箱根セミナ記録 88(1988)

グラフの曲面への幾何学的な埋め込み

横浜国立大学教育学部　根　上　生　也

0. はじめに

古くから，平面内に埋め込まれたグラフはすべての辺がまっすぐになるように連続的に変形できることが知れている．これを拡張して，リーマン計量を持った曲面の中でグラフの埋め込みを考え，すべての辺がまっすぐな曲線，すなわち，測地線になるように変形できるかという問題を考える．単純閉曲線をホモトピーで動かして測地線に直していくのは，普遍被覆空間とカット・アンド・ペーストの手法を用いて，組合せ的トポロジストでも簡単に証明できる．しかし，それが頂点を持ったグラフになると問題が急に難しくなってしまう．

その難関を回避するために，グラフの辺をまっすぐにすることを一旦忘れて，グラフの領域の方に目を向け，その領域をすべて凸にすることを考える．平面の場合，外領域の周辺を無視すれば，凸領域にはさまれた辺は必然的に直線分になる．また，凸領域を直線でカットすると，やはり，２つの凸領域になる．この二つの事実をヒントに，すべての領域が凸領域になっている小さなグラフの埋め込みから出発して，それに辺を加え凸領域を細分していき，欲しいグラフの埋め込みを作るというアイディアが生まれた．

このアイディアを一般の曲面上で実行できるよう工夫して，閉曲面上のグラフの辺をまっすぐにするのが本稿の目的である．

1. 閉曲面上の凸領域

リーマン計量を持った曲面内の単連結領域Ａが，Ａ内の任意の２点を結ぶ測地線の弧を少なくとも１本含んでいるとき，Ａを凸領域と呼ぶ．特に，ユークリッ

ド平面内の凸領域は通常の意味での凸領域と一致する．また，直線を測地線と読み変えれば，閉曲面上の凸領域も通常の凸領域が持つ性質をほとんど有している．例えば，凸領域を測地線で分断すれば二つの凸領域に分かれるし，逆に，二つの凸領域に挟まれた弧は測地線になっている．一般には，凸領域の閉包は凸領域にはならないが，それを曲面の普遍被覆空間に持ち上げたものを考えれば，その閉包はやはり凸領域になっている．

補題１．　有限個の測地線で構成された境界を持つ単連結領域の各角が180°未満ならば，その領域は凸領域である．

証明：　境界は測地線の弧で構成された多角形である．各点を任意の方向に通過する測地線が存在することに注意すると，すべての角が180°未満であることから，その多角形の頂点ｖから延びる測地線の弧をｖを固定して回転させると，他端は領域の境界のｖに隣接する頂点の一つから始まりもう一方で終わる部分のすべてを移動できることがわかる．これから，その領域内の任意の２点ｘ，ｙとｖを結ぶ測地線α，βが存在する．ｙを中心にβを回転してαとの交点を追跡すると，その点はｖからｘまで移動できる．したがって，回転後のβによりｘとｙは結ばれることになる．■

2．閉曲面上のグラフ

Ｇを閉曲面Ｆ上のグラフの2-胞体埋め込み（すべての領域が開2-胞体である埋め込み）とする．Ｇのループや２本の多重辺が作る閉路がＦ上の開2-胞体の境界になっていないとき，Ｇは位相的に単純であるという．また，Ｇが位相的に単純であり，境界に高々２個の頂点を含むＦ上の開2-胞体でＧの頂点をその内部と外部に分離するものが存在しないとき，Ｇは位相的に3-連結であるという．

Ｇが位相的に単純であることは，Ｆの普遍被覆空間へのＧのリフトが単純グラフであることに対応し，また位相的に3-連結であることは，そのリフトが通常の意味で3-連結であることに対応している．したがって，平面や球面上のグラフに対しては“位相的”という形容は特別な意味を持たない．

また，すべての辺が測地線である埋め込みを測地的な埋め込みと呼び，すべての領域が凸領域である埋め込みを凸埋め込みという．閉曲面上の凸埋め込みは測地的な埋め込みである．

