HAKONE SEMINAR 16 (2000) 41-48.

SELF-Δ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, III

中西 康剛 （神戸大学理学部）

1. Introduction

この報告は、箱根セミナの記録 [中西] に引き続くもので大山氏との共同研究の成果である。 Matveev [M] 及び Murakami-Nakanishi [MN] により定義された Δ-unknotting operation は、Fig. 1.1 にあるような 1 箇所のみ異なるような 2 つの結び目や絡み目の正則表示 K, L の間の局所変形である。さらに、 K, L で表示されるような結び目や絡み目を κ, λ で表すとき、κ と λ は互いに Δ-move の 1 回の操作でうつるという。

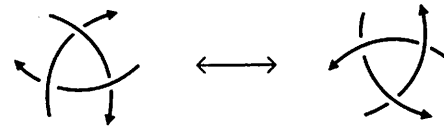


Fig. 1.1

成分数 μ の絡み目 $\kappa = \kappa_1 \cup \cdots \cup \kappa_\mu$ について、 κ の Conway 多項式の z^i の項の係数 $a_i(\kappa)$ を用いて 2 つの整数不変量 $\delta_1(\kappa) = a_{\mu-1}(\kappa)$, $\delta_2(\kappa) = a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\kappa) \times (\sum_{i=1}^{\mu} a_2(\kappa_i))$ を考える。 次の事実が知られている。

Proposition 1 ([M], [MN]). 2 つの結び目や絡み目が Δ-*moves* の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち、かつ、適当な成分の順序や向きをつけたときに、対応する成分間の絡み数が一致することである。

Corollary A. 2 つの 2 成分絡み目が Δ-*moves* の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、2 つの 2 成分絡み目の δ_1 が一致することである。

特に、Δ-move を施す 3 本の arcs がすべて同じ成分に属するとき、self-Δ-move という。κ と λ が互いに self-Δ-moves の有限回の操作でうつりあうとき、κ と λ は self-Δ-equivalent であるという。 次の事実は先の論文 [N], [中西] で示しているが、これは岡田氏の結果 [岡田] の一般化になっている。

Proposition 2. 2 つの μ 成分絡み目 $\kappa = \kappa_1 \cup \cdots \cup \kappa_\mu$, $\lambda = \lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_\mu$ が *self-Δ-moves* の有限回の操作でうつりあうとき、次が成り立つ。

$$a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\kappa) \times (\sum_{i=1}^{\mu} a_2(\kappa_i)) = a_{\mu+1}(\lambda) - a_{\mu-1}(\lambda) \times (\sum_{i=1}^{\mu} a_2(\lambda_i)).$$

Corollary B. 2 つの 2 成分絡み目が *self-Δ-moves* の有限回の操作でうつりあうとき、2 つの 2 成分絡み目の δ_2 が一致する。

Corollaries A, B から、交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、self-Δ-moves でうつりあうかどうか、および、うつりあうとしたら何回必要かを先の論文で決定した。また、次の疑問が自然に出てくる。

Question. 2 つの整数不変量 $\delta_1(\kappa), \delta_2(\kappa)$ は self-Δ-equivalence の faithful な不変量か。

3 成分以上の絡み目については、次のような否定的な例がある。2 つの Whitehead links の連結和を考えると、Conway 多項式は $\Delta(z) = z^6$ より、$\delta_1 = \delta_2 = 0$ である。これは自明な 3 成分絡み目と一致している。ところが、部分絡み目を絡み目を考えると、Whitehead link と自明な 2 成分絡み目が self-Δ-equivalent になることがないことは、以前に示したとおりである。

ここでは、2 つの整数不変量 $\delta_1(\kappa), \delta_2(\kappa)$ がどのような値をとりうるのかを考える。

Theorem 3. *(1)* 任意の偶数 n_1 と任意の整数 n_2 の対について、$\delta_1(\kappa) = n_1, \delta_2(\kappa) = n_2$ をみたすような 2 成分絡み目 κ が存在する。

