幾何学的グラフ理論問題集

根　上　生　也
東京工業大学
理学部　情報科学科

グラフ理論というと組合せ理論の一分野であるという認識が大勢を占めているが，私自身はそのような捉え方をしたくない．グラフ理論が組合せ理論の中にすっぽり入っているのでなくて，グラフ理論の中に組合せ的グラフ理論という部分があるのだと考えたい．その組合せ的グラフ理論と対峙するのが幾何学的グラフ理論である．（勿論，両者の間に一線を引いてしまうのは正しい見方ではない．あくまでグラフ理論における両極だということである．）そこで，本稿では組合せ的な考え方だけでは解決できない（できそうにない）いくつかの幾何学的グラフ理論の問題を紹介する．

◆平面内の連結集合の交グラフ◆

$\mathcal{F}=\{A_1,\cdots,A_n\}$ を n 個の集合の族とする．各集合 A_i に対して頂点 v_i を設け，二つの集合 A_i，A_k が空でない交わりを持つとき v_i，v_k を辺で結んで得られるグラフを $G(\mathcal{F})$ と書いて集合族 $\mathcal{F}$ の交グラフ（intersection graph）と呼ぶ．特に，各 A_i が実数直線R上の閉区間のとき $G(\mathcal{F})$ は区間グラフと呼ばれ，その特徴付けは既に知られている（[G] を見よ→☆）．そこで，区間グラフを拡張した何かを考え，その特徴付けを問題にする．そういう拡張として，n次元ユークリッド空間 R^n 内の矩形領域（ただし，各辺が座標軸に平行）や球体を A_i として得られる交グラフはいろいろと研究されてるので（例えば，[T] を見よ），次元を上げない代わりに集合の制限を弱めて，次のようなものを定義する．

グラフGが平面交グラフ（plane intersection graph）であるとは，平面内の有限個の（孤状）連結集合の族$\mathcal{F}$＝｛$A_1,\cdots,A_n$｝が存在してその交グラフG($\mathcal{F}$)とGが同型になることとする．集合の連結性を定義から除くと任意のグラフが平面交グラフになってしまい面白くない．A_iは閉集合であると仮定してもよいが，これと異なるものにはならない．

最終目標は平面交グラフの特徴付けであるが，それはまだまだ先の話である．とりあえず，平面交グラフにならないグラフをたくさん発見せよというのが問題である．もしグラフGが平面交グラフにならないグラフHを誘導部分グラフとして含めば，Gも平面交グラフにはならない．したがって，平面交グラフにならないグラフがすべて発見できれば，その時点で平面交グラフの特徴付けが完成する．

平面グラフは平面交グラフであるが，逆は一般には成り立たない．例えば，5点以上の完全グラフK_n（$n \geq 5$）は平面上には埋め込めないが，任意の完全グラフは平面交グラフである．というのは，A_iとしてすべて同一の集合をとればよいからである．A_iはすべて異なるという条件を付けたとしても半径の異なるn個の同心円の内部領域を考えればK_nはやはり平面交グラフである．包含関係がないとしてもK_nは原点から放射状に延びるn本の直線で区切られる閉領域の交グラフになっている．

これらの事実はグラフGが平面交グラフでないグラフHを部分グラフとして含んでいたとしてもGは平面交グラフになることがあるということを示している．なぜなら，任意のグラフHはそれと同じ頂点数の完全グラフの部分グラフだからである．参考までに平面グラフの特徴付けを示すが，「部分グラフとして」の部分を「誘導部分グラフとして」に置き換えなければ，平面交グラフに対する類似の定理は作ることはできない．

定理1（Kuratowski）．　グラフGが平面的であるための必要十分条件は完全グラフK_5および完全二部グラフ$K_{3,3}$の細分を部分グラフとして含まないことである．

ここで，平面交グラフにはなりそうにないが実際はなってしまう例を示して

問題の難しさを感じて頂くことにする．まず，長さnのサイクルC_nと m頂点の完全グラフの補グラフ$\overline{K_m}$の結び$C_n+\overline{K_m}$ を考える．（グラフGの補グラフ$\overline{G}$とは頂点集合はGと同じだが隣接関係が逆になっているものである．したがって，$\overline{K_m}$ はm個の孤立点からなるグラフである．また，グラフGとHの結びG＋HとはG，Hの中はそのままにしてGの頂点とHの頂点のすべての組合せを辺でつないで得られるグラフである．）$m\leqq 2$ならば$C_n+\overline{K_m}$は平面グラフであるから平面交グラフでもあるが，$m\geqq 3$のときはどうだろうか？

