

**SELF Δ UNKNOTTING OPERATION
AND CONWAY POLYNOMIALS, IV**

中西 康剛 (神戸大学理学部)

1. INTRODUCTION

この報告は、大山淑之氏との共同研究の成果による。Matveev [M] 及び Murakami-Nakanishi [MN] により定義された Δ unknotting operation は、Fig. 1.1.1 にあるような結び目や絡み目の正則表示の間の局所変形である。さらに、表示される結び目や絡み目を κ 、 λ で表すとき、 κ と λ は互いに Δ move の 1 回の操作でうつるという。

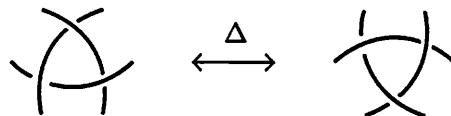


Fig. 1.1.1

Proposition 1 ([M], [MN]). 2 つの結び目や絡み目が Δ moves の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち、かつ、適切な成分の順序や向きをつけたときに、対応する成分間の絡み数が一致することである。

特に、 Δ move を施す 3 本の arcs がすべて同じ成分に属するとき、self Δ move という。 κ と λ が互いに self Δ moves の有限回の操作でうつりあうとき、 κ と λ は self Δ -equivalent であるという。成分数 μ の絡み目 $\kappa = \kappa_1 \cup \dots \cup \kappa_\mu$ について、 κ の Conway 多項式の z^i の項の係数 $a_i(\kappa)$ を用いて 2 つの整数不変量 $\delta_1(\kappa) = a_{\mu-1}(\kappa)$, $\delta_2(\kappa) = a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\kappa) \times (\sum_{i=1}^\mu a_2(\kappa_i))$ を考える。次の事実は岡田氏の結果 [岡田] の一般化になっている。

Proposition 2 ([岡田], [N]). 2 つの絡み目が self Δ moves の有限回の操作でうつりあうとき、 δ_2 が一致する。

Propositions 1, 2 から次の Corollary が得られる。

Corollary. 2つの2成分絡み目が *self Δ equivalent* であるとき, 2つの2成分絡み目の δ_1 と δ_2 が一致する.

Corollary から, 交叉点数が 7以下の素な2成分絡み目の ordered and oriented types について, self Δ moves でうつりあうかどうか, および, うつりあうとしたら何回必要かを [中西1, 2] で決定した. また, 次の疑問が自然に出てくる.

Question. 2つの整数不变量 $\delta_1(\kappa)$, $\delta_2(\kappa)$ は self Δ -equivalence の faithful な不变量か.

これに対して, 次のように肯定的に答えることができた.

Theorem 3. 2つの2成分絡み目が *self Δ equivalent* であるための必要十分条件は, 2つの2成分絡み目の δ_1, δ_2 が一致することである.

証明は第3節で与える.

2. C_n -MOVE と C_n -LINK

葉広氏は [H] で C_n -move を導入し, 結び目について, order n 以下の Vassiliev invariants が一致することと C_{n+1} -moves の有限回の操作でうつりあうことが同値であることを示した. 通常の結び目解消操作は C_1 -move に, Δ move は C_2 -move になっている. また, C_3 -move は [葉広] では clasp-pass move と呼ばれていた. 谷山氏と安原氏は [TY, TY2] で C_n -link を導入し, C_{n+1} -moves により C_n -link と絡み目のバンド和のバンドの絡み目を解消したり, 結び目を解消したり, バンドのねじれを解消したりできること, また, 他の C_m -link と絡み目のバンド和のバンドの足を通過して絡み目に沿ってすべらすことができることを示した. ここで, C_1 -link は Hopf-link であり, C_2 -link は Borrom 環である. fusion-bands の half-twists を表示するのに, Fig. 2.0.1 のような記号を用いることにする.

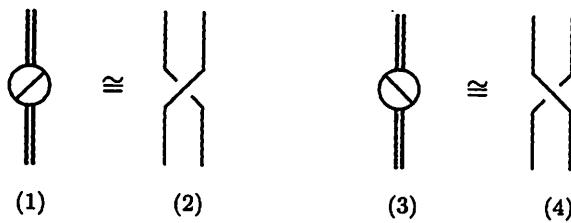


Fig. 2.0.1

2.1. Δ move と Borrom 環.