(2) 任意の奇数 n_1 と任意の偶数 n_2 の対についてて、$\delta_1(\kappa) = n_1$, $\delta_2(\kappa) = n_2$ をみたすような 2 成分絡み目 κ が存在する。

(3) 任意の奇数の対 n_1, n_2 について、$\delta_1(\kappa) = n_1$, $\delta_2(\kappa) = n_2$ をみたすような 2 成分絡み目 κ は存在しない。

証明は次の節で与える。

Acknowledgements. 児玉宏児氏と彼のコンピュータプログラム "Knot" に謝意を表したい。このプログラムにより、Conway 多項式などの不変量の計算が容易になった。

2. Proofs of Theorem 3

2.1. C_n-move and C_n-link.

葉広氏は [H] で C_n-move を導入し、2 つの結び目が order n 以下の Vassiliev invariants が一致することと C_{n+1}-moves の有限回の操作で移りあうことが同値であることを示した。

ここで Δ-move は C_2-move になっている。谷山氏と安原氏は [TY] で C_n-link を導入し、C_{n+1}-moves により C_n-link と絡み目のバンド和のバンドの絡み目を解消したり、結び目を解消したり、バンドのねじれを解消したりできること、また、他の C_m-link と絡み目のバンド和のバンドの付け根を越えて絡み目に沿ってスライドできることを示した。ここで、C_2-link は Borrom 環である。大山氏と谷山氏と山田氏は [OTY] で special C_n-move と special C_n-link model を導入し、どの C_n-move も special C_n-move で表せることを示し、絡み目に対する C_n-move が絡み目と special C_n-link model のバンド和で表せることを示した。

2.2. Δ-move.

Proposition 1 により、2 つの 2 成分絡み目の δ_1 が一致すれば、Δ-moves の有限回の操作で移りあう。言い換えれば、どの 2 成分絡み目も $(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環のバンド和で表せる。(Fig. 2.1)

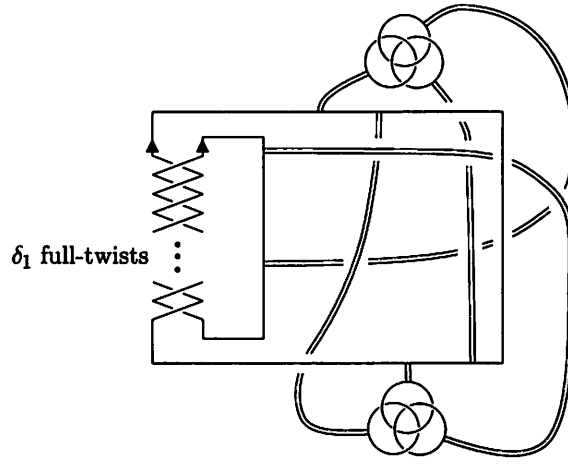


Fig. 2.1

2.3. C_3-move.

C_3-moves の有限回の操作で Fig. 2.2 にあるように、Borrom 環のバンド和を適切に変形でき、どの 2 成分絡み目も$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環と有限個の C_3-links とのバンド和で表せる。ここで、Borrom 環の 3 本の足がすべて同じ成分にあるのなら self-Δ-move により解消できるので、Borrom 環の 3 本の足は異なる成分にあるとしてよい。Borrom 環の 2 本以上のバンドにねじれがあれば、Fig. 2.3 で示される操作をすることで本数が減らせれる。水平軸で半回転すれば (1) から (2) になる。左下のバンド

を他の Borrom 環及び C_3-links に関するバンドの足を越えて下へ、そして、ぐるっと回して上までもってくると (2) から (3) が得られる。だから、バンドのねじれは高々 1 本だけとしてよい。