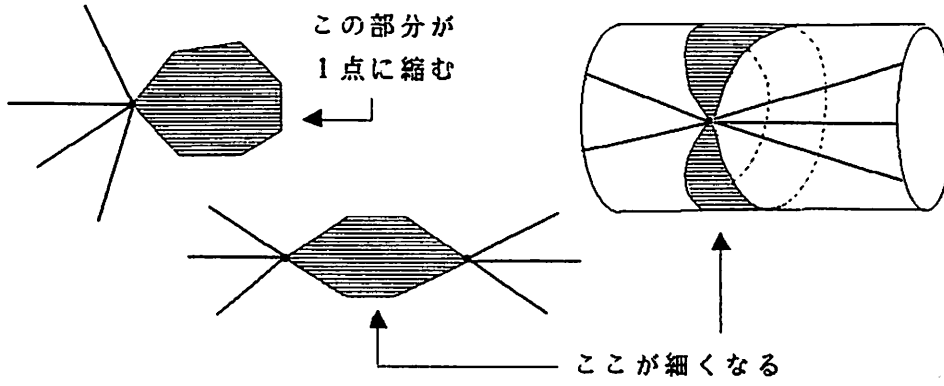

図1．位相的に3-連結でないグラフ

例えば，トーラスを矩形に切り開くときの切口のグラフG（2個の円周のブーケ）は2つのループを持つが，どちらも自明な閉曲線ではないから，位相的に単純である．また，唯一の頂点を分離する開2-胞体が存在するわけがないので，Gは位相的に3-連結である．実際，トーラスの普遍被覆空間へのGのリフトは平面を無限個の矩形に分割する格子であり，単純で3-連結な無限グラフである．その格子を直線群で構成し，ユークリッド平面が持つリーマン計量をトーラスにコピーしてくれば，Gの各辺はトーラス上の測地線になっており，唯一の領域は凸領域になっている．

位相的に3-連結なグラフを生成するために，次のような変形操作を定義する．グラフの2-胞体埋め込みGに対して，その領域A内を通る弧βでその端点が同一の辺に含まれたいないものを考える．ただし，Aの境界上に一つの辺が2度現われている場合は，それぞれを異なる辺とみなす．もし，βの端点が辺の途中に位置しているときは，そこに新たな頂点を設け，βを辺とする新しいグラフG′を考える．βは2-胞体であるAを分割しているので，こうして作られたG′も2-胞体埋め込みなっている．このように2-胞体埋め込みGから新たな2-胞体埋め込みG′を作る操作を弧βに沿った橋架け（bridging）と呼ぶ．橋架けに用いてよい弧といけない弧は図2に示した通りである．

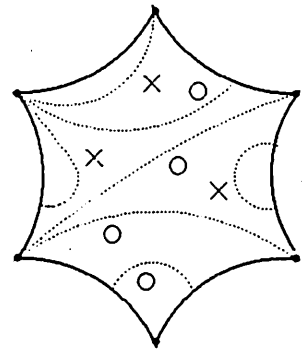

図2．橋架けに利用してよい弧（○）といけない弧（×）

補題2．　閉曲面上の位相的に3-連結なグラフは単領域グラフから橋架けを繰り返すことにより構成できる．

証明：　Gを閉曲面F上の位相的に3-連結なグラフとする．二つの異なる領域に挟まれる辺の除去を繰り返せば，Gに含まれる単領域グラフKが得られる．ただし，Kの次数2の頂点は無視することにする．そこで，HをKから橋架けを繰り返して得られるGの部分グラフとし，やはり次数2の頂点を無視する．

HがGと異なると仮定すると，Hのある領域にはHに属さないGの頂点や辺が存在するから，Hから始まりHの領域を通ってHに終わるGの道が存在する．もしそういう道で橋架けの条件を満たす道が存在しないならば，すべての道はHの一つの辺から始まり同じ辺に終わる．このとき，道が接続するHの辺ごとに分けられるならば，その辺の端点を除去するとGは非連結になってしまい，Gが位相的に3-連結であることに反する．

したがって，異なる辺に接続する二つの道が交わることになるが，三角領域に三又が配置された状況以外では橋架けの道が発見できる．三又状態のときは，Hの1辺を三又を通るものに置き換えると，橋架けを2回行うことができる．いずれの場合でも，橋架けを続行してHよりも大きな部分グラフが得られるので，最終的には橋架けを繰り返してGに到達できることになる．■

