３次元多様体を与えるポリグラム

根　上　生　也
東京工業大学
理学部　情報科学科

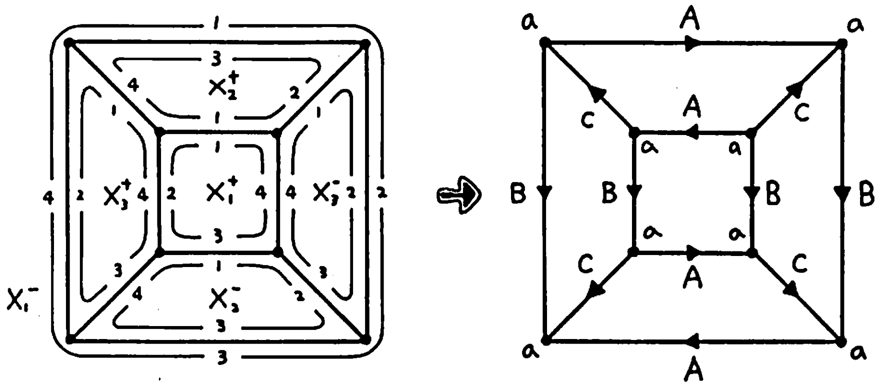
ＤＳ-ダイアグラムが必ず３次元閉多様体を表現するのに対して，その前段階的なポリグラムは３次元多様体を表さないこともある．そこで，与えられたポリグラムが３次元多様体を表すか否かを判定する手法が必要となる．が，現在採用されているポリグラムの定義ではボールの同一視の指示が必要以上に行われてしまうことがあり，判定条件をきれいな形で与えることの障害となっている．本稿では，ボールの表面の同一視の指示の与え方を適切なものに修正しそれが３次元多様体を与えるための必要十分条件をグラフのオイラー数を使って述べる．

B^3を３次元ボール，S^2をその境界面とする．ＧをS^2内に埋め込まれた連結グラフで偶数個の領域 $X_1^+, X_1^-; \cdots; X_n^+, X_n^-$ を持つとする．各領域$X_i^\pm$の境界に沿って読んだ頂点と辺の並び $\{v_{i1}^\pm, e_{i1}^\pm, \cdots, v_{im}^\pm, e_{im}^\pm\}$ に対して，

$$v_{ij}^+ \sim v_{ij}^-, \quad e_{ij}^+ \sim e_{ij}^-, \quad X_i^+ \sim X_i^-$$

と定める．さらに推移律により関係 ”～” を拡大して同値関係にする．この同値関係によりＧの頂点，辺，領域を同値類に分類し，各同値類ごとに同一視を行う．この同一視によりB^3の表面を貼り合わせて得られるＣＷ-複体をＭ(Ｇ)と記す．

普通のポリグラムだと先に同一視される頂点，辺のラベルを定めてしますが，ここでまず領域の貼り合わせ，それから自然に導かれる頂点，辺の同一視のみを行ってＭ(Ｇ)を作る．こうしないと頂点，辺を余計に同一視してしまう恐れがあることに注意したい．ただし，ＤＳ-ダイアグラムに話を限ればそれらの間には差はない．



上で述べた同値関係による同一視でGから得られる商空間G/〜を$\overline{G}$と表す．また，Gと$\overline{G}$の頂点数，辺数をそれぞれV，$\overline{V}$およびE，$\overline{E}$で表す．このときそれぞれのオイラー数は

$$\chi(G) = V - E, \quad \chi(\overline{G}) = \overline{V} - \overline{E}$$

となる．

ここまでの設定のもとで，次の定理を証明する：

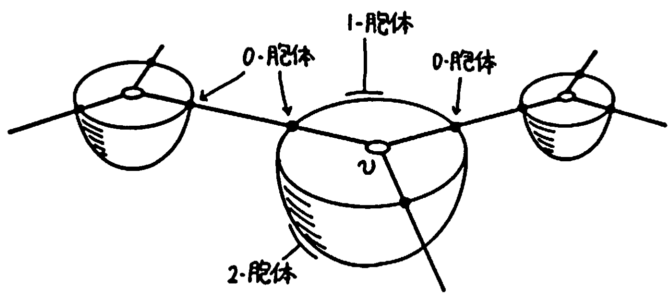
定理 1． M(G)が3次元閉多様体になるための必要十分条件は

$$\chi(G) = 2\chi(\overline{G})$$

となることである．

（証明） M(G)はS^2/〜を2-骨格として持つ胞体複体の構造を持つが，それを更に十分細かく細分しておき，そのときの各点$x \in M(G)$のリンク$lk(x)$を考える．xが M(G)−(S^2/〜)に属するときはB^3の内部にいるのと同じことだから，$lk(x)$は球面になる．(S^2/〜)−$\overline{G}$ の2-胞体上にxがあるときもB^3内の半球が貼り合って$lk(x)$を作るのでやはり球面である．無駄のない同一視の仕方により$lk(x)$が必ず連結になることに注意すれば，xが$\overline{G}$の辺上にあるときも$lk(x)$が球面なることはほぼ明かである．したがって，問題になるのはxが$\overline{G}$の頂点になっているときである．

そこで，lk(x) の構成要素をB^3に引き戻して考えてみる．今，xは$\overline{G}$の頂点だからxの引き戻しもGのいくつかの頂点vである．このとき，lk(x)の引き戻しは各vを囲うような半球状の2-胞体である．それがvに接続しているGの辺とぶつかる部分を lk(x) の0-胞体，領域とぶつかる部分を1-胞体と考えて， lk(x) の胞体分割を与えることができる．これらの胞体が同一視されてM(G)の中で閉曲面を作っていることは明かだろう．M(G)の構成法ではGの頂点が無駄に同一視されていないので，lk(x)は複数個の連結成分に別れることはない．



閉曲面の形状はオイラー数で完全に捉えられるから，$\overline{G}$の$\overline{V}$個のすべての頂点xに対して同時にlk(x)を考えて，そのオイラー数の総和を計算してみる．lk(x)の2-胞体の総数はGの頂点に対応させて数えられるので，V個である．1-胞体はGの領域の角に対応しているので，Gの領域の個数をF，領域の周の長さの平均値をdとおくと，のべdF個存在する．ただし，それらは2つずつ同一視されるので，実際はdF／2個である．最後に，0-胞体は$\overline{G}$の辺の両端の近くに1つずつ現れるので2$\overline{E}$個である．したがって，

$$\Sigma\ \chi(\mathrm{lk}(x)) = V - dF/2 + 2\overline{E}$$

となる．（ここで，Σは$\overline{G}$の頂点xすべてに対して総和をとるものとする．）
また，dF ＝ 2Eとなるので，これを上の式に代入して，

$$\Sigma \ \chi(\mathrm{lk}(x)) = V - E + 2\overline{E}$$

を得る．

もしM(G)が多様体になっているならば，lk(x)は球面になっているのでそのオイラー数は2となり，上の右辺は$2\overline{V}$になる．よって，

$$2\overline{V} = V - E + 2\overline{E}$$

となる．これは，$2\overline{E}$を移項すれば，定理の式に他ならない．逆にこの式が成り立つとすると，$\chi(\mathrm{lk}(x))$の平均値は2である．ところが，先に述べたようにlk(x)は連結な閉曲面なので$\chi(\mathrm{lk}(x))$の最大値も2だから，$\chi(\mathrm{lk}(x))$も2でなければならない．つまり，各lk(x)は球面になりM(G)が多様体であることが結論される．■