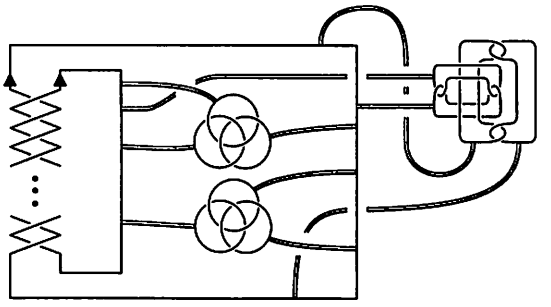
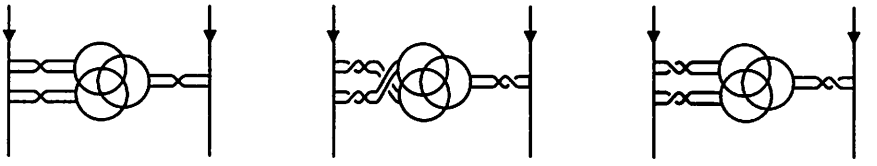


Fig. 2.2



(1) (2) (3)

Fig. 2.3

2.4. C_4-move.

C_4-moves の有限回の操作で Fig. 2.4 にあるように、C_3-links のバンド和を適切に変形でき、どの 2 成分絡み目も$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環と有限個の C_3-links と有限個の C_4-links とのバンド和で表せる。ここで、C_3-link の 4 本の足の内 3 本が同じ成分にあるのなら self-Δ-move により解消できるので、C_3-link の 4 本の足は 2 本ずつ異なる成分にあるとしてよい。C_3-link のあるバンドにねじれがあれば、Fig. 2.5 で示される操作をすることで本数が減らせれる。イソトピーにより (1) から (2) になる。C_4-move とイソトピーで (2) から (3) が得られる。だから、C_3-link のバンドのねじれはないとしてよい。

2.5. Self-Δ-move.

C_4-move は 5 本からなるタングルの置き換えであり、2 成分絡み目に対する C_4-move では 5 本の内 3 本は同じ成分に属するから、2 回の self-Δ-moves で実現できる。故に、Fig.

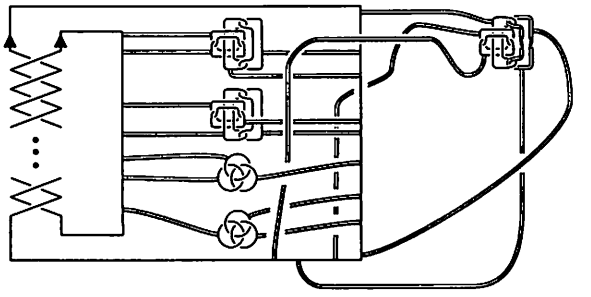
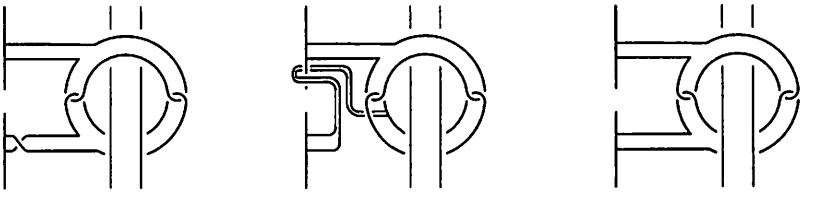


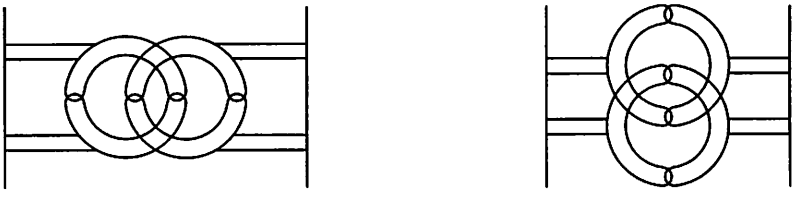
Fig. 2.4



(1) (2) (3)

Fig. 2.5

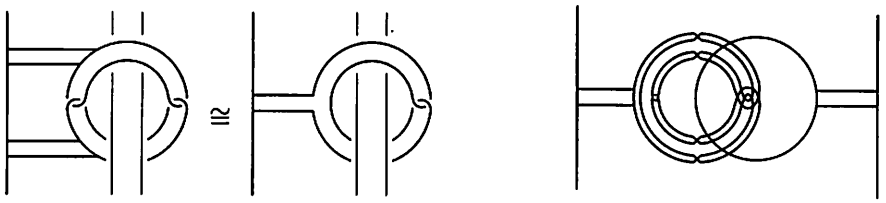
2.4 の $(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環と有限個の C_3-links と有限個の C_4-links とのバンド和は、$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環と有限個の C_3-links との適切なバンド和に self-Δ-moves の有限回の操作で変形できる。 2.4 節で述べたように、C_3-link の 4 本の足は 2 本ずつ異なる成分にあるとしてよい。 また、C_3-link のバンドのねじれはないとしてよい。 このとき、Fig. 2.6 の (A), (B) の2 種類が考えられる。



