, 3, 1, 5) では図 17 のような graph が描ける.

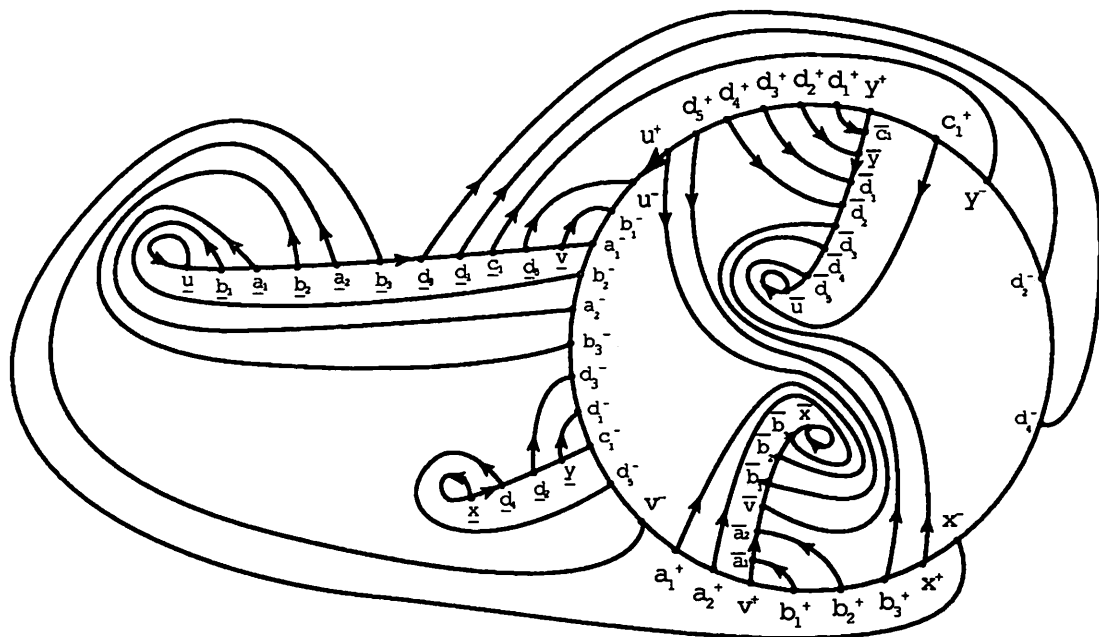


図 17: (2, 3, 1, 5)

よって,

$$\Delta_6 = v^{-l} a_1^{+l} a_2^{+l} v^{+l} b_1^{+l} b_2^{+l} b_3^{+l} b_4^{+l} x^{+l} x^{-l} d_4^{-l} d_2^{-l} y^{-l} c_1^{+l} y^{+l} d_1^{+l} d_2^{+l} d_3^{+l} d_4^{+l} d_5^{+l} u^{+l} \\ u^{-l} b_1^{-l} a_1^{-l} b_2^{-l} a_2^{-l} b_3^{-l} d_3^{-l} d_1^{-l} c_1^{-l} d_5^{-l}$$

は realizable である.

2.5.4 例6

例5 ではすべて l タイプであったが, ((○), (×)) タイプで, すべて l タイプでないように graph を描けるときのもある.

よって,

$$\Delta_7 = v^{-l} a_1^{+r} a_2^{+r} v^{+l} b_1^{+r} b_2^{+r} b_3^{+l} b_4^{+r} x^{+l} x^{-l} d_2^{-l} c_2^{-l} d_4^{-l} y^{-l} c_1^{+l} c_2^{+l} c_3^{+l} y^{+l} d_1^{+l} d_2^{+l} d_3^{+l} d_4^{+l} d_5^{+l} u^{+l} \\ u^{-l} a_1^{-r} b_1^{-r} b_4^{-r} a_2^{-r} b_2^{-r} d_1^{-l} c_1^{-l} d_3^{-l} c_3^{-l} d_5^{-l} b_3^{-l}$$

は realizable である.

