HAKONE SEMINAR 18 (2002) 35-39.

SELF Δ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, V

中西 康剛 (神戸大学理学部)

1. INTRODUCTION

この報告はここ数年の箱根セミナにおける報告 [中西1–5] の続編である. Matveev [M] 及び Murakami-Nakanishi [MN] により定義された Δ move は, Fig. 1 にあるような結び目や絡み目の正則表示の間の局所変形である. さらに, 表示される結び目や絡み目を κ, λ で表すとき, κ と λ は互いに Δ move の 1 回の操作でうつるという.

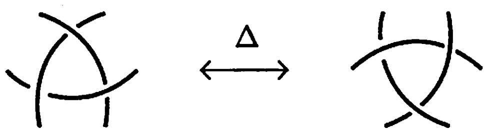

Fig. 1

Proposition 1 ([M], [MN]). 2 つの結び目や絡み目が Δ *moves* の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は, 2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち, かつ, 適切な成分の順序や向きをつけたときに, 対応する成分間の絡み数が一致することである.

特に, Δ move を施す 3 本の arcs がすべて同じ成分に属するとき, self Δ move という. κ と λ が互いに self Δ moves の有限回の操作でうつりあうとき, κ と λ は self Δ equivalent であるという. 成分数 μ の絡み目 $\kappa = \kappa_1 \cup \cdots \cup \kappa_\mu$ について, κ の Conway 多項式の z^i の項の係数 $a_i(\kappa)$ を用いて 2 つの整数不変量 $\delta_1(\kappa) = a_{\mu-1}(\kappa)$, $\delta_2(\kappa) = a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\kappa) \times (\sum_{i=1}^{\mu} a_2(\kappa_i))$ を考える.

Proposition 2 ([NO2]). 2 つの 2 成分絡み目が *self* Δ *equivalent* であるための必要十分条件は, 2 つの 2 成分絡み目の δ_1, δ_2 が一致することである.

さて, 3 以上の成分をもつ絡み目についてはどうかについて, この報告では考える. 結論からいえば, Conway 多項式の係数だけでは判定できない. そこで, 次の Alexander 不変量による評価を用いた.

Proposition 3 ([NS1]). 2 つの絡み目 κ, λ が *self* Δ *moves* の有限回の操作でうつりあうとき，適当に *Alexander* 行列 $A_\kappa(t_1,\dots,t_n)$, $A_\lambda(t_1,\dots,t_n)$ を選択すれば，

$$A_\kappa(t_1,\dots,t_n) \equiv A_\lambda(t_1,\dots,t_n) \bmod \{(1-t_1)^2,\dots,(1-t_n)^2\},$$
$$\Delta_\kappa(t_1,\dots,t_n) \equiv \pm t_1^{r_1}\cdots t_n^{r_n}\Delta_\lambda(t_1,\dots,t_n) \bmod \{(1-t_1)^2,\dots,(1-t_n)^2\}$$

が成り立つ.

上で、 $f(t_1,\dots,t_n) \equiv g(t_1,\dots,t_n) \bmod \{h_1(t_1,\dots,t_n),\dots,h_j(t_1,\dots,t_n)\}$ は，$f(t_1,\dots,t_n)$ と $g(t_1,\dots,t_n)$ が $\mathbf{Z}\langle t_1,\dots,t_n\rangle/(h_1(t_1,\dots,t_n),\dots,h_j(t_1,\dots,t_n))$ で同じ類に属することを意味する.

2. Example

次の Fig. 2 で示される 3 成分絡み目を考える. 成分の順序を入れ替えると 6 通りの絡み目が考えられる. この絡み目の真の部分絡み目はいずれも自明であるために，どのように成分の順序をつけても，絡み目自身および部分絡み目の Conway 多項式が変わらない. 故に，self Δ equivalent であるかどうかについて，Proposition 2 では判定できない.

以下，Proposition 3 により判定を試みる.