3. 最短の埋め込み

閉曲面F上のグラフの埋め込みGに対して，Fのリーマン計量にしたがって測った辺の長さの総和をGの全長と呼び，$\xi(G)$で表わす．この全長を最小にするようにGの埋め込みを修正していけば，測地的な埋め込みが得られそうな気がする．しかし，位相的に3-連結でない埋め込みは一部だけが収縮して退化し，全長の最小値を達成するグラフがGと異なるものになってしまう．このように，全長の最小値を与える埋め込み（これを最短の埋め込みという）がGのアイソトピー類の中に存在するとは限らない．

補題3．　最短の埋め込みGは測地的な埋め込みである．

証明：　Gが測地的でない辺を持てば，局所的な修正によりその辺の長さを短くでき，Gの全長も短くなる．したがって，Gが最短の埋め込みならば，その辺はすべて測地線でなければならない．■

一般のリーマン計量に対して，変形による全長の変化を議論するのは困難なので，以下では閉曲面の各点の適当な近傍において初等幾何の議論が成立するようなリーマン計量のみを考え，局所的に幾何学的なリーマン計量と呼ぶ．例えば，閉曲面の定曲率なリーマン計量は局所的に幾何学的である．曖昧な定義だが，以下の証明で用いる議論がすべて成立するリーマン計量が局所的に幾何学的なリーマン計量であると考える．非常に厳密な計算をすれば，“局所的に幾何学的な”はいらないかもしれないが，現在の私の能力を越えた議論になってしまいそうなので，深入りしないことにする．

補題4．局所的に幾何学的なリーマン計量を持つ閉曲面F上の最短の埋め込みGの各領域の角は180°を越えない．特に，次数4の頂点に集まる領域の角は180°未満である．

証明：　補題３により，Ｇは測地的な埋め込みである．そこで，以下では測地線の弧を直線分と考えて，幾何学的な議論をする．頂点ｖに180°以上の角を持つ領域Ａが存在するとする．その角度が180°を越えるときは，図のような修正をすればｖに接続するすべての辺の長さが短くなり，Ｇの全長が小さくなることは明かだろう．しかし，ちょうど180°のときにこの変形をすると，Ａの境界上にある２辺が延びてしまうので，ｖの適当な近傍の中で以下のようなデリケートな議論を必要がある．

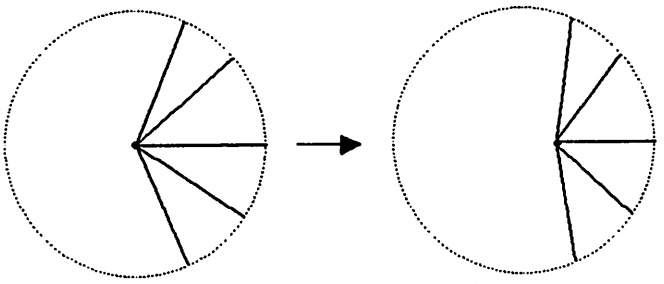

図３．角が180°を越えるときの修正

まず，Ａの境界に含まれる測地線ｘｙに垂直な頂点ｖを通る測地線ｖｚを描き，ｖｚ上のｖに十分近い位置に点ｕをプロットする．次に，ｖとｕを中心として半径が線分ｖｘの長さに等しい円を描き，それぞれＣｖ，Ｃｕとする．最後に，ｖを中心として半径が線分ｕｘの長さに等しい円Ｃｓを描き，ＣｓとＣｕの二つの交点をｓ，ｔとおく．ただし，ｓ，ｔはｖｚを境にしてそれぞれｘ，ｙと同じ側にあるものとする．

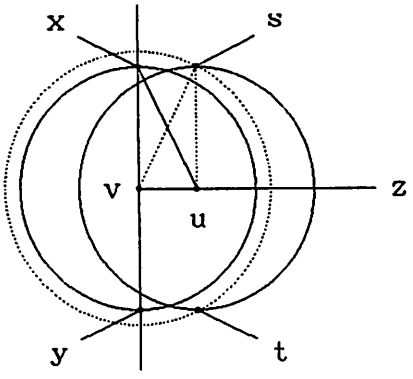

図４．角が180°のときの修正

この状況を保ってｕをｖに近づけていくと，ｓとｔはそれぞれｘ，ｙに近づいていく．したがって，ｕを十分ｖの近くに置けば，ｖに接続する辺はＡの境界上にあるものを除くとすべてＣｓ上の弧ｓｔ（ｖｚと交わる側）を通過する．ｖｘよりもｕｘが長いことに注意すると，Ｃｓの外を固定してｖをｕまで動かせば，円弧ｓｔを通過する辺の長さが短くなることがわかる．Ａの境界上の辺はｘ，ｙを固定してｖｘ，ｖｙの部分だけを動かす．