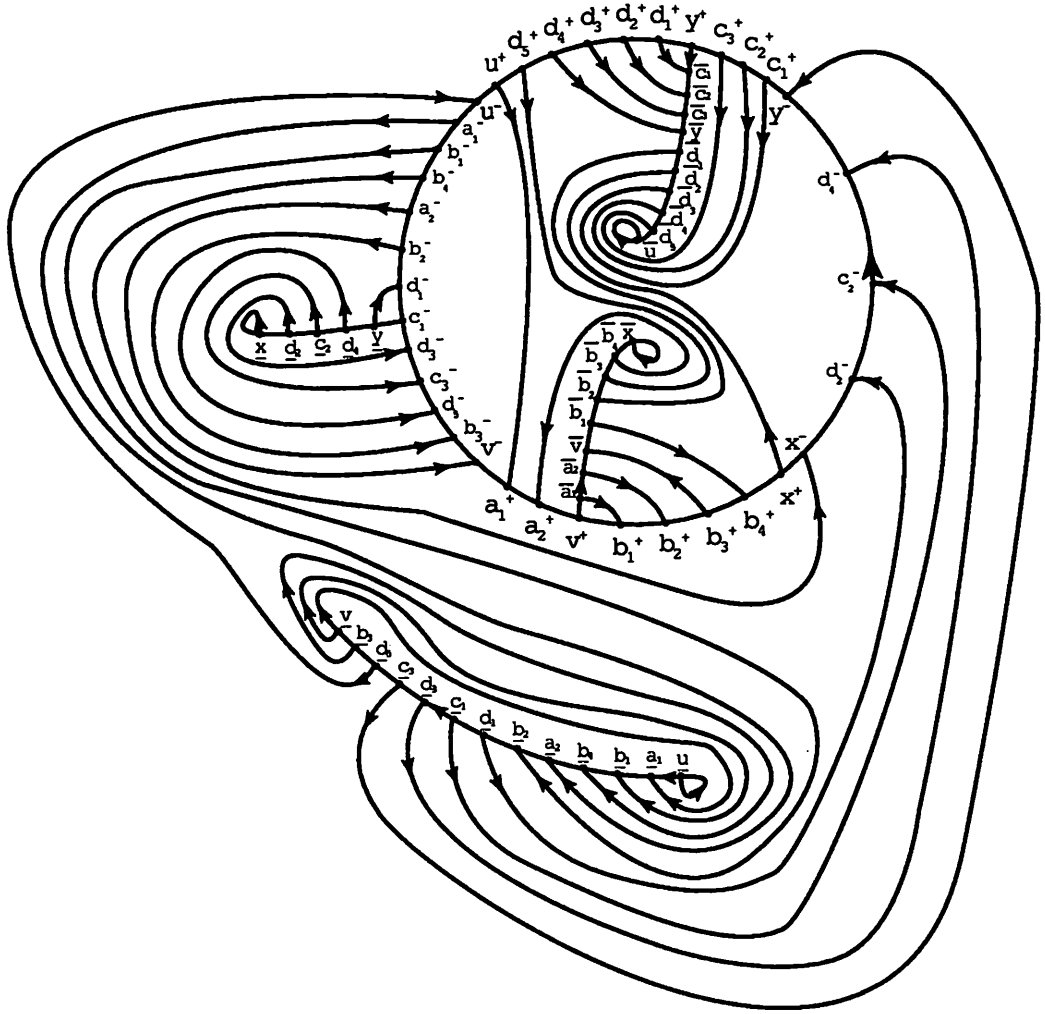


图 18: (2, 4, 3, 5)

例 7

最後に, $(1, 5, 3, 5)$ を考える. これは $((\times), (\times))$ タイプである. 図 19 のように内側の graph を描くと $(1, 5, 3, 5)$ は inner-realizable. しかし, a_1^- から出た芽は v^- に入っていない. よって, どのように描いても, 各頂点のタイプに合致するように外側の graph は描けない. $((\times), (\times))$ タイプでは, inner-realizable で外側が描ける例は見つかっていない ($u, v, x, y, b_2, b_4, c_2, d_2, d_4$ が l タイプ, $a_1, b_1, b_3, b_5, c_1, c_3, d_1, d_3, d_5$ が r タイプ).

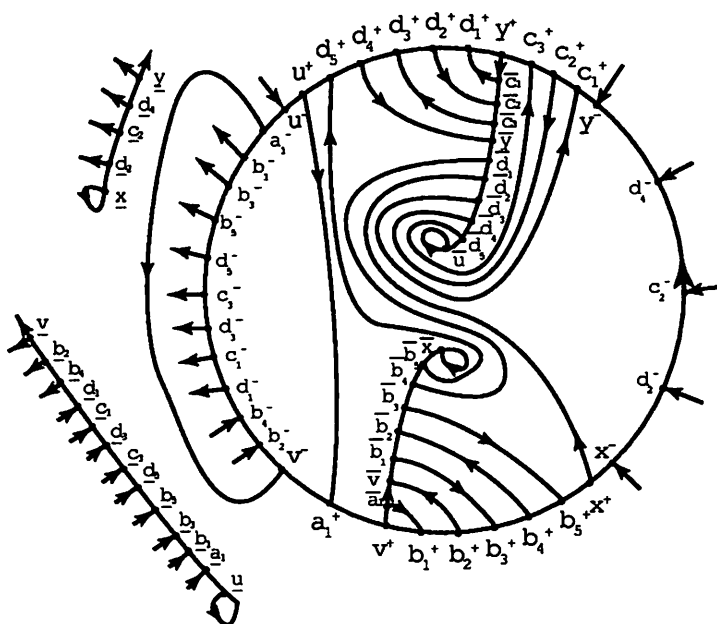


図 19:

3 realizable E-data の実現する manifold の考察

レンズ空間の連結和 $L_{(p,q)} \# L_{(p',q')}$ の Heegaard diagram から E-cycle 付きの DS-diagram を求めると, 図 20 のようになる (ここでは変形は省略する).