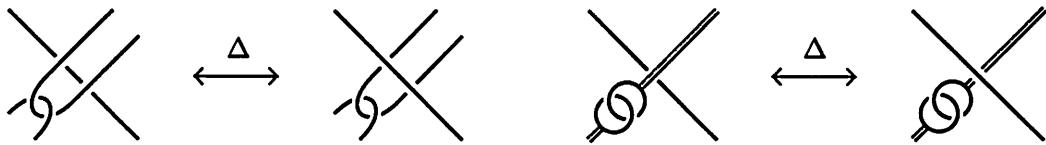


Fig. 2.1.1

Fig. 1.1.1 で描かれている Δ move (または C_2 -move) について、次の事実が [MN] と [TY] で知られている：“引き金はハードルを越える。”

Claim 2.1.1. Fig. 2.1.1 の局所変形は Δ move が 1 回で実現できる。

Claim 2.1.1 の特殊な場合として、Claim 2.1.2 が得られる。

Claim 2.1.2. Hopf-link についている fusion-band の half-twists の数を ± 2 だけ 1 回の Δ move で変えられる。

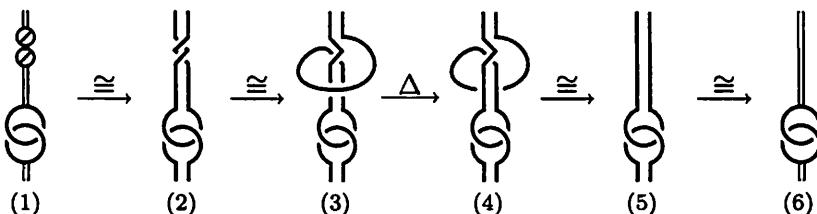


Fig. 2.1.2

Claim 2.1.3. Δ move は、Fig. 2.1.3 にあるように Borromean 環との fusion の結果として表現できる。



Fig. 2.1.3

2.2. Clasp-Pass Move と C_3 -Link.

Fig. 2.2.1 にある clasp-pass move (または C_3 -move) は、4-string trivial tangles の置き換えである。

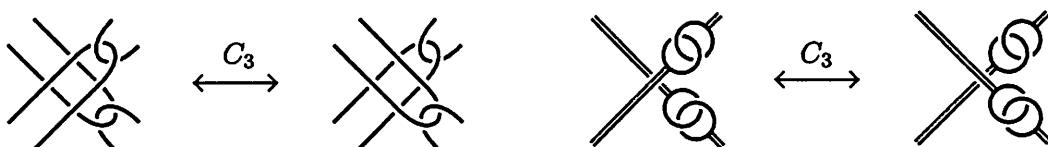


Fig. 2.2.1

論文 [TY] にあるように, Fig. 2.2.2 の局所変形も C_3 -move であり, Claim 2.2.1 を図示している.

Claim 2.2.1. *Borrom 環との fusion-band は, Fig. 2.2.2 にあるように, ハードルを越える.*

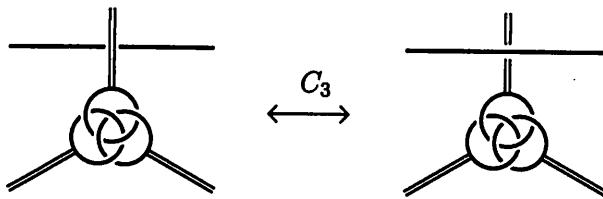


Fig. 2.2.2

Claim 2.2.1 の特殊な場合として, 次の Claims 2.2.2, 2.2.3 が得られる.

Claim 2.2.2. *Fig. 2.2.3 にあるように, Borrom 環についている fusion-band の half-twists の数を ± 2 だけ 1 回の clasp-pass move で変えられる.*

Claim 2.2.3. *Fig. 2.2.4 にあるように, Borrom 環についている fusion-band の half-twist を, 同じ Borrom 環についている別の fusion-band に, 2 回の clasp-pass moves でうつせる.*

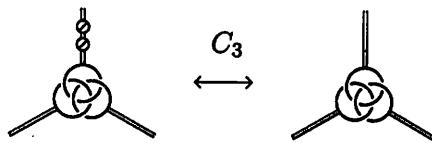


Fig. 2.2.3

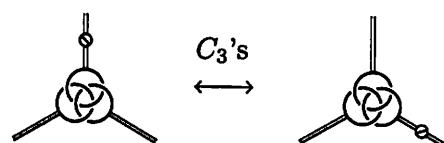


Fig. 2.2.4

Claim 2.2.4. *clasp-pass move は, Fig. 2.2.5 にあるように C_3 -link との fusion の結果として表現できる.*

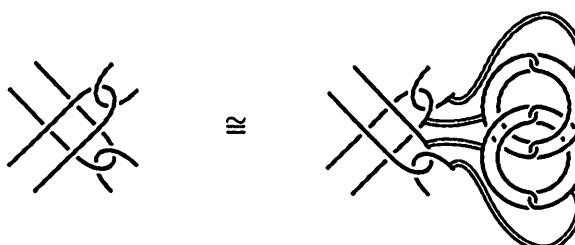


Fig. 2.2.5

2.3. C_4 -Move.

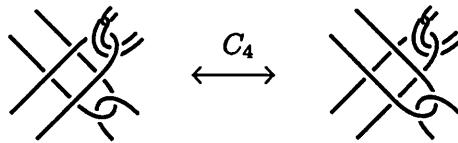


Fig. 2.3.1

Fig. 2.3.1 にある C_4 -move は, 5-string trivial tangles の置き換えである. Fig. 2.3.2 にある局所変形も C_4 -move である.

