

# Möbius Ladders in Projective-Planar Graphs

横浜国立大学教育学部 根上生也

## 1. Möbius Ladderとは

Möbius ladder (メビウスの梯子) とは、長さが  $2n$  の閉路の真向いにある頂点の組を辺で結んで得られるグラフである。その向い合わせの頂点の組を結んでい  
る辺を spoke と呼び、その本数  $n$  に応じて、Möbius ladder を  $O_n$  で表す。また、 $O_n$  の周囲の閉路の部分をも  $\partial O_n$  で表す。この  $O_n$  をメビウスの帯に埋め込むと、 $\partial O_n$  の部分がメビウスの帯の境界と平行な位置におかれ、spoke は梯子段のよ  
うに配置されて、Möbius ladder の名にふさわしい形になる。

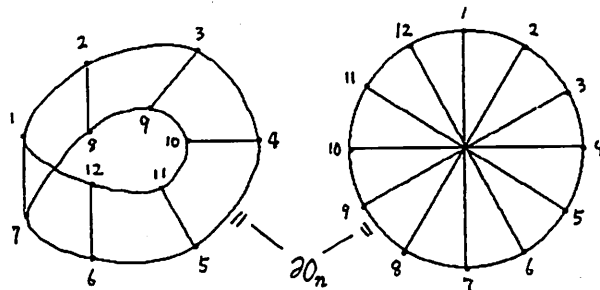


図1. Möbius ladder  $O_n$

そのメビウスの帯の境界に沿って円板を縫いつけると、 $O_n$  の射影平面への埋め込みが得られる。射影平面を円板の周囲の対心点どうしを同一視したものとして表現すれば、その  $O_n$  の埋め込みは図2の左のようになる。その状態から梯子段を1本だけ外に出して、それとは異なる埋め込み(図2右)を作ることができるが、その1本が邪魔をして、他の梯子段をさらに外に出すことは不可能である。

補題1 (Möbius Ladder Lemma)  $n \geq 4$  のとき、 $O_n$  を射影平面にどのように埋め込んでも、 $\partial O_n$  は自明な閉路になる。

この補題により、 $n \geq 4$  のときの  $O_n$  のどんな埋め込みも図2に示されたいずれかのタイプになることがわかる。というのは、射影平面内の自明な閉路(単純

閉曲線) はいつでもメビウスの帯の境界になっていて, どんなメビウスの帯も射影平面上のアンビエント・アイソトピーで重ねることができるからである。したがって,  $\partial O_n$  の部分はいつも垂直に立ったように埋め込まれているとしてよい。後は, 梯子段がどのように配置されるかを考えるだけである。

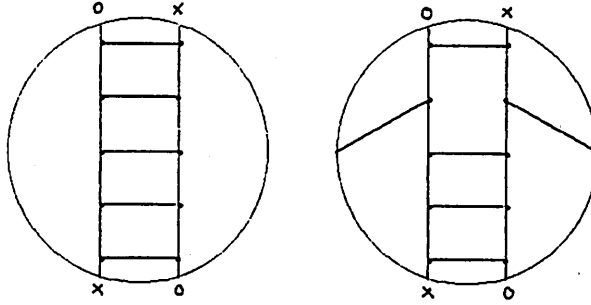


図 2. 射影平面内の Möbius ladder

ところが,  $n = 3$  のときは,  $\partial O_n$  が  $O_n$  の中で特定できなくなるので, 例外的に事情が変わってくる。実際,  $O_3$  は  $K_{3,3}$  と同型なので,  $K_{3,3}$  内のどの長さ 6 の閉路も  $\partial O_3$  の部分だと思えることができってしまう。そのため, 梯子段が外に出た埋め込みと出ない埋め込みが, “ある意味” で同じ埋め込みになってしまう。例えば, 図 3 右の埋め込みにおいて, 123654 を  $\partial O_3$  の部分だと思えることにすると, それを射影平面上のアンビエント・アイソトピーで左の埋め込みに重ねることができる。