前置き通り$C_n+\overline{K_m}$は平面交グラフなのだが，丸をくねらせて集合を描くことに捕らわれていると答えは見つかりにくい．C_n の部分に対応して下図のように集合をチェイン上に配置し，$\overline{K_m}$のm個の頂点に対応して同心円を描く．それらの円（円の内部ではなく，境界線の円それ自身）はチェインのどの集合とも交わっているが，互いに他とは交わっていない．

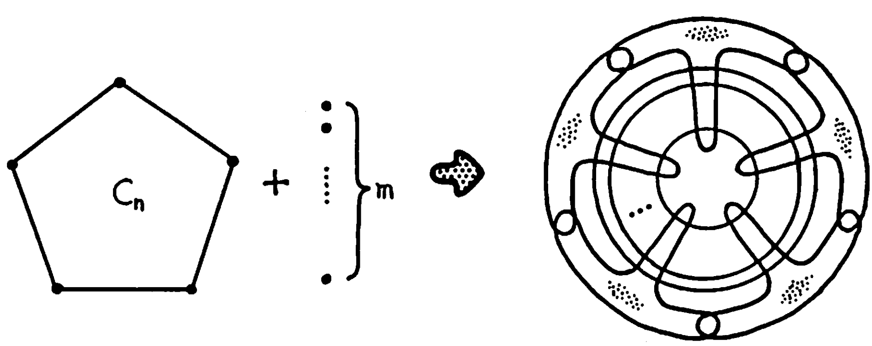

図１．平面交グラフの例

この例で見たように，一見，平面交グラフになりそうにないものが，上手に集合を考えてやるとなってしまうので，何を以てできないと結論したらよいのかをまず十分に考察する必要がある．手応えとしては，非平面的グラフが平面交グラフになるには頂点数に対して辺数がある程度以上多い必要があるようだ．というのは，辺数が少ないと一つの集合が横切るのを許されている他の集合の数が減ってしまうので，集合族を構成するときの障害になるからである．こういうことを頭に入れた上で，図２のグラフを考えると，それが平面交グラフにならないことが分かる．外周のサイクルに対応した集合の和集合の中に実際に

サイクルが書けることをまず結論すると，このグラフが平面的でないことと平面交グラフでないことがほとんど同値であることに気付くだろう．

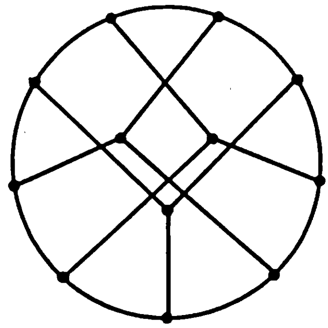

図２．　平面交グラフにならない例

任意の連結集合を相手にしなければならないと，どこかに落し穴があるかもしれないという心配が付きまとうが，実は次の定理が示すように１次元の集合だけ考えていればよい．その証明は集合が孤状連結であることを頼りに帰納法で示せばよい．この定理を手がかりに，色々と考察して頂きたい．

定理２．　グラフＧが平面交グラフであるための必要十分条件は，ある平面グラフＦに含まれる木の族$\mathcal{T}=\{T_1,\cdots,T_n\}$に対して$G\cong G(\mathcal{T})$となることである．

《練習問題》　完全二部グラフ$K_{m,n}$が平面交グラフでることを示せ．

☆　[G]には区間グラフから発展して，理想グラフ（perfect graph）と呼ばれるグラフのことが色々と書かれている．ＳＰＧＣ（The Strong Perfect Graph Conjecture）と呼ばれるトポロジーのポアンカレ予想に匹敵する（と思われる）グラフ理論の問題が解説されているので，ご覧になるとよいでしょう．