Claim 2.3.1. C_3 -link との fusion-band は, Fig. 2.3.2 にあるように, ハードルを越える.

Claim 2.3.1 の特殊な場合として, Claims 2.3.2 が得られる.

Claim 2.3.2. Fig. 2.3.3 にあるように, C_3 -link についている fusion-band の half-twists の数を ± 2 だけ 1 回の clasp-pass move で変えられる.

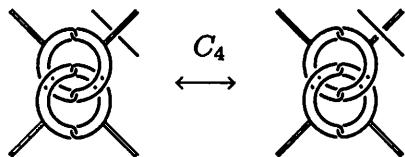


Fig. 2.3.2

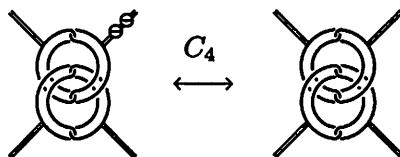


Fig. 2.3.3

C_4 -move は, C_4 -link との fusion の結果として表現できる.

2.4. C_n -Move と Self Δ Move.

self Δ move の定義より次の Claim 2.4.1 が得られる.

Claim 2.4.1. 同一の Borromé 環についている 3 本の fusion-bands 全てが同一の成分につながるとき, これらの fusion-bands は 1 回の self Δ move で除去できる.

Fig. 2.2.1 にあるように, clasp-pass move は 4-string trivial tangles の置き換えであり, 任意の 3 本の strings に対する 2 回の Δ moves で実現できる. (Figs. 2.1.1, 2.2.1.) このことにより, Claim 2.4.2 が得られる.

Claim 2.4.2. 同一の C_3 -link についている 4 本の fusion-bands の内 3 本が同一の成分につながるとき, これらの fusion-bands は 2 回の self Δ move で除去できる.

Fig. 2.3.1 にあるように, C_4 -move は 5-string trivial tangles の置き換えであり, 任意の 4 本の strings に対する 2 回の C_3 -moves で実現できる. (Figs. 2.2.1, 2.3.1.) このことにより, Claim 2.4.2 が得られる. さらに, 任意の 3 本の strings に対する高々 4 回の Δ

moves で実現できる。言い換えると、同一の C_4 -link についている 5 本の fusion-bands の内 3 本が同一の成分につながるとき、これらの fusion-bands は高々 4 回の self Δ move で除去できる。2-component link に対する C_4 -move は、同一の C_4 -link についている 5 本の fusion-bands の内 3 本が同一の成分につながるので、次の Claim 2.4.3 が得られる。

Claim 2.4.3. 2-component link に対して、 C_4 -link は有限回の self Δ move で除去できる。

上記の観察は葉広氏の観察によるもので、部分的に [OTY] にもある。

2.5. Borrom 環を生成する。

$(2, 2\delta_1)$ -torus link は、Fig. 2.5.1 の左上図にあるように、自明な絡み目と δ_1 個の Hopf-links の fusion の結果として実現できる。右側の部分を 1 回転させることにより、右上図が得られる。適切に fusion-bands の $\frac{1}{2}\delta_1(\delta_1 - 1)$ 個の交叉に clasp-pass moves を施すこと、左下図が得られる。 δ_1 本の fusion-bands に Δ moves を施することで、右下図が得られる。これは左上図の元の図と一致している。最後に施した δ_1 回の Δ moves のいずれも self Δ move ではないことに注意したい。この観察は [TY2] にある。

Claim 2.5.1. $(2, 2\delta_1)$ -torus link は、 $(2, 2\delta_1)$ -torus link と δ_1 個の Borrom 環と 有限個の C_3 -links との fusion の結果として実現できる。