図 20 のすべての頂点は l タイプである. よって図 20 は, 図 12 の (1) のタイプと (頂点のラベルを付け替えれば) 同じ graph である. よって (n_1, n_2, n_3, n_4) において図 12 の (1) のタイプが描けているとき, realizable E-data はレンズ空間の連結和を実現していることが分かる. 実際, 実現している 3-manifold は $L_{(n_1+n_2+2, n_2+1)} \# L_{(n_3+n_4+2, n_4+1)}$ である. また, (n_3, n_4) は $L_{(2,1)} \# L_{(n_3+n_4+2, n_4+1)}$ である.

よって, Δ_1 は $L_{(2,1)} \# L_{(7,1)}$, Δ_2 は $L_{(2,1)} \# L_{(9,5)}$, Δ_3 は $L_{(9,5)} \# L_{(7,4)}$ の DS-diagram である. Δ_4 に

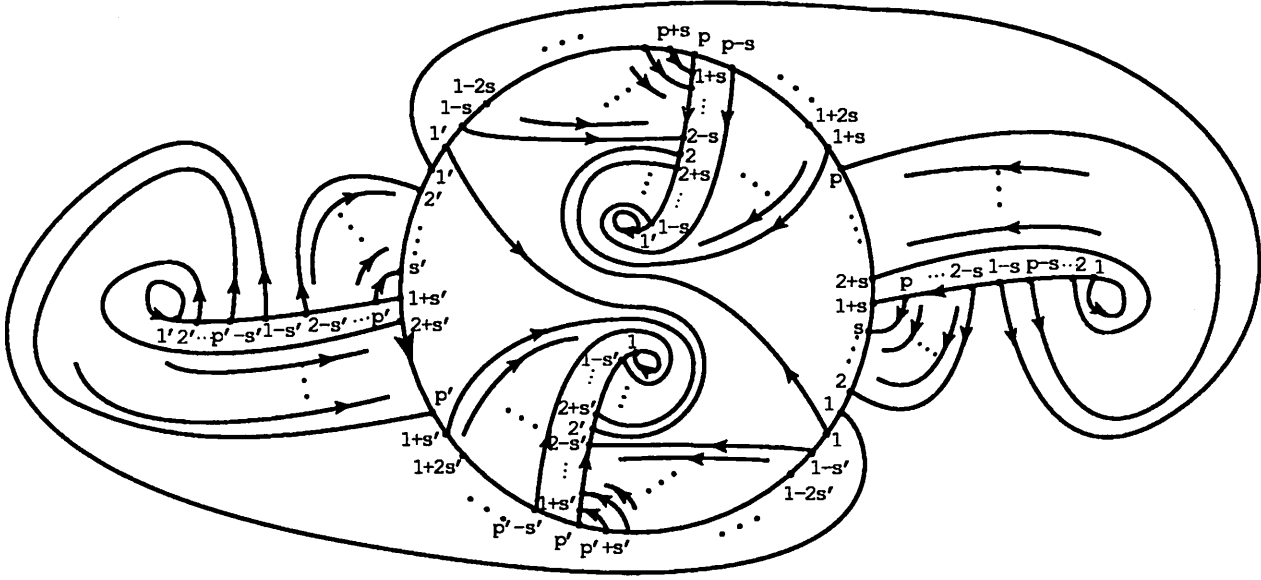


図 20: $L_{(p,q)} \# L_{(p',q')}$ の E-cycle 付きの DS-diagram

については基本群 π_1 が \mathbb{Z}_{31} であることが分かっているので、レンズ空間の連結和ではない。 $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ についてはどのような 3-manifold を実現しているか分かっていない。つまり、

- ((O), (O)) タイプで図 12 の (1) 以外のタイプの E-data,
- ((O), (O)) タイプで r タイプが混じる E-data,
- ((O), (x)) タイプですべて l タイプのときの E-data,
- ((O), (x)) タイプで r タイプが混じる E-data,

の実現する 3-manifold は分かっていない。なお、先述のとおり ((x), (x)) タイプで realizable な E-data はまだみつかっていない。