◆グラフの測地的埋め込み◆

平面的グラフGは各辺が直線分になるように平面に埋め込めることはよく知られている．そこで，この事実の拡張を考える．リーマン計量を持つ曲面に対して，その中に埋め込まれているグラフGの各辺がその計量に関して測地線になっているとき，その埋め込み，もしくはグラフG自身は測地的であるということにする．平面に普通の距離を定義しておけば，直線はその距離に関する測地線であるから，平面的グラフは平面に測地的に埋め込まれることになる．

問題はリーマン計量を持つ曲面上のグラフを測地的に埋め込み直せるかというものである．この問題に答えるには次のように四つの段階が考えられる．

(1)　与えられたグラフGの埋め込みをアイソトピックに修正して測地的にできるか？

(2)　与えられたグラフGの埋め込みを曲面上の同相写像で移動させて測地的にできるか？

(3)　与えられたグラフGの埋め込みを変えれば測地的にできるか？

(4)　与えられたグラフGが測地的に埋め込める曲面が存在するか？

任意のリーマン計量を考えてもよいが，やはり球面幾何，ユークリッド幾何，双曲幾何を与える定曲率な計量を考えた方が，幾何学の知識が使えて面白いだろう．

(1),(2) に関してはグラフが単純でないと明らかに答えが「ＮＯ」になってしまう例がある．例えば，領域の境界になっているループは大抵の場合測地線にはならない（球面上は可能）．また，平行に走る多重辺を測地線に直した途端にすべてが一致してしまうので，埋め込みではなくなってしまう．したがって，グラフはすべて単純なものと仮定した方がよさそうである．そう仮定してもどの段階までが「ＹＥＳ」でどこから「ＮＯ」なのかは自明ではないようである．おそらく，(1) は「ＮＯ」だと思われる．勿論，Gがサイクルのときは近年の曲面の幾何構造の研究からそれが（π_1 の元として）自明でなければ測地閉曲線にアイソトピックになる．しかし，一般のグラフのときには，一つの

辺を測地的になるように変形したとき，他の部分が引っ張られて，それまで測地的になっていた部分を壊してしまうかもしれない．残念ながらあまり深く考察していないので，何を以て「できない」と結論してようといのか分からないのが現状である．

分からないずくめでは悲しいので，まず，平面のときは（1)が「ＹＥＳ」になることの証明を示しておく．

定理３．　平面上に埋め込まれたグラフＧは平面のアンビエント・アイソトピーにより測地的にできる．

（証明）頂点数が少ないときは明かであるから，頂点数に関する帰納法を使う．議論を簡単にするために平面グラフＧは平面の三角形分割になっているものとする．よく知られた事実として，任意の平面的グラフＧは次数が５以下の頂点を持つので，その一つを $v \in V(G)$ とする．$G - v$ は帰納法の仮定により，アンビエント・アイソトピーで測地的にできるので，そのアイソトピーでＧを動かしておく．このとき，ｖのリンク $lk(v)$ が凸になっていれば，明らかにｖに接続する辺も測地的にできる．ところが，今，$lk(v)$ の長さは５以下なので，それが凸多角形になっていなくても，図３(a),(b)の場合しか起こらないので，やはりＧ全体を測地的にできることになる．■