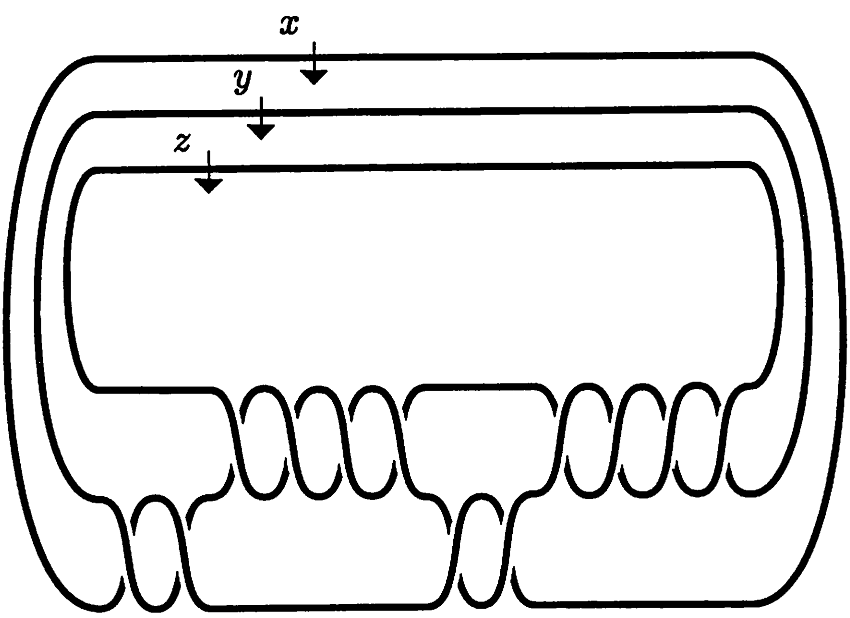

Fig. 2

この絡み目の補空間の基本群は次のような表示をもつ.

$$\langle x, y, z : R_1, R_2, R_3 \rangle.$$

ここで各関係子は次の通りである.

$$\begin{aligned}
R_1 = {} & y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \\
& xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yx^{-1}, \\
R_2 = {} & y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1} \\
& y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}zxyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xy \\
& z^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy \\
& zy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}zxyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}, \\
R_3 = {} & xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \\
& xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}zxyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1} \\
& y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \\
& y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}zxyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1} \\
& x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \\
& y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}yxyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}xyz^{-1} \\
& y^{-1}x^{-1}y^{-1}xyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyzy^{-1}x^{-1}y^{-1}.
\end{aligned}$$

これを自由微分することにより Alexander 行列が得られる.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

ここで行列の各成分は次の通りである.

$$\begin{aligned}
A_{11} = {} & -1 + 2y^{-1} - y^{-2} + x - 2xy^{-1} + xy^{-2} + z^{-1} - 2y^{-1}z^{-1} + y^{-2}z^{-1} - xz^{-1} \\
& +2xy^{-1}z^{-1} - xy^{-2}z^{-1}, \\
A_{12} = {} & -y^{-1} + y^{-2} - x + 3xy^{-1} - 2xy^{-2} + x^2 - 2x^2y^{-1} + x^2y^{-2} + y^{-1}z^{-1} \\
& -y^{-2}z^{-1} + xz^{-1} - 3xy^{-1}z^{-1} + 2xy^{-2}z^{-1} - x^2z^{-1} + 2x^2y^{-1}z^{-1} - x^2y^{-2}z^{-1}, \\
A_{13} = {} & 2x^2z^{-1} - x^2y^{-1}z^{-1} - x^2yz^{-1} + xyz^{-1} - 2xz^{-1} + xy^{-1}z^{-1},
\end{aligned}$$

$$A_{21} = yz^2 - 2z^2 + y^{-1}z^2 - 2yz + 5z - 4y^{-1}z + y^{-2}z + y - 4 + 5y^{-1} - 2y^{-2} + z^{-1} - 2y^{-1}z^{-1} + y^{-2}z^{-1} + x^{-1}z^2 - 2x^{-1}y^{-1}z^2 + x^{-1}y^{-2}z^2 + x^{-1}yz - 3x^{-1}z + 5x^{-1}y^{-1}z - 3x^{-1}y^{-2}z - x^{-1}y + 3x^{-1} - 4x^{-1}y^{-1} + 3x^{-1}y^{-2} - x^{-1}y + x^{-1}y^{-1}z^{-1} - x^{-1}y^{-2}z^{-1},$$

$$A_{22} = xyz^2 - 2xz^2 + xy^{-1}z^2 - 2xyz + 5xz - 4xy^{-1}z + xy^{-2}z + xy - 4x + 5xy^{-1} - 2xy^{-2} + xz^{-1} - xy^{-1}z^{-1} + xy^{-2}z^{-1} - xy^{-1}z^{-1} - yz^2 + 2z^2 - 3y^{-1}z^2 + y^{-2}z^2 + 2yz - 6z + 8y^{-1}z - 4y^{-2}z - y + 5 - 7y^{-1} + 5y^{-2} - z^{-1} + 2y^{-1}z^{-1} - 2y^{-2}z^{-1}x^{-1}y^{-1}z^2 - x^{-1}y^{-2}z^2 - 2x^{-2}z + x^{-1}z + 2x^{-1}y^{-2}z - x^{-1} + 2x^{-1}y^{-1} - x^{-1}y^{-2} - x^{-1}y^{-1}z^{-1},$$

$$A_{23} = -xy^2z + 2xyz - xz + y^2z - 2yz + 2z - y^{-1}z + xy^2 - 3xy + 3x - xy^{-1} - y^2 + 3y - 4 + 2y^{-1} + x^{-1}y^{-1} - x^{-1}y^{-2} + xyz^{-1} - 2xz^{-1} + xy^{-1}z^{-1} - yz^{-1} + z^{-1} - y^{-1}z^{-1} + x^{-1}y^{-1}y^{-1}z^{-1},$$