この部分は延びてしまうので，Ｃｓを通過する１本の辺（ｓｔ上の交点をｗとする）と組にして，全長の変化を考える．ｖｘ＋ｖｗはｕｘ＋ｕｗに置き換わり，ｖｗ＝ｕｘ，ｖｘ＞ｕｗであるから，ｖｘとｖｗの長さの和は全体として短くなる．ｖｙに対しても組になる辺があれば，同様にｖｙの延びが吸収できる．したがって，ｖの次数が４以上ならば，この修正によりＧの全長を短くできる．■

上の証明が成立するためには，ｖの十分小さな近傍で次の二つが成立すればよい．これが局所的に幾何学的なリーマン計量が満たすべき条件である．

① 交差する二つの円（１点から等距離にある点の集合）はちょうど２個の交点を持つ．

② 直角三角形の斜辺は他の１辺より長い．

４．単領域ブーケ

どんな閉曲面も１点のみを共有する円周で切り開くと１つの2-胞体になってしまう．その円周の和集合をグラフＢと思えば，Ｂは領域を一つしか持たないグラフの2-胞体埋め込みになっている．このＢを単領域ブーケと呼ぶ．一般のグラフを縮小すると，複数の頂点が１点に退化するか可能性があるが，もともと頂点が１個しかない単領域ブーケに対してはそのようなことを心配する必要がない．

補題５．　任意のリーマン計量を持つ閉曲面上の単領域ブーケは最短の埋め込みを持つ．

証明：　単領域ブーケＢとアイソトピックな埋め込み全体の集合を$\mathcal{B}$とする．$\mathcal{B}$

の元の列 $\{G_1, G_2, G_3, \cdots\}$ で $\xi(G_n)$ の極限が$\mathcal{B}$の元の全長の下限を与えるものを考える．このグラフの埋め込みの極限$G_\cdot$が埋め込みになっていれば，$\mathcal{B}$に属しBの最短の埋め込みとなる．$G_\cdot$が埋め込みであることを示すには，まずBの一つの辺eに対応したG_nの辺e_nに乗っている2点x_n, y_nに対して，

$$x_n, y_n \to z \ (n \to \infty) \ \Rightarrow \ d(x_n, y_n) \to 0 \ (n \to \infty)$$

を証明すればよい．ただし，$d(x_n, y_n)$はG_nで測ったx_nとy_nの距離である．つまり，x_nとy_nを結ぶG_n上の弧の最小値である．

そこで，$d(x_n, y_n)$に下界δが存在すると仮定する．zのε近傍には有限個を除いたすべてのx_nとy_nが含まれている．x_nとy_nがG_nから切り取る弧β_nの長さはδ以上であるから，εが十分小さいときにはβ_nおよびその極限βはzのε近傍には含まれない．β_nがε近傍を出て再び戻って来る位置によって，図5に示した二つの場合がある．

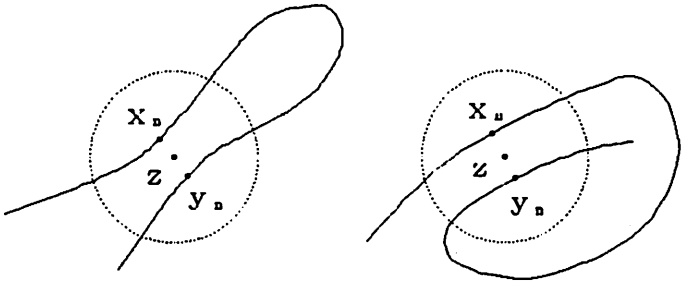

図5．単領域ブーケの極限

zのε近傍内を通るe_nの極限$e_\cdot$の弧を同じ端点を持つ測地線に取り替えたものは，やはり$\mathcal{B}$の元の極限になっている．もし$G_\cdot$がこれと一致していなければ，$G_\cdot$の全長よりもこの全長の方が短くなり，$G_\cdot$の仮定に矛盾する．したがって，$e_\cdot$のε近傍内の部分はすべて測地線になっている．特に，x_nの極限とy_nの極限が乗っている弧はzを含んでいて交差はしていない．異なる二つの測地線が接することはないので，この二つの弧は一致せざるをえない．