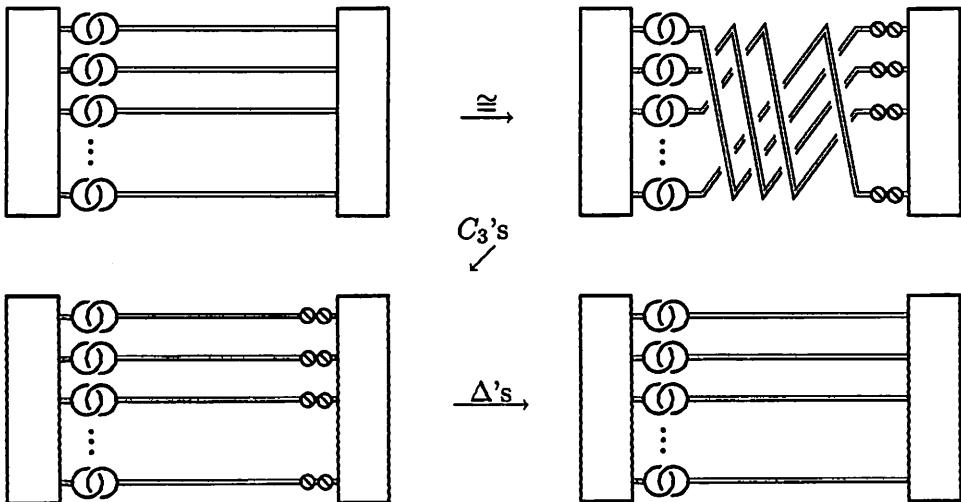


Fig. 2.5.1

3. PROOF OF THEOREM 3

この節では、有限回の self Δ moves により、与えられた 2-component link を $(2, 2\delta_1)$ -torus link と 高々 1 個の Borrom 環と 有限個の C_3 -links との fusion の結果として表現

する。Borrom 環と C_3 -links の個数から、 δ_2 を計算する。 δ_2 の一致から、Borrom 環と C_3 -links の個数の一致を導く。

3.1. Borrom 環のついた Torus Link.

Proposition 1 を思い起こそう。2つの2-component links の δ_1 が一致すれば、有限回の Δ moves で互いにうつりあう。言い換えれば、任意の 2-component link は、Fig. 3.1.1 にあるような $(2, 2\delta_1)$ -torus link と有限個の Borrom 環の fusion の結果として表現できる。同一の Borrom 環についている 3 本の fusion-bands 全てが同一の成分につながるなら、Claim 2.4.1 により 1 回の self Δ move で除去できる。異なる成分につながる fusion-bands につながる Borrom 環の個数を数える。もし奇数であって、 δ_1 も奇数であれば、Claim 2.5.1 からその個数を偶数に変えられる。故に、 δ_1 が奇数のときには、個数は偶数としてよい。 δ_1 が偶数のときには、個数の奇偶は定まらない。

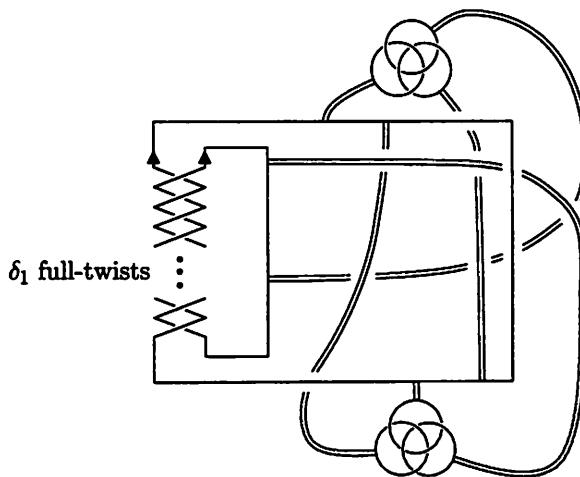


Fig. 3.1.1

3.2. Clasp-Pass Moves により Borrom 環についての Fusion-Band をすべらす。

次の Claim 3.2.1 は本質的に [TY2] にある。

Claim 3.2.1. Borrom 環についての fusion-band の足は、有限回の clasp-pass moves により、別の Borrom 環や C_3 -link についての fusion-band の足を通過できる。

Proof of Claim 3.2.1. 左側の Borrom 環についての fusion-band の足を滑らすことにより、Fig. 3.2.1 の左上図から右上図を得る。Claim 2.1.1 により、fusion-band と Borrom 環の一部の交叉を 2 回の clasp-pass moves で交換し、右上図から左下図を得る。fusion-band