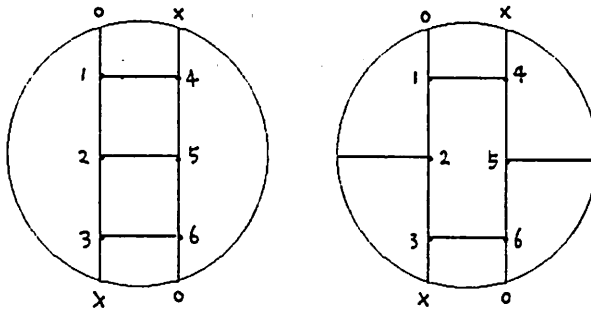


図 3.  $O_3$  の埋め込み

その “ある意味” の意味は次節で説明するが, 頂点に付けられたラベルを無視すれば,  $O_3$  のどんな埋め込みも図 4 の  $K_{3,3}$  の標準的な埋め込みと同じものに

なってしまう。つまり、その意味で  $n \geq 4$  のときには  $O_n$  は 2 つの埋め込みを持つが、 $O_3$  は 1 つの埋め込みしか持たないことになる。

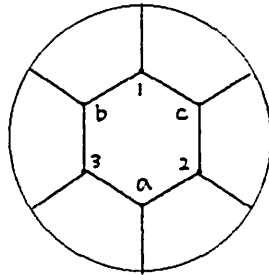


図 4.  $K_{3,3}$  の標準的な埋め込み

## 2. 埋め込みの同値類

$G$  をグラフ、 $X$  を位相空間（ここでは閉曲面と思えばよい）、 $f, g: G \rightarrow X$  を 2 つの埋め込みとする。埋め込みの個数を数えるために、グラフの埋め込みの間の同値関係を以下のように定義する。

- (i)  $f \approx g \Leftrightarrow$  同相写像  $h: X \rightarrow X$  で  $h f = g$  となるものが存在する。
- (ii)  $f \sim g \Leftrightarrow$  同相写像  $h: X \rightarrow X$  と自己同型写像  $\sigma: G \rightarrow G$  で  $h f = g \sigma$  となるものが存在する。
- (iii)  $f \dots g \Leftrightarrow$  同相写像  $h: X \rightarrow X$  で  $h(f(G)) = g(G)$  となるものが存在する。

(i) はトポロジーで通常用いられるものなので、単に同値 (equivalent) ということにする。一方、(ii) の同値関係は、見た目が同じ埋め込みは同じという意味である。例えば、図 3 の 2 つの埋め込みは (i) の意味では同値にはならない。なぜなら、123654 は左では領域の境界になっていないが、右では 6 辺形の境界になっているので、同じ番号の頂点が重なるようには連続的に変形できないからである。ところが、123456 を 123654 になるようにラベルを調整してしまえば、左と右の埋め込みを重ね合わせることができるので、(ii) の意味では同値になる。そのラベルの調整役をつとめるのが (ii) における  $\sigma$  である。

(60)

私自身は(ii)の同値関係の産みの親でもあるので、それを“同値”と呼びたかったのだが、東工大大学院生の北久保君と毎週 (weekly) 議論を重ねているうちに、(ii)を弱同値 (weakly equivalent) と呼ぶ方がよいということになってしまった。

(iii) は結び目理論等で使われることが多いが、グラフを扱う上ではあまり有用ではない。というのは、単に像が重なるだけだと、頂点の位置が完全に無視されてしまうからである。ただし、次数2の頂点を持たないグラフに対しては(ii)と(iii)の条件は同値なものになってしまう。そういうこともあるので、(iii)には名前を付けない。

グラフ  $G$  の  $X$  への埋め込み全体を  $\text{emb}(G, X)$  で表し、上の同値関係のもとでその同値類の個数を数えてみよう。ただし、ここでは  $X = P^2$  (射影平面) である。

$G$	$K_6$	$K_{3,3}$	$O_n$	$C_m^2 (m:\text{odd})$
$\approx$	12	6	$n+1$	$2m+1$
$\sim$	1	1	2	3

表1. 射影平面上の埋め込みの個数

まず、 $K_6$  の埋め込みはすべて図5の埋め込みと弱同値になるので、弱同値類 ( $\sim$ ) は1つしかない。ラベルに注意すると、123 が自明でない閉路 (周囲の六角形) になるか自明な閉路 (内部の三角形) になるかに応じて、abc のラベルの付け方が6通りずつあるので、同値類 ( $\approx$ ) の個数は12となる。

前節で述べたように、 $K_{3,3}$  のすべての埋め込みは図4の埋め込みと弱同値になる。123 のラベルの置換は射影平面上のアンビエント・アイソトピーで実現できるので、図にあるように固定してよく、abc のラベルの置き方に対応して、唯一の弱同値類が6個の同値類に分離する。