$$A_{31} = -y^3z^2 + 2y^2z^2 - yz^2 + 2y^3z - 5y^2z + 4yz - z - y^3 + 4y^2 - 6y + 4 - y^{-1} - y^2z^{-1} + 3yz^{-1} - 3z^{-1} + y^{-1}z^{-1} - x^{-1}y^2z^2 + 2x^{-1}yz^2 - x^{-1}z^2 - x^{-1}y^3z + 3x^{-1}y^2z - 5x^{-1}yz + 4x^{-1}z - x^{-1}y^{-1}z + x^{-1}y^3 - 3x^{-1}y^2 + 5x^{-1}y - 5x^{-1} + 2x^{-1}y^{-1} + x^{-1}y^2z^{-1} - 2x^{-1}yz^{-1} + 2x^{-1}z^{-1} - x^{-1}y^{-1}z^{-1},$$

$$A_{32} = -xy^3z^2 + 2xy^2z^2 - xyz^2 + y^3z^2 - 2y^2z^2 + 3yz^2 - z^2 - x^{-1}yz^2 + x^{-1}z^2 + 2xy^3z - 5xy^2z + 4xyz - xz - 2y^3z + 6y^2z - 8yz + 5z - y^{-1}z - x^{-1}y^2z + 2x^{-1}yz - 2x^{-1}z + x^{-1}y^{-1}z + x^2y^2 - xy^3 + 4xy^2 - 6xy + 4x - xy^{-1} + y^3 - 5y^2 + 8y - 8 + 3y^{-1} + x^{-1}y^2 - 2x^{-1}y + 2x^{-1} - x^{-1}y^{-1} - xy^2z^{-1} + 2xyz^{-1} - 3xz^{-1} + xy^{-1}z^{-1} + y^2z^{-1} - 3yz^{-1} + 4z^{-1} - 2y^{-1}z^{-1} + x^{-1}yz^{-1} - x^{-1}z^{-1},$$

$$A_{33} = xy^4z - 2xy^3z + xy^2z - y^4z + 2y^3z - 2y^2z + yz - xy^4 + 3xy^3 - 3xy^2 + xy + y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 3y + 1 - x^{-1}y + x^{-1} - xy^3z^{-1} + 3xy^2z^{-1} - 3xyz^{-1} + xz^{-1} + y^3z^{-1} - 2y^2z^{-1} + 2yz^{-1} - z^{-1} - x^{-1}z^{-1} + x^{-1}y^{-1}z^{-1}.$$

上記の行列の 2 次の elementary ideal は mod $\{(1-x)^2, (1-y)^2, (1-z)^2\}$ で,

$$(1-y, 1-z)$$

になる. x, y, z に関して対称でないので, 与えられた絡み目の成分の順序を入れ替えて得られる 6 つの絡み目のうち, 少なくとも 3 つは self Δ equivalent でないことがわかる.

References

[M] S. V. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere*, Mat. Zametki **42** (1987), 268–278, 345 (Russian); English translation: Math. Notes **42** (1987), 651–656.

[MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.

[中西1] 中西 康剛, *Self-Δ Unknotting Operation and Alexander invariants*, 箱根セミナ記録1997 (1998), 17–20.

[中西2] 中西 康剛, *Self-Δ Unknotting Operation and Conway polynomials*, 箱根セミナ記録1998 (1999), 61–75.

[中西3] 中西 康剛, *Self-Δ Unknotting Operation and Conway polynomials, II*, 箱根セミナ記録1999 (2000), 31–44.

[中西4] 中西 康剛, *Self-Δ Unknotting Operation and Conway polynomials, III*, 箱根セミナ記録2000 (2001), 41– 48.

[中西5] 中西 康剛, *Self Δ Unknotting Operation and Conway polynomials, IV*, 箱根セミナ記録2001 (2002).

[N] Y. Nakanishi, *Delta link homotopy for two component links*, Topology and its Appl. **121** (2002), 169–182.

[NO1] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, *Delta link homotopy for two component links, II*, J. Knot Theory Ramif. **11** (2002), 353–362.

[NO2] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, *Delta link homotopy for two component links, III*, Proc. Math. Soc. Japan (to appear).

[NS1] Y. Nakanishi and T. Shibuya, *Relations among self Delta-equivalence and self Sharp-equivalences for links*, Proc. of Knots in Hellas 1998, Editor: J.H. Przytycki et al, World Sci. Publ., Singapore, 2000, pp. 353–360.

[NS2] Y. Nakanishi and T. Shibuya, *Link homotopy and quasi self Delta-equivalence for links*, J. Knot Theory Its Ramif. **9** (2000), 683 – 691.