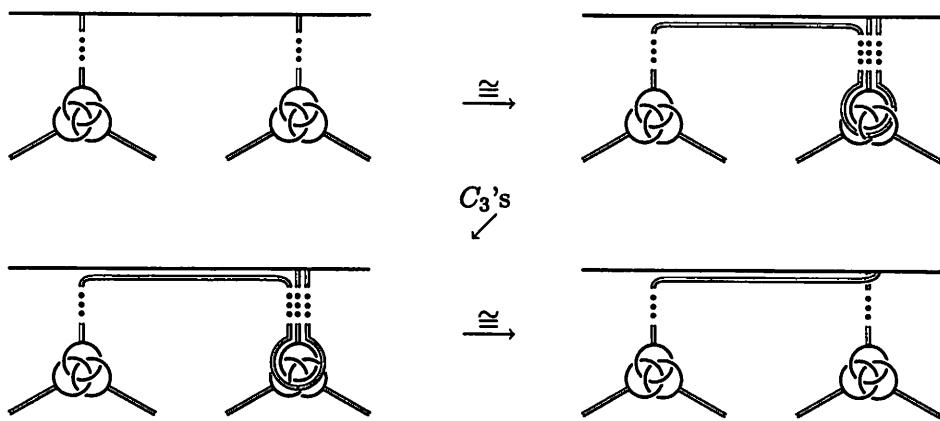


Fig. 3.2.1

を押し上げて、左下図から右下図を得る。□

Claim 2.2.1 から、fusion-bands の交叉交換は 2 回の clasp-pass moves で実現できる。だから、有限回の clasp-pass moves により、Borrom 環 についての fusion-band は、結びや絡みを解消し捻れを解消できる。Fig. 3.2.2 にあるように、与えられた 2-component link は、 $(2, 2\delta_1)$ -torus link と 有限個の Borrom 環 と C_3 -links との fusion の結果として実現できる。ここで Borrom 環 についての fusion-bands は適切に配置されている。

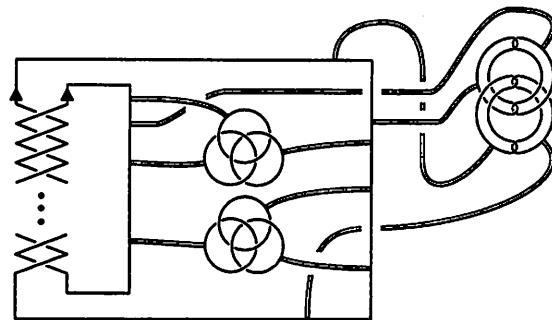


Fig. 3.2.2

3.3. Borrom 環 についての Fusion-Bands を除去する。

[TY2] に次の観察がある。Fig. 3.3.1 (1) で、Borrom 環 を水平軸の周りを π -回転することにより、(2) を得る。有限回の clasp-pass moves により、左下の fusion-band を下に回し他の Borrom 環 や C_3 -links の足を通過して、上まで持ってくることにより、(3) を得る。さらに、有限回の clasp-pass moves により、同一の Borrom 環 についての fusion-bands の half-twists の個数は Claims 2.2.2, 2.2.3 から、2 だけ変えられる。

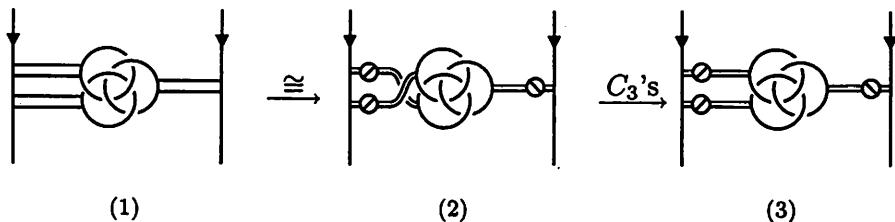


Fig. 3.3.1

Claim 3.3.1. 2 つの適切に配置された Borrom 環 についての *fusion-bands* は有限回の *clasp-pass moves* で除去できる。

Proof of Claim 3.3.1. Fig. 3.3.2 にあるように、適切に配置された Borrom 環について fusion-bands はみなせる。この変形を通じて、2 組の適切に配置された Borrom 環について fusion-bands において、fusion-bands の half-twists の数は、0 と 1 としてよい。Fig. 3.3.3 にあるように、この 2 組は 2 回の self Δ moves で除去できる。□

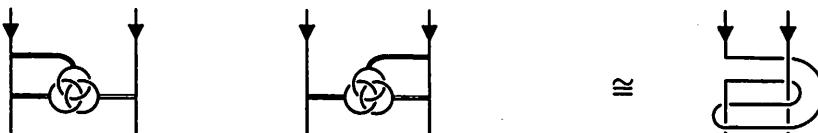


Fig. 3.3.2

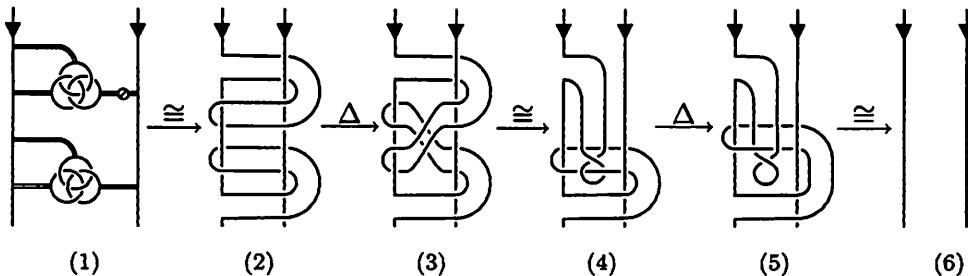


Fig. 3.3.3

故に、有限回の clasp-pass moves により、適切に配置された Borromé 環について fusion-bands の組数は 2 だけ減することができる。 δ_1 が奇数のときには、個数は 0 になる。 δ_1 が偶数のときには、個数は 0 または 1 になる。

3.4. C_4 -Moves により C_3 -Link についての Fusion-Band をすべらす.

次の Claim 3.4.1 は本質的に [TY2] にある.