Möbius ladder  $O_n$  ( $n \geq 4$ ) の弱同値類も、前節で見たように、梯子段が1本だけ外に出たものと出ないものの2つしかない。ラベルも注意して数えると、 $n$ 本のどの梯子段が出るかの  $n$  個とオリジナルの1個を合わせた  $n+1$  個の同値

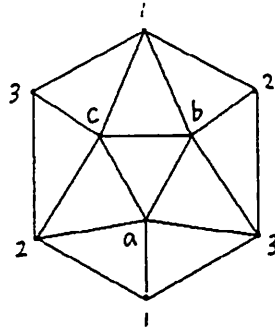


図5. 射影平面に埋め込まれた  $K_6$ .

類が存在する。

$C_m^2$  は長さ  $m$  の閉路  $C_m$  の自乗と呼ばれ、 $C_m$  上で距離が 2 以下の頂点の組をすべて辺で結んで得られるグラフである。その表記法はともかく、 $m$  が奇数 (odd) のときは、メビウスの帯の中でジグザグが完結するので、図 6 左のような射影平面内の埋め込みが作れる。それをオリジナルと考え、そのジグザグの 1 本の辺が外に出るか、 $V$  になった 2 辺が出るかのバリエーションが作れる。それぞれ  $m$  通りの出方があるので、オリジナルと合わせて  $2m+1$  個の同値類が存在する。

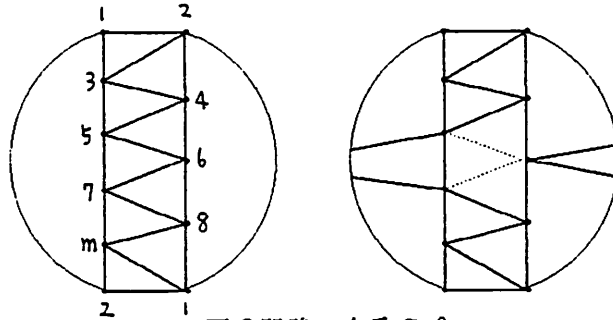


図6 閉路の自乗  $C_m^2$

私の学位論文の中では、弱同値類の個数が 1 であるグラフにスポットを当てて一連の議論を展開したが、当時の感触では埋め込みの総数をきれいな理論に乗せることは困難なように思われた。実際、上の例でわかるように、埋め込みの同値類の個数はグラフの形状に応じていろいろな値になる。

ところが、最近、射影平面的グラフの埋め込みのバリエーションは、上で見たような梯子段の投げ出し・投げ入れによる Möbius ladder の埋め込みの変化と似

(62)

たような形でしか起こらないことがわかってきた。以下で示すように、埋め込みの同値類の個数は、そのグラフが含んでいるある種の Möbius ladder の埋め込みの変化を見ることで数えられるのである。

### 3. 埋め込みの総数の評価

ここで、グラフの射影平面への埋め込みの総数に関して知られている事実を紹介しておこう。グラフが2頂点からなる切断集合を随所に持つと、その2頂点を固定した局所的な裏返しで同値でない埋め込みをたくさん生成できてしまうので、埋め込みの個数を議論するときは3-連結グラフに制限した方がよい。(注: 平面グラフの埋め込みはそのような裏返しのみで生成できるので、3-連結平面的グラフの球面への埋め込みの同値類はただ1つしか存在しない。)

定理2 (S.Negami[N1])  $G$  を3-連結非平面的グラフとすると、 $G$  の射影平面への埋め込みの弱同値類の個数  $| \text{emb}(G, P^2) / \sim |$  は、 $G$  の平面的な2重被覆グラフの同型類の個数に一致する。

この定理の証明を素直に追いかけていくと、埋め込みの同値類の個数と平面的2重被覆グラフの適当な同値類の個数が一致することが示される。その事実はたいへんきれいだが、平面的な2重被覆グラフの個数がうまく評価できないので、埋め込みの同値類の個数を評価するにはあまり有効でない。2重被覆グラフの個数は  $H_1(G, Z_2)$  の元の個数と等しいので、 $2^{\beta(G)}$  である。オイラーの公式を用いてベッチ数  $\beta(G)$  を評価すると次の不等式を得るが、後で見るように実際にはもっと小さな上界が存在する。

$$| \text{emb}(G, P^2) / \sim | \leq 2^{\beta(G)} \leq 4^{|V(G)| - 1}$$

何も条件を付けなければ、グラフが大きくなるにつれて、埋め込みの個数は指数関数的に増加してしまうが、連結度を高くすると埋め込みの総数が減るという傾向もある。次の定理では、4-連結を仮定すれば埋め込みの同値類は頂点数に比例して増加することを示している。

定理3 (D.Lichtenstein[Li])  $G$ が4-連結射影平面的グラフならば,

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| \sim O(|V(G)|)$$

上の定理は[Li]の中でアナウンスされているだけなので, そのまま信じてよいとも思えないが, 後述の議論を用いれば, その比例定数まで完全に決定できる.