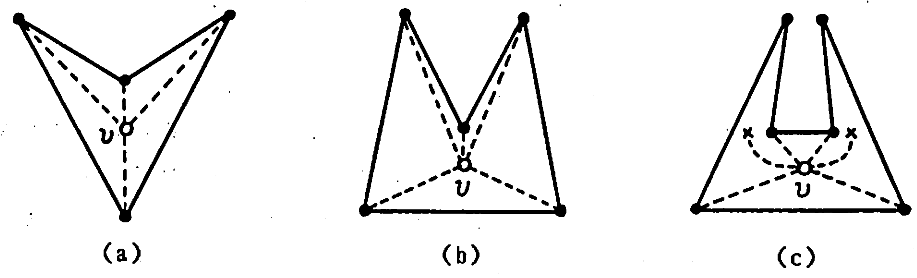

図３．$lk(v)$ が凸多角形にならない場合

次数６以上の頂点ｖに対しては図２(c)のようにそのままではｖと $lk(v)$ 上の頂点を測地的な辺で結ぶことができない状況が起こる．グラフＧが球面か射影

平面（球面幾何の距離が入っている）に埋め込まれているときも，Gには次数が５以下の頂点があるから（直線を大円に置き換えて）同様の議論が成り立つはずである．ユークリッド幾何を持つトーラス，クラインの壺のときも，6-正則なものを除くと次数が５以下の頂点があり，6-正則なものは形が決っているので個別にチェックできる．球面や射影平面のときには mapping class group が自明なので（球面のときは向きを保つ写像だけ考える），グラフの形だけ問題にして，その埋め込みについては気にしなくてもよいのだが，トーラス，クラインの壺ではそういう議論だと（2)が「ＹＥＳ」であることしか結論できない．ところが，それらの普遍被覆空間に同相写像を持ち上げて考えると線形写像とアイソトピックになるから，もとの写像も測地線を測地線に移す同相写像にアイソトピックであることが分かり，やはり(1) も「ＹＥＳ」であることが分かる．

定理４．　球面，射影平面，トーラス，クラインの壺上のグラフの埋め込みは測地的なものとアイソトピックである．

したがって，残る問題は双曲的幾何構造を持つ閉曲面に対してどうなるかである．是非，(1) が「ＮＯ」になる例を作って頂きたい．

ところで，グラフが埋め込まれている所を曲面に限らず，もっと次元の高い空間にしたらどうなるだろうか？　勿論，３次元空間にはどんなグラフも埋め込めるわけだが，辺に局所的な結び目を作ってしまえば，もはやアンビエント・アイソトピーで測地的にすることはできない．したがって，(1),(2) の答えは「ＮＯ」になってしまう．が，よく知られているように，次の集合上の点は（非加算個にも関わらず）一般の位置にあるので，任意のグラフ（無限グラフでもよい）の頂点をでたらめに配置して辺を加えても辺が交わることはない．即ち，３次元ユークリッド空間においては(3),(4) は「ＹＥＳ」になる．

$$\{(x,\ x^2,\ x^3)\in R^3 : x\in R\}$$

更に，４次元以上になると結び目が解消してしまうので，(1)から(4)のすべてが「ＹＥＳ」になってしまう．

◆グラフの結び目・絡み目◆

すでに述べた通り，グラフを３次元空間に埋め込むとグラフの随所に結び目や絡み目ができる．その様子を解析しようとすると，それはもはやグラフ理論ではなくトポロジーになってしまう．そこで，この結び目，絡み目をグラフ本来の性質として扱うために，グラフの埋め込み方に依らずにいつでも結び目や絡み目が生じるかどうかを議論する．例えば，平面的グラフだと空間内の平面の上に埋め込めば，グラフのどのサイクルも（自明でない）結び目にも絡み目にもなっていない．十分にグラフが大きく複雑になっているならば，どんな空間への埋め込みでも結び目や絡み目が生じることが期待されるが，実際，[CG]において次の結果が示されている．（ご存じのように，Conway も Gordonもグラフ理論家ではなく，有名なトポロジストである．）

定理５（Conway - Gordon）．
　(i)　K_6 の空間への任意の埋め込みは自明でない絡み目を含む．
　(ii)　K_7 の空間への任意の埋め込みは自明でない結び目を含む．

証明の方針は次の通り．(i)に関してはK_6の中の互いに交わらないサイクルの組(C_1, C_2)の linking number $\mathrm{lk}(C_1, C_2)$の総和

$$\lambda = \Sigma\, \mathrm{lk}(C_1, C_2)$$

を考え，それが埋め込みの描画の交差の上下を入れ換えても不変であることを示す．図４の埋め込みでは実際に Hopf linkが入っているので，λは１以上になっている．ということは，どんな埋め込みに対してもλが１以上となり，必ず成分が２個の自明でない絡み目が存在することになる．

(ii)に関してはK_7 の中のハミルトン・サイクルCのArf invariant $\alpha(C)$の総和

$$\sigma = \Sigma\, \alpha(C)$$

を考え，上と同様にσの不変性を示し，図５の埋め込みに対して$\sigma = 1$となる

ことを確認して結論を得る．（図５の埋め込みでは一つを除くとすべてのハミルトン・サイクルは自明な結び目で，その唯一の例外はtrefoil knotになっているそうです． ハミルトン・サイクルは全部で 360個あるのですが，trefoil knotがどこにあるのか私には分かりません．）