この議論を繰り返し，解析接続をしていくと，図5の左の場合はβの部分がどんどん一致していきヘアピン状になる．最終的にはループの部分はつぶれてしまい，その部分をへこめていけば，$G_\cdot$よりも全長の短い極限を構成することができる．一方，図5の右の場合が実現するためには，e_nがメビウスの帯の境界線になっている必要がある．しかし，G_nは単領域ブーケだから，このメビウスの

帯を2-胞体に切り開くような他の辺が存在しなくてはならない．これが不可能なのは容易にわかる．

以上により，G.の各辺は埋め込みになっていることがわかり，測地線になっている．また，異なる辺が端点以外で交差することはなく，ホモトピックでもないから，それらは端点以外では共有点を持つことはできない．したがって，G．の全体も埋め込みになっている．■

補題6．　局所的に幾何学的なリーマン計量を持ち$\chi(F)\leqq 0$の閉曲面F上の単領域ブーケは凸埋め込みにアイソトピックである．

証明：　補題5により単領域ブーケBは最短の埋め込みを持つ．また，Fのオイラー数$\chi(F)$が正でないことから，Bの頂点の次数は4以上である．したがって，補題1によりBの最短の埋め込みの唯一の領域は凸領域である．■

4．凸埋め込みの構成

一般に測地的な埋め込みの存在を示すのはやっかいなことだが，一旦，測地的な埋め込みができてしまうと，測地的であることを保存して変形や修正をするのは容易である．前節まででそのやっかいな部分を処理してあるので，それらを付け合わせて，目的の定理を証明する．

補題7．　測地的な埋め込み（凸埋め込み）に縮役可能なグラフの埋め込みは測地的な埋め込み（凸埋め込み）にアイソトピックである．

証明：　Gを閉曲面F上の2-胞体埋め込みとし，G/e を辺eをF上で縮約して得られる測地的な埋め込みとする．eの縮約で同一視されていた二つの頂点v，uを分離して十分近くに配置し，辺eに対応した測地線を追加する．その他の辺dもそれに対応したG/eの辺d'の十分小さな近傍の中で測地線で実現すること

ができる．こうしてGを辺が測地線になるように復元できたが，埋め込みになっていないかもしれない．

もし交差する2辺d，fがあったとすると，eを縮約することでその交差は解消されているはずだから，dとfはそれぞれu，vに接続し，その交差は同一視されたu，vの十分小さな近傍の中で起こっているはである．しかし，それは不可能である．したがって，上の操作でGの測地的な埋め込みが構成できることになる．また，各領域の角の微調整で領域を凸性を保存することも可能である．■

> 定理1．　局所的に幾何学的なリーマン計量を持つ閉曲面上の位相的に3-連結なグラフは凸埋め込みにアイソトピックである．

証明：　閉曲面Fのオイラー数が正のときは，若干事情が違うので，ここではその証明は省略する．補題2により，位相的に3-連結なグラフの埋め込みGは適当な単領域グラフKから橋架けで構成できる．また，Kの全域木を縮約すれば，単領域ブーケBになる．補題6によりは凸埋め込みにアイソトピックである．補題7により，その凸埋め込みを引き延ばして，Kの凸埋め込みが得られる．この際，領域の角がすべて180°未満であるようにしておけば，Kの領域の境界上の2辺が同一の測地線に乗ることはない．したがって，異なる2辺を結ぶ弧は領域の内部を通過する測地線に修正できることになり，Kから橋架けで得られるグラフの凸埋め込みが構成できる．さらに，角の調整をして測地線による橋架け操作を続けていけば，最終的にGの凸埋め込みを得る．■

> 定理2．　局所的に幾何学的なリーマン計量を持つ閉曲面上の位相的に単純なグラフは測地的な埋め込みにアイソトピックである．

証明：　位相的に単純な埋め込みHの各領域の中央に頂点をおき，その境界上のすべての頂点と辺で結べば，位相的に3-連結な埋め込みGが得られる．Gは凸埋め込みにアイソトピックであるから，その部分グラフであるHは測地的な埋め込みになる．■