HAKONE SEMINAR 19 (2003) 45-47.

Δ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS FOR KNOTS

中西 康剛 （神戸大学理学部）

1. Introduction

Matveev [Ma] 及び Murakami-Nakanishi [MN] により定義された Δ move は, Fig. 1 にあるような結び目や絡み目の正則表示の間の局所変形である. さらに, 表示される結び目や絡み目を K_1, K_2 で表すとき, K_1 と K_2 は互いに Δ move の 1 回の操作でうつるという.

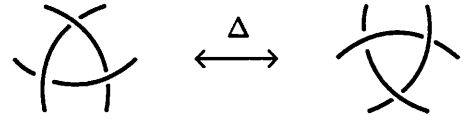

Fig. 1

結び目 K について, K^{Δ} で K から Δ move 1 回でうつる結び目の集合を表すことにする. また, 結び目の集合 $\mathcal{K}$ について, $\nabla_{\mathcal{K}}(t) = \{\nabla_K(t)\}_{K\in\mathcal{K}}$ で $\mathcal{K}$ に含まれる結び目の Conway 多項式の集合を表すことにする.

今回の報告の主定理は以下の通りである.

Theorem. 次のような z を変数とする j 個の多項式に対して,

$$\begin{aligned}\nabla_1 &= 1 + a_2z^2 + a_4^{(1)}z^4 + \cdots + a_{2n_1}^{(1)}z^{2n_1},\\ \nabla_2 &= 1 + a_2z^2 + a_4^{(2)}z^4 + \cdots + a_{2n_2}^{(2)}z^{2n_2},\\ &\cdots,\\ \nabla_j &= 1 + a_2z^2 + a_4^{(j)}z^4 + \cdots + a_{2n_j}^{(j)}z^{2n_j},\end{aligned}$$

次をみたす K_1, K_2 が存在する.

$$\nabla_{K_1}(z) = \nabla_{K_2}(z), \quad \nabla_{K_1^{\Delta}}(z) \not\ni \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_j, \quad \nabla_{K_2^{\Delta}}(z) \ni \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_j.$$

2. Proof of Theorem

よく知られているように, Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ と Conway 多項式 $\nabla_K(z)$ の間には $\nabla_K(t^{-1/2} - t^{1/2}) = \Delta_K(t)$ の関係がある. 次のような t を変数とする j 個の多項式

$\Delta_i(t) = \nabla_i(t^{-1/2} - t^{1/2})$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ を用意する.

また, よく知られているように, 任意の Alexander 多項式は unknotting number 1 である結び目で実現できる. Δ_* を, $\nabla_* = 1 - ja_2z^2$ とし $\Delta_*(t) = \nabla_*(t^{-1/2} - t^{1/2})$ をみたす多項式とする. そこで K^* を unknotting number 1 で $\Delta_{K^*}(t) = (\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_j\Delta_*)^2$ となる結び目とする. また, Δ_{**} を $\nabla_{**} = 1 - (a_2 \pm 1)z^2$ とし $\Delta_{**}(t) = \nabla_{**}(t^{-1/2} - t^{1/2})$ をみたす多項式とする. K^{**} を unknotting number 1 で $\Delta_{K^{**}}(t) = \Delta_{**}$ となる結び目とする.

$K_1 = K_*\#K_*\#K_*\#K_*\#K_{**}$ とする.

Levine [L] や Rolfsen [R1, R2] の方法である surgical view で考えると, K_1 の Alexander 行列は次の通りである.

$$\begin{pmatrix} (\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_j\Delta_*)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_{**} \end{pmatrix}.$$

ここで, $(\cdot) = (\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_j\Delta_*)$ と略記している.

もし K_1' がK_1 から 1 回の Δ move で得られるのであれば, K_1' は K_1 から 2 回の交叉交換で得られるので, surgical view で考えると, K_1' のAlexander 行列は次の形をしている.

$$\begin{pmatrix} (\cdot)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_{**} & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

ここで $\Delta_{K_1'}(t) = \Delta_j$ と仮定すると, 次が得られる.

$$\begin{vmatrix} (\cdot)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & (\cdot)^2 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_{**} & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{vmatrix} = \pm\Delta_j.$$

この等式を modulo Δ_j^2 で考えることにより矛盾が生じる.

故に, $\nabla_{K_1^\Delta}(z) \not\ni \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_j$ とわかる.

一方で, K_2 を unknotting number 1 で $\Delta_{K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t)$ をみたす結び目とする. このとき次の Lemma により, $\nabla_{K_2^\Delta}(z) \ni \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_j$. とわかる.

Lemma. 結び目 K は *algebraic unknotting number* 1 とする. $a'_2 = a_2(K) \pm 1$ と a 任意の整数a'_{2i} $(i = 2, 3, \ldots, \ell)$ について, $\nabla_{K'}(z) = 1 + a'_2 z^2 + a'_4 z^4 + \cdots + a'_{2\ell} z^{2\ell}$ をみたす結び目 $K' \in K^{\Delta}$ が存在する.

ここで algebraic unknotting number 1 のもとの定義 [Mu1] とは異なるが, 交叉交換 1 回で Alexander 多項式が 1 となるような結び目のことである. また, 条件 $a'_2 = a_2(K) \pm 1$ は Okada [O] の結果による制限である.

Lemma の証明は Murakami [Mu2] と同様におこなう. algebraic unknotting number 1 を実現する clasp に関して, 高次の clasps を適切に与えることにより実現される.

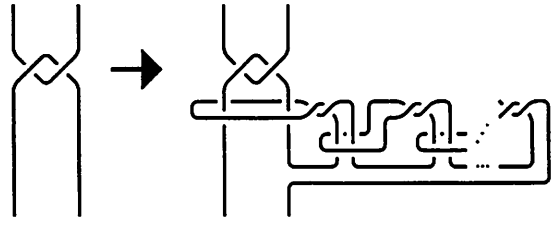

Fig. 2

REFERENCES

[L] J. Levine, *A characterization of knot polynomials*, Topology **4** (1965), 135–141.

[Ma] S. V. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere*, Mat. Zametki **42** (1987), 268–278, 345 (Russian); English translation: Math. Notes **42** (1987), 651–656.

[Mu1] H. Murakami, *Algebraic unknotting operation*, Q & A in General Topology **8** (1990), 283–292.

[Mu2] H. Murakami, *Delta-unknotting number and the Conway polynomial*, Kobe J. Math. **10** (1993), 17–22.

[MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.

[O] M. Okada, *Delta-unknotting operations and the second coefficients of the Conway polynomial*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 713–717.

[R1] D. Rolfsen, *A surgical view of Alexander's polynomial*, Geometric Topology (Proc. Park City, 1974), Lecture Notes in Math., vol. 438, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974, pp. 415–423.

[R2] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Series, vol. 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.