Claim 3.4.1. C_3 -link についての *fusion-band* の足は、有限回の C_4 -moves により、別の Borrom 環や C_3 -link についての *fusion-band* の足を通過できる。

Claim 3.4.1 の証明は Claim 3.2.1 のそれと同様である。

Claim 2.3.1 から、*fusion-bands* の交叉交換は 2 回の C_4 -moves で（すなわち有限回の self Δ moves で）実現できる。だから、有限回の C_4 -moves により、（すなわち有限回の self Δ moves により、） C_3 -link についての *fusion-band* は、結びや絡みを解消し捻れを解消できる。Fig. 3.4.1 にあるように、与えられた 2-component link は、 $(2, 2\delta_1)$ -torus link と有限個の Borrom 環と C_3 -links との fusion の結果として実現できる。ここで Borrom 環と C_3 -link についての *fusion-bands* は適切に配置されている。Claim 2.4.2 により、同一の C_3 -link についての 4 本の *fusion-bnads* の内 2 本は同じ成分につながり、残りの 2 本は別な成分につながっているとしてよい。Fig. 3.4.2 にあるように、 C_3 -link についている *fusion-band* の half-twist は、 C_4 -move により、（すなわち有限回の self Δ moves により、）除去できる。言い換えると、次の Claim 3.4.2 を得る。

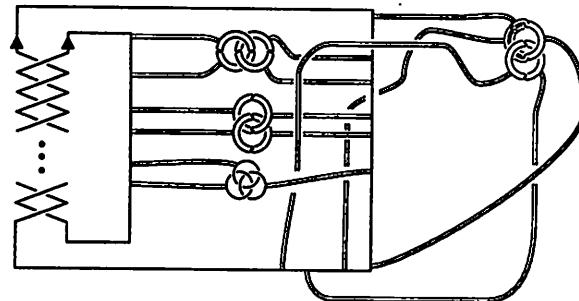


Fig. 3.4.1

Claim 3.4.2. *hooking* の相違は、有限回の C_4 -move により、（すなわち有限回の self Δ moves により、）*fusion-band* の half-twist で実現できる。

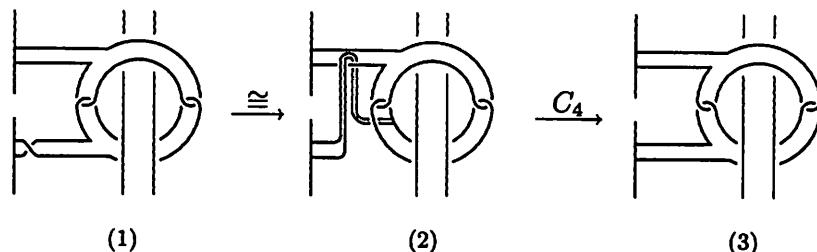


Fig. 3.4.2

3.5. C_3 -Links について Fusion-Bands を除去する.

適切に配置された C_3 -links について fusion-bands は、Fig. 3.5.1 にある (A) または (B) に変形できる。Fig. 3.5.2 の右側を捻ることにより、fusion-bands のつなぎ方が変えられるからである。