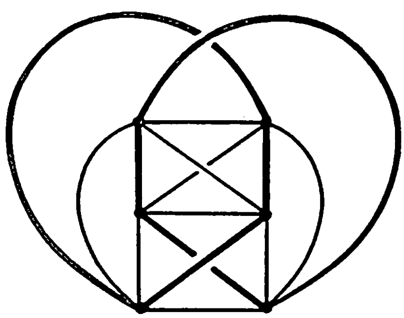

図４． Hopf link を含むK_6の空間への埋め込み

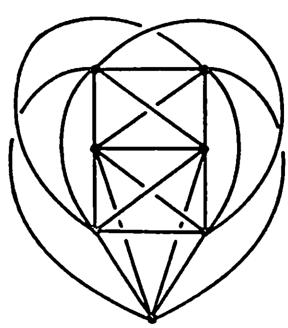

図５． trefoil knot を含むK_7の空間への埋め込み

完全グラフ以外にも結び目や絡み目がいつも生じるグラフは存在する．例えば，$K_{3,3}+K_1$の空間への埋め込みはいつも自明でない絡み目（具体的には，Hopf link）を含むことが，[S]で示されいる．これと定理４を使えば次の結果を得る．

定理６（Sachs）．グラフＧの空間への任意の埋め込みが自明でない絡み目を含まないならば，Ｇの各頂点ｖ∈Ｖ(Ｇ)と隣接する頂点が誘導する部分グラフは平面的である．

そこで，問題．グラフＧの部分グラフＨの任意の埋め込みが結び目または絡み目を含むならば，Ｇ自身に対しても同じことが言える．したがって，平面的グラフの場合と同じように，臨界的なグラフの族を決定して Kuratowski の定理と同じスタイルの定理が作れる可能性がある．その定理を示すのが最終目標であるが，とりあえず，任意の真部分グラフが自明でない結び目（または絡み目）を含まない埋め込みを持つようなグラフをたくさん発見せよというのが問題である．[S] の中には絡み目に対するそういうグラフの例がいくつか挙げられているが，どれも Hopf linkを含むものばかりである．組合せ的な方法で自明でない絡み目を発見しようとすると Hopf linkくらいした手が付けられないような気がする．ましてや，結び目となると組合せ論では手も足もでない．トポロジストの応援を是非お願いしたいのであります．

◆グラフの次元と忠実な埋め込み◆

グラフに対して色々な次元が定義されている．例えば，グラフＧを各辺の長さが１になるように埋め込むことができるユークリッド空間の最小の次元をＧの次元と定義する．すると，完全グラフK_nの次元はｎ－１になる．ユークリッド空間にＧの頂点数と同じ数だけ点を配置して，二点間の距離が１になるとき線で結んでできるグラフがＧと同型になるようにできる空間の最小次元をＧの次元と定義しても，完全グラフK_nの次元はｎ－１になる．（この辺の議論は琉球大学の前原潤先生が詳しい．）

ほとんどの次元の定義ではK_nの次元はｎ－１になる．これはK_nが(n-1)次元単体のフレームだから，非常に自然である．ところが，ｎ次元立方体のフレームであるn-立方体グラフQ_nの次元はｎになってくれない．大抵，ｎより小さくなってしまって不可解である．（だからこそ，グラフの次元を考えるのが

面白いという考え方もあろうが…）

そこで，K_n の次元は $n-1$，Q_n の次元は n になるような次元を定義することを考える．勿論，人為的にそう定義してしまえば可能だがそれでは面白くない．グラフの構造に依存してうまく定義すると期待通りになってくれるというものでなければ意味がないだろう．

「グラフの構造を忠実に反映させる」と口ずさむと，脳裏をかすめるのは私の学位論文[N1]のテーマである「埋蔵の一意性と忠実性」である．そのイントロの中で述べたことだが，埋蔵の忠実性を高次元で考えて次元の定義を与えることにする．一意性に関しては，３次元では結び目現象があるので成り立たない．４次元以上の空間では結び目はほどけて，一つのグラフの埋蔵はすべてアイソトピックになってしまうから，いつでも一意性が成り立ってしまう．トポロジー的には高次元で一意性を議論することはほとんど意味がないが，これから定義する次元と絡めて幾何学的に一意性を問うと面白そうな問題ができる．