定理4 (S.Kitakubo[Ki])  $G$ が5-連結射影平面的グラフならば,

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| \sim O(1)$$

もちろん, どんなグラフの埋め込みの同値類も有限個しか存在しない. しかし, その値は一般にはグラフに応じて異なるので, 何の条件も付けなければ, 埋め込みの個数が任意に大きな値になるグラフが存在する. ところが, 上の定理では, 5-連結グラフに制限すると, グラフがどんなに大きくなろうとも, 越えることのできない値が存在することを意味している. より具体的には, 5-連結グラフの射影平面への埋め込みの同値類数は36を越えないことがわかっている.

グラフを閉曲面の三角形分割に制限すると, かなり精密な議論ができる. 例えば, ソ連のS.A.Lavrenchenkoは近年, 射影平面とトーラスの三角形分割を精力的に研究しており, 射影平面の三角形分割の埋め込みの個数に関して, 次のような非常に具体的な結果を得た.

定理5 (S.A.Lavrenchenko[La])  $G$ が射影平面の三角形分割になるならば,

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| = 1, 2, 4, 6, 12$$

例えば, 12は $K_6$ で実現されている. さらに, 彼自身の研究成果と次の定理を用いて, 各値を実現する三角形分割の特徴付けを与えている.

定理6 (S.Negami[N3])  $G$ が射影平面の三角形分割になるとき,

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| > 1$$

となるための必要十分条件は $G$ が図7の構造を持つことである.

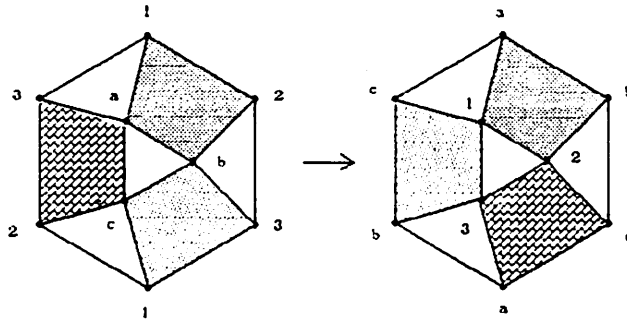


図7. 再埋蔵可能な射影平面の三角形分割

このように具体的な結果が得られるのは、より一般的な観点で射影平面的グラフの埋め込みのバリエーションを分類した再埋蔵定理[N2]があるからである。その再埋蔵定理では、射影平面グラフの領域の境界になる閉路とその他の部分の関係に着目して、それが異なる埋め込みを持つための構造が決定されている。最近、北久保君は、非平面的グラフが含む  $K_{3,3}$  の細分とその他の部分の関係に着目して再埋蔵定理Ⅱを完成した。それは大変複雑で、きれいな形では述べられないが、そのおかげで定理4が証明できたのである。

#### 4. Möbius Ladderの役割

再び Möbius ladderの登場となるが、ここでは梯子段が取れたり傾いたりした Möbius ladder を考える。ただし、梯子段は途中で折れたりしていないものとする。つまり、梯子の手で持つ部分 ( $\partial O_n$  にあたる部分) は細分されていたり、いくつかの梯子段の端点が一致していてもよいが、各梯子段は細分点を含まない1本の辺になっている。そのようなグラフを Möbius ladder with broken spoke と呼ぶ(図8)。

補題7 6個以上の頂点を持つ非平面的な3-連結射影平面的グラフ  $G$  は、Möbius ladder with broken spoke  $H$  で、

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| = |\text{emb}(H, G, P^2)/\approx|$$