(A) (B)

Fig. 2.6

(A) については、 self-Δ-moves の有限回の操作で解消できる。 バンド和の左半分あるいは右半分はイソトピーによりFig. 2.7 (1) にあるように Whitehead double に変形できる。 それ故に、全体としては、Fig. 2.7 (2) にあるように iterated Whitehead double に

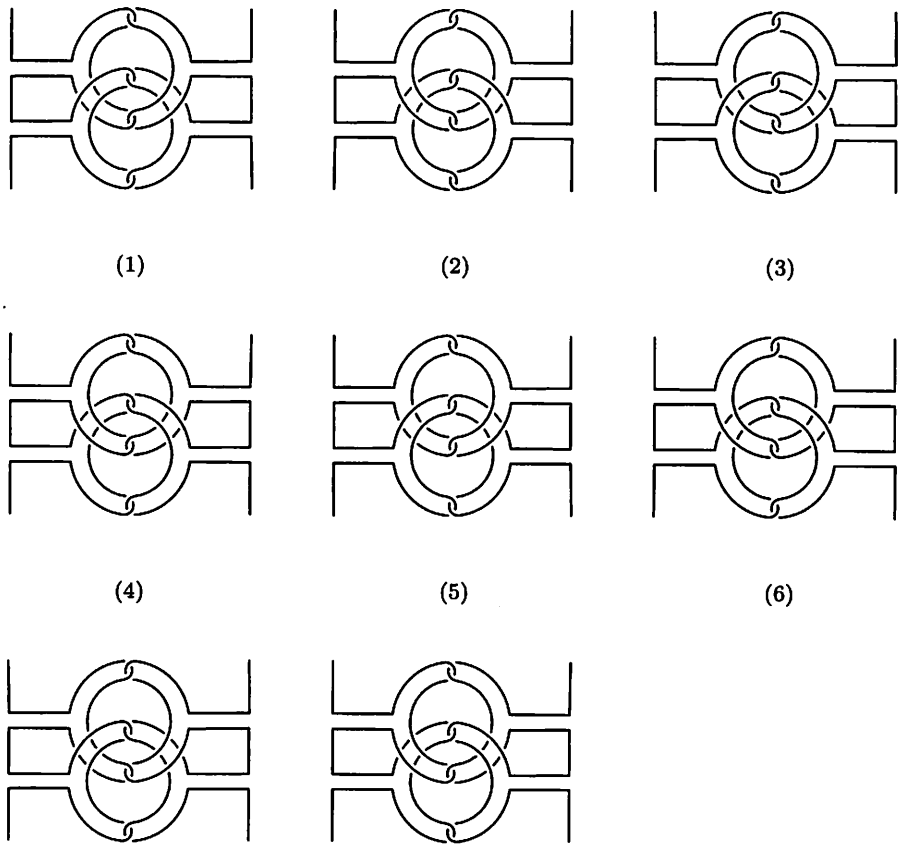


(1) (2)

Fig. 2.7

変形できる。 だから、self-Δ-moves の有限回の操作で解消できる。

(B) については、 Fig. 2.8 にあるように 8 種類がある。

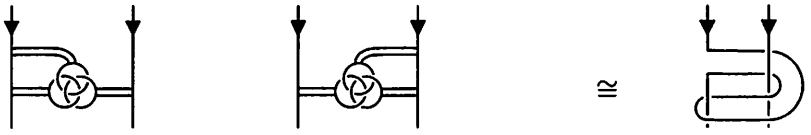


(1) (2) (3)