一般にグラフGから位相空間Xへの埋め込み $f: G \to X$ が忠実（faithful）であるとは，Gの任意の自己同型写像 $\sigma: G \to G$ に対して，X上の同相写像 $h: X \to X$ が存在して，$h \circ f = f \circ \sigma$ となることである．簡単に言うと，Gが自己同型群に関して対称的にXに埋め込まれているとき，忠実に埋め込まれているという．ここでは，Xとしてユークリッド空間 R^n を考えるが，任意の埋蔵ではワイルドな現象がコントロールしきれないので，埋め込みを測地的はものだけに制限する．すなわち，各辺が直線分になっているものを考え，ここではそのような埋め込みを線形埋め込み（linear embedding）と呼ぶことにする．更に，線形埋め込み $f: G \to R^n$ が忠実であるというのは，Gの任意の自己同型写像 $\sigma: G \to G$ が R^n の等長変換 $h: R^n \to R^n$ で実現される（i.e., $h \circ f = f \circ \sigma$）ときだけとする．

以上の準備のもとで，グラフ G の忠実埋蔵次元（faithfully embeddable dimension）を忠実な線形埋め込み $f: G \to R^n$ が存在する最小の次元 n と定義し，FED(G)で表す．すると，期待通りの結果を得る．

定理７．(i) $\mathrm{FED}(K_n) = n-1$，　(ii) $\mathrm{FED}(Q_n) = n$．

これを示すには次の事実を認める必要がある．

① R^n において，互いに等距離にある点の最大個数は $n+1$ である．
② R^n において，互いに等距離にある $n+1$ 個の点は正 n 次元単体を張る．
③ R^n において，正 n 次元単体の $n+1$ 個の頂点と等距離にある点はその重心の一点のみでる．

（定理７の証明）一般に，グラフGの忠実な線形埋め込みにおいて，u，$v \in V(G)$と自己同型写像σ：$G \to G$に対して，

$$d(u, v) = d(\sigma(u), \sigma(v))$$

が成り立つ．ただし，$d(u, v)$はR^n内のu，v間の距離である．これから完全グラフが忠実に埋め込まれているならば，すべての頂点は互いに等距離になるので，(i)は①と②から明かである．

(ii)　n次元立方体のフレームはQ_nの忠実な線形埋め込みであるから，

$$\mathrm{FED}(Q_n) \leqq n$$

は明かである．逆の不等式を示すために，Q_nの対角線の両端に位置する二頂点$u=(0,0,\cdots,0)$，$v=(1,1,\cdots,1)$を考える．uに隣接しているn個の頂点$w_1,\cdots,w_n$は一カ所だけ1が立つ座標を持ち互いに対等な関係にある．したがって，Q_nがどこかに忠実に埋め込まれているならば，それらは等距離になければならず，空間の次元は$n-1$以上である．ところが，uもvも$w_1,\cdots,w_n$のすべてと等距離にならなければならないので，③からuとvが異なる場所に置かれるためにはn次元必要である．よって等号が示される．■

任意のn頂点グラフGは完全グラフK_nの部分グラフであり，K_nの自己同型写像でGを不変にするもの全体が作る群はGの自己同型群 Aut(G)と一致する．したがって，K_nの忠実な線形埋め込みの制限としてGの一つの忠実な線形埋め込みが与えられることになり，

$$\mathrm{FED}(G) \leqq |V(G)| - 1$$

となる．これで，忠実埋蔵次元が well-defined であることが示された．

とこで，ユークリッド空間R^nの等長変換は平行移動と直交変換の積として表される．が，R^nに忠実に埋め込まれているグラフGには平行移動は作用できない．なぜなら，Gを平行移動するとGからはみ出してしまうからである．したがって，Gには直交変換群のある部分群が作用してしることになる．つまり，Gの自己同型群 Aut(G)はn次直交変換群O(n)の部分群である．

$$\mathrm{FED}(G)=n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(G)<O(n)$$