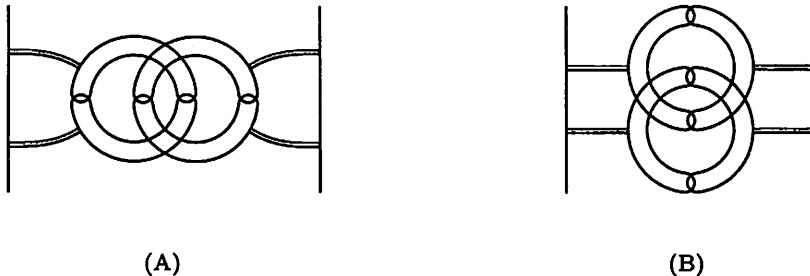


Fig. 3.5.1

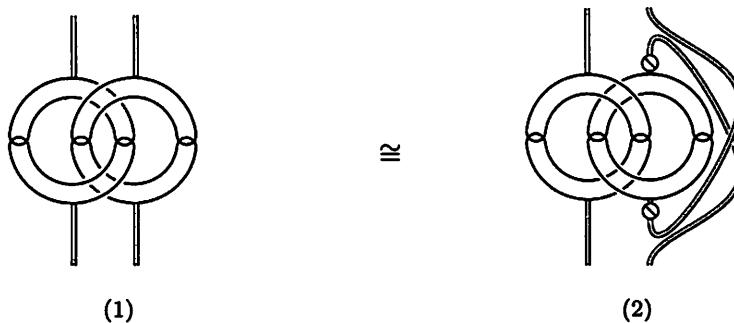


Fig. 3.5.2

(A) については、有限回の self Δ moves で除去できる。Fig. 3.5.3 にあるように、左側（または右側）の部分は、isotopy で、一種の Whitehead double に変形できる。故に、有限回の self Δ moves で除去できる。

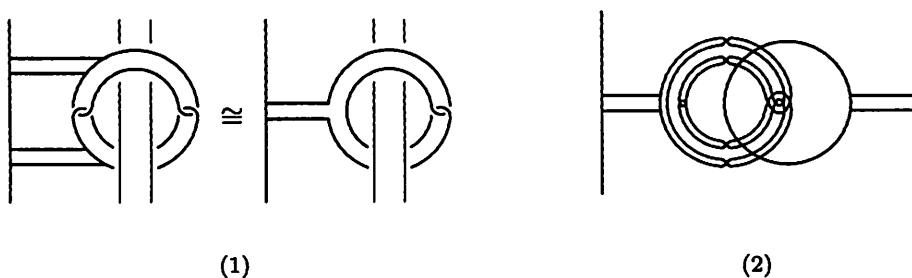


Fig. 3.5.3

(B)については、 C_3 -links の交叉の様子により、8種類のパターンがある。([中西 2], Fig. 2.8 参照。) 有限回の self Δ moves により、2種類のパターンに変形できる。例えば、Fig. 3.5.4 のパターン (a) はパターン (k) に変形できる。こうして、Fig. 3.5.5 の 2種類のパターンのみを考えればよいとわかる。