となるものを含む。



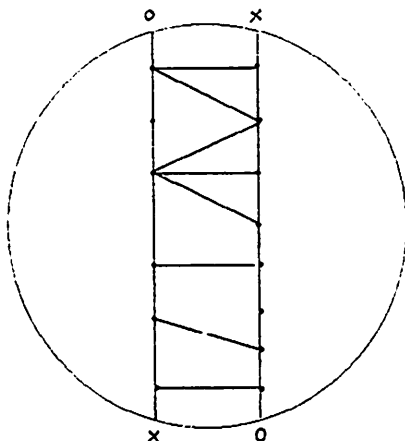


図8. Möbius ladder with broken spoke

ここで,  $\text{emb}(H, G, X)$  は部分グラフ  $H$  から  $X$  への埋め込みでグラフ  $G$  の埋め込みに拡張できるもの全体の集合である。したがって, 上の補題は  $H$  の埋め込みを考えれば  $G$  の埋め込みがすべてわかることを意味している。

補題7の証明: 仮定から  $G$  は  $K_{3,3}$  の細分を含む。つまり,  $G$  は少なくとも3本のspokeを持つ Möbius ladderを含む。ただし, この時点ではspokeの部分の細分されているかもしれない。そこで, spoke数が最大もの  $H$  を考える。  $H$  は  $\partial H$  を境界とするメビウスの帯に含まれるので, さらにそのメビウスの帯の面積が最小であると仮定する。すると,  $G$  が3-連結であることから, メビウスの帯の内部の余計な部分が掃き出され, 各spokeが1本の辺になっていることが示される。

この  $H$  の埋め込みを固定して, その他の部分の移動が可能だとすると, メビウスの帯の外にあったものが中に入ってくる。すると,  $H$  にspokeが追加できるので,  $H$  の仮定に反する。これから,  $H$  の部分の埋め込みは  $G$  全体に一意的に拡張されることになる。 ■

この補題により, 3-連結射影平面的グラフの埋め込みの個数は Möbius ladder with broken spoke の埋め込みを単純に数えた値を越えない。壊れたところがない梯子の場合は, 梯子段数 + 1 だったが, 一方の端点が一致している梯子段はメビウスの帯から独立に出入りができるので, 2 のべき乗個の埋め込みが生成でき

る。梯子段の本数は頂点数を越えないので次の定理を得るが、もう少しまじめに梯子段を数えれば、指数の部分をさらに小さくできる。

定理 8  $G$  が 3-連結射影平面的グラフならば、

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| \leq 2 |V(G)|$$

端点の一致した 2 本の梯子段が独立に出入りができたとすると、その 2 辺の中と外の像が菱形の領域を切り取る (図 6)。その 2 本の梯子段の間にもう 1 本梯子段があると、初めの 2 本の梯子段の 3 個の端点がグラフの頂点を菱形領域の中と外に分離するので、グラフが 4-連結でないことになる。

したがって、4-連結グラフ内の Möbius ladder with broken spoke では引き続く 3 本の梯子段は、一塊となって移動する。これから、4-連結射影平面的グラフの Möbius ladder の本質的な部分は梯子段がジグザグに納まったものである。それは奇閉路の自乗に他ならないから、次の定理を得る。また等号が成立するのはその奇閉路の自乗と  $G$  自身が一致するときだから、そうでない場合は埋め込みの個数はさらに減少する。

定理 9  $G$  が 4-連結射影平面的グラフならば、

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| \leq 2 |V(G)| + 1$$

さらに、 $G \neq C_m^2$  ( $m$ : 奇数),  $|V(G)| > 7$  ならば、

$$|\text{emb}(G, P^2)/\approx| \leq 2 |V(G)| - 1$$

同様の議論をトーラスに対して実行すると、やはり Möbius ladder が重要な役割を演じるようである。詳しい結論は今後の研究に期待したい。

以上。

## 《参考文献》

- [Ki] S.Kitakubo, The number of embeddings of 5-connected projective-planar graphs, preprint 1990.
- [La] S.A.Lavrenchenko, The index spectrum of the groups of projective-planar triangulations with a graph  $G$  in the group  $\text{Aut}(G)$ , preprint 1989.
- [Li] D.Lichtenstein, Isomorphism for graphs embeddable on the projective plane, ACM 1980, 218-224.
- [N1] S.Negami, Enumeration of projective-planar embeddings of graphs, Discrete Math., 62 (1986), 299-306.
- [N2] S.Negami, Re-embedding of projective-planar graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 44 (1988), 276-299.
- [N3] S.Negami, Re-embedding Theorem for projective-planar triangulation, in preparation.