この逆は一般には成り立たない．例えば，Tを自己同型群が自明な2頂点以上のグラフとして，K_{n+1}をTより十分頂点数が大きい完全グラフとする．これらの結び $K_{n+1}+T$の任意の自己同型写像はTを固定するから，その自己同型群はK_{n+1}の自己同型群と同型で O(n)の部分群になる．しかし，③の事実から $\mathrm{FED}(K_{n+1}+T)>n$となる．

他の次元の定義でもそうなのだが，平面的グラフの次元は必ずしも2にはならない．例えば，車輪グラフW_n，正多面体グラフP（正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体）に対しては，それぞれ

$$\mathrm{FED}(W_n)=2, \quad \mathrm{FED}(P)=3$$

となる．それぞれの自己同型群はO(2)，O(3)の有限部分群と一致する．図6のグラフGの忠実な線形埋め込みを作ろうとすると，左右の菱形を独立は平面に乗せなければならないので，FED(G)＝4になる．

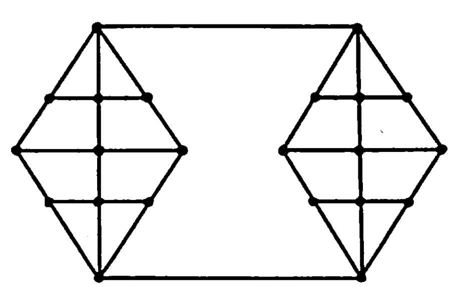

図6．　FED(G)＝4となる平面グラフ

常々感じていたことであるが，平面グラフには車輪グラフのように平らな感じがするものと，正二十面体グラフのように丸い感じのものと，図６のグラフのようにフレキシブルなものの三種類があるようようだ．忠実埋蔵次元にはその直観が反映されていると思う．つまり，平面グラフＧが平ら，丸い，フレキシブルだというのは，それぞれ FED(G)＝2，3または4以上のときと定義するのである．

さて，ここで少し矛先を変える．いろいろなグラフの忠実埋蔵次元の値を決定するというのも面白い問題ではあるが，ここでは忠実な埋め込み自身に目を向ける．すると，一旦は捨て去った高次元での埋め込みの一意性の問題が復活してくる．

定理８．　(i)　完全グラフK_nの R^{n-1}への忠実な線形埋め込みは拡大・縮小を除くと唯一つ存在する．
(ii)　n-立方体グラフQ_n のR^n への忠実な線形埋め込みは拡大・縮小を除くと唯一つ存在する．

（証明）(i) は①②から明かである．(ii)はｎに関する帰納法を使う．Q_n は$Q_{n-1}\times K_2$の形をしているので，｛＊｝$\times K_2$ に対応した辺の集合Ｆを除くと二つのQ_{n-1} に分離する．そこで，Q_n をR^n へ忠実に埋め込んでおき，Ｆの各辺の中点全体が張る超平面Πを考える．今，ΠにはQ_{n-1} の自己同型群が等長的に作用しているので，定理７の証明と同じ議論によりΠの次元は$n-1$以上になっている．仮に，Πの次元がｎだったとしよう．即ち，ΠはR^n 全体と一致する．Q_n の自己同型写像として，Ｆを不変にして二つのQ_{n-1} を入れ換えるR^n の等長変換σが存在する．このσのQ_n 上の不動点はＦの中点全体である．ということは，$\Pi=R^n$ もσの不動点集合に含まれる．これは，σが恒等写像であることを意味するので矛盾である．したがって，Πの次元は$n-1$である．

反転σはΠを不動点集合としてR^n に作用しているから，Ｆの各辺はΠを垂直に貫通している．これから，Ｆの中点全体を頂点集合に持つ(n-1)-立方体Ｑが二つのQ_{n-1} の正射影としてΠの中に存在する．（Πの余次元が１だからこ

れが言える．空間の中の捻れた菱形を想像せよ．）帰納法の仮定から，このQは本当の立方体と同じ形をしているので，それをFに沿って平行移動してQ_nの全体像を得る．これがやはり本当のn次元立方体の形をしているのは明かである．■