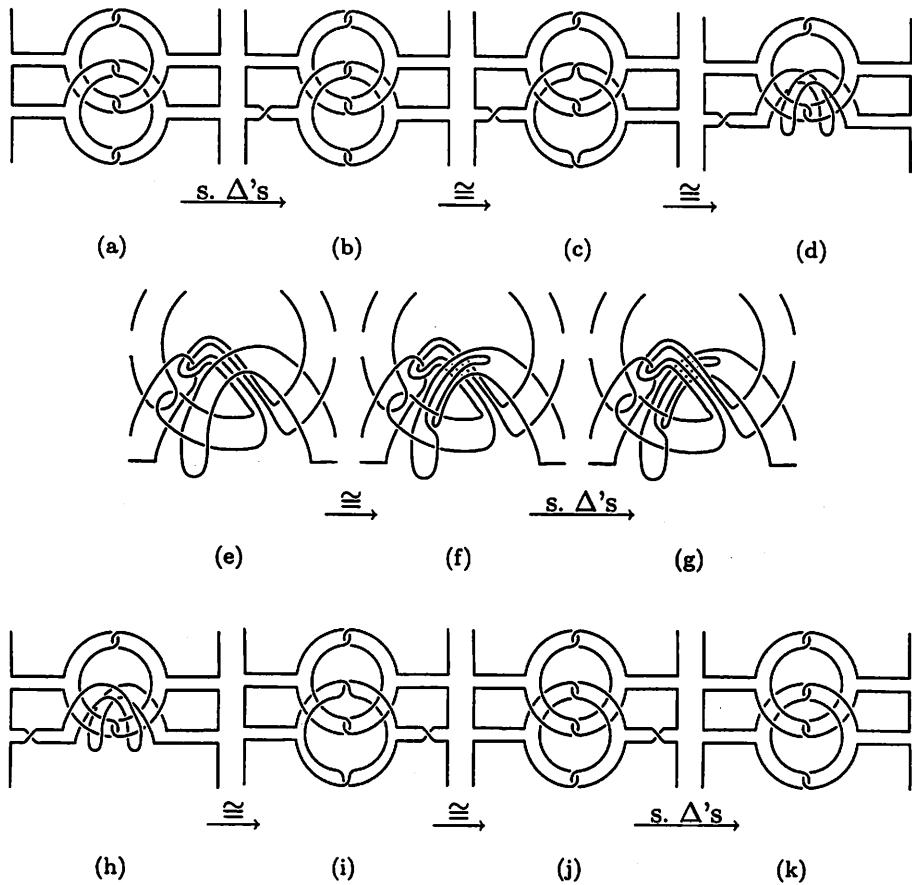


Fig. 3.5.4

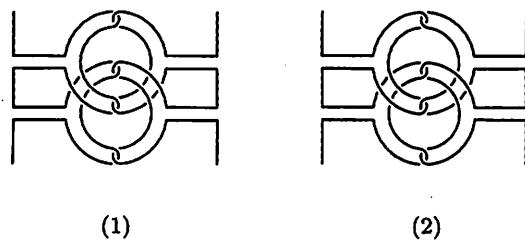


Fig. 3.5.5

Fig. 3.5.6 にあるように、有限回の C_4 -moves により、(すなわち有限回の self Δ moves により,) 両方のパターンがあれば除去できる。それ故に、任意の 2-component link は、 $(2, 2\delta_1)$ -torus link と適切に配置された高々 1 個の Borrom 環と有限個の C_3 -links との fusion の結果として表現できる。

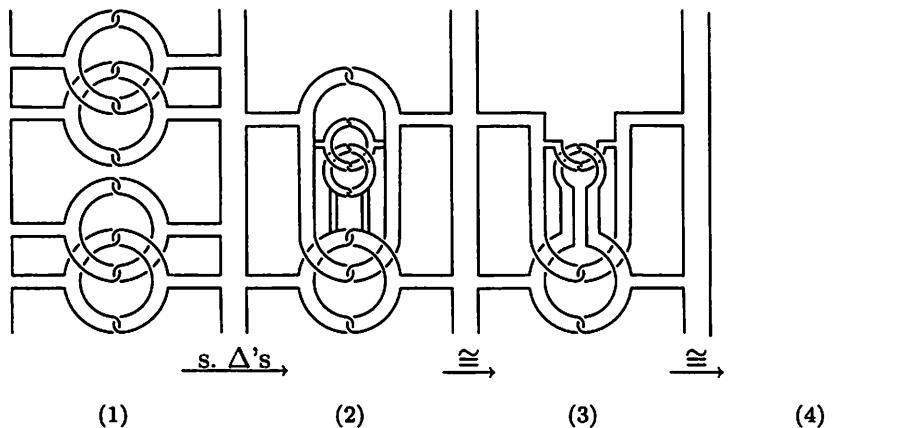


Fig. 3.5.6

3.6. δ_2 への貢献。

δ_1 が偶数のとき、適切に配置された Borrom 環についている fusion-bands は、 δ_2 を $\pm(\delta_1 + 1)$ だけ変える。 $\pm(\delta_1 + 1)$ は奇数であることに注意する。適切に配置された C_3 -link についている fusion-bands は、 δ_2 を ± 2 だけ変える。そして、 δ_2 は Borrom 環と C_3 -links の個数に依存する。 δ_1 と δ_2 が一致するとき、これらの個数が一致する。それ故に、2 つの 2-component links が有限回の self Δ moves でうつりあう。□

References

- [葉広] 葉広和夫, *Clasp-pass moves on knots*, 東京大学修士論文, 1997.
- [H] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. 4 (2000), 1–83.
- [M] S. V. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere*, Mat. Zametki 42 (1987), 268–278, 345 (Russian); English translation: Math. Notes 42 (1987), 651–656.
- [MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. 284 (1989), 75–89.
- [中西1] 中西 康剛, *Self- Δ -Unknotting Operation and Conway polynomials*, 箱根セミナ記録1998 (1999), 61–75.
- [中西2] 中西 康剛, *Self- Δ -Unknotting Operation and Conway polynomials, II*, 箱根セミナ記録1999 (2000), 31–44.
- [中西3] 中西 康剛, *Self- Δ -Unknotting Operation and Conway polynomials, III*, 箱根セミナ記録2000 (2001), 41–48.
- [N] Y. Nakanishi, *Delta link homotopy for two component links*, Topology and its Appl. (to appear).

- [NO] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, *Delta link homotopy for two component links, II*, J. Knot Theory Ramif. (to appear).
- [岡田] 岡田真枝, Δ -operation and Conway polynomial for classical knot, 大阪大学修士論文, 1991.
- [OTY] Y. Ohyama, K. Taniyama, and S. Yamada, Realization of Vassiliev invariants by unknotting number one knots, Tokyo J. Math. (to appear).
- [S] T. Shibuya, Self- Δ -equivalence of ribbon links, Osaka J. Math. **33** (1996), 751–760.
- [TY] K. Taniyama and A. Yasuhara, Local moves on spatial graphs and finite type invariants, Pacific J. Math. (to appear).
- [TY2] K. Taniyama and A. Yasuhara, Clasp-pass moves on knots, links and spatial graphs, Topology Appl. (to appear).