定理9．$K(m_1,m_2,\cdots,m_n)$をn部グラフとし，m_iのうちk個が1であるとする．このとき，

(i)　$FED(K(m_1,m_2,\cdots,m_n))=\sum_{i=1}^{n}(m_i-1)+k-1$

(ii)　$K(m_1,m_2,\cdots,m_n)$のR^sへの忠実線形埋め込みは，アフィン変換で移り合うものを除くと，唯一つ存在する．ただし，$s=FED(K(m_1,m_2,\cdots,m_n))$である．

この証明は省略するが，上の唯一の忠実線形埋め込みでは各 m_i個の独立頂点集合がそれぞれ正m_i-単体を作り，それらの重心のみで交わる独立な空間に配置されている．ただし，k≧2のときは，それらだけで正(k-1)-単体を構成して他の単体の重心に重なるの回避するようになっている．したがって，それぞれの単体ごとにまちまちの率で拡大・縮小をする自由度のみ許されている．

上の二つの定理が示唆するように，ある程度対称性の高いグラフの忠実線形埋め込みは（トポロジー的にではなく）ある程度の剛体的な一意性を持つのではないかと予想される．

【予想1】　辺推移的なグラフGのR^n（FED(G)＝n）への忠実線形埋め込みはアフィン変換で移り合うものを除くと一意的であろう．

【予想2】　頂点推移的かつ辺推移的なグラフGのR^n（FED(G)＝n）への忠実線形埋め込みは拡大・縮小を除くと一意的であろう．

グラフGが頂点（辺）推移的であるとはGの任意の二つの頂点（辺）がGの自己同型写像で移り合うことである．上の予想にはあまり根拠はないが，定理8，9とは矛盾しない．

◆グラフの被覆と平面性◆

これは以前述べたことがあるので，簡単に記す．ここでいうグラフの被覆とは頂点被覆とか辺被覆とかではなく，グラフを１次元複体として位相空間と考えたときの被覆空間のことである．

グラフＧの普遍被覆空間は木（Ｇが木でないときは無限の木）であるから，被覆空間を取らずともＧの適当な被覆空間を考えれば平面グラフになるかもしれない．この考えに基づいて私は[N2]の中でグラフの球面的種数（spherical genus）を定義し，その値は１，２または∞ の三通りしかないことを示した．この事実を言葉で言うと次の定理になる．

定理１０．　連結グラフＧの正則な有限被覆空間で平面的なものがあれば，1重または２重の平面的被覆空間が存在する．

１重のものが存在するということはＧ自身が平面的であることを意味する．２重のものが存在するときはＧが射影平面的であることを意味する．この定理の証明は２次元軌道体（2-orbifold）のオイラー数のアイディアを知っていればそれほど難しくない．

実際に与えられたグラフの球面的種数の決定を試みてみると，正則な被覆空間に話を限らなくとも定理が成立するのではないかという感触を得た．即ち，次のようなことが予想される．

【予想３】　連結グラフＧが平面的な有限被覆空間を持てば，Ｇは平面的または射影平面的であろう．

この予想を肯定的に解決するためには，真部分グラフがすべて射影平面的であるような非射影平面グラフ（少なくとも 103個はある）が平面的な有限被覆空間を持たないことを示せばよい．が，これは至難の技である．非正則被覆空間をいかにコントロールするかを考えたほうがよいだろう．

【参考文献】

[CG] J.H. Conway and C.McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 455-453.

[G] M.C. Golumbic, "Algorithic graph theory and perfect graphs", Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1980.

[N1] S. Negami, Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces, Tokyo Institute of Technology 1985, Thesis.

[N2] S. Negami, The spherical genus and virtually planar graphs, Res. Rep. Inf. Sci. T.I.T., A-100 (1985)

[S] H. Sachs, On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem, Graph Theory, Łagów 1981. Proceedings, Edited by M. Borowiecki, J.W. Kennedy and M.M. Syslo. Locture Notes in Math. 1018, Springer-Verlag, 1983.

[T] C. Thomassen, Interval representaions of planar graphs, J. Combinatorial Theory, Ser.B 40 (1986), 9-20.

本稿はトポロジーの知識をある程度仮定して書かれているため，初めて，幾何学的グラフ理論を学ぼうとする方には読みにくいことと思います．また，締切に追われて，書き殴りになってしまっていることをお詫び致します．