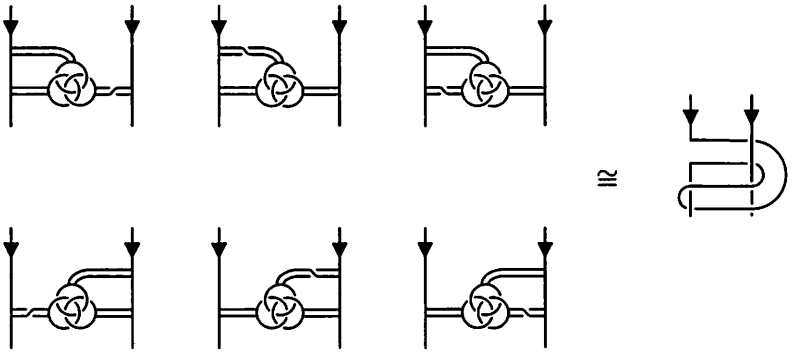
(4) (5) (6)

(7) (8)

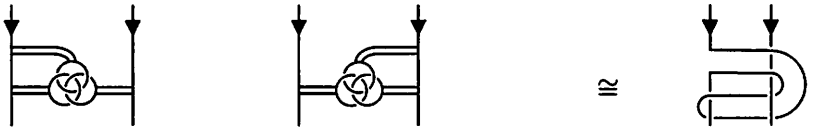
Fig. 2.8



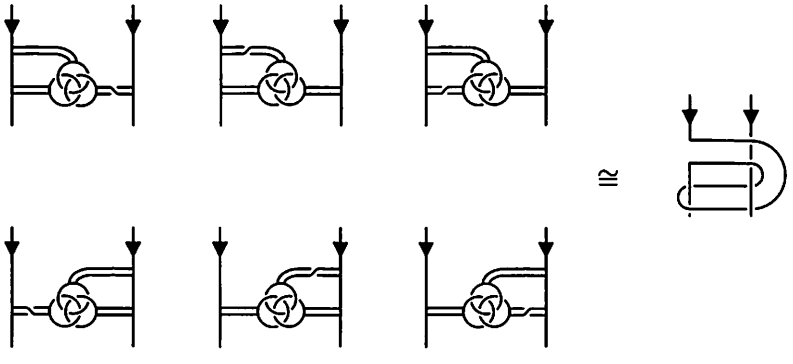
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.9

2.6. Whitehead grabber.

与えられた 2 成分絡み目は、$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目と有限個の Borrom 環と有限個の (B) 型の C_3-links との適切なバンド和に self-Δ-moves の有限回の操作で変形できた。2.3 節で述べたように、Borrom 環の 3 本の足は異なる成分にあるとしてよい。また、バンドのねじれは高々 1 本だけとしてよい。このとき、有限個の Borrom 環との適切なバンド和は、イソトピーにより Fig. 2.9 の (a), (b), (c), (d) のいずれかの Whitehead grabber になる。

2.7. Effect on δ_2.

Fig. 2.8 の (B) の C_3-links は δ_2 を ± 2 だけかえるので、δ_2 の偶奇を変えない。Fig. 2.9 の (a), (b) の Whitehead grabbers は δ_2 を $\pm(\delta_1 + 1)$ だけかえる。また、Fig. 2.9 の (c), (d) の Whitehead grabbers は δ_2 を $\pm(\delta_1 - 1)$ だけかえる。$\pm(\delta_1 + 1)$ と $\pm(\delta_1 - 1)$ の組み合わせにより Theorem 3 の証明が得られる。δ_1 が奇数のとき、$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目の δ_2 は偶数であり、$\pm(\delta_1 + 1)$ と $\pm(\delta_1 - 1)$ も偶数であるから、$\pm(\delta_1 + 1)$ と $\pm(\delta_1 - 1)$ の組み合わせからは偶数しか生じない。δ_1 が偶数のとき、$(2, 2\delta_1)$-トーラス絡み目の δ_2 は奇数であり、$\pm(\delta_1 + 1)$ と $\pm(\delta_1 - 1)$ も奇数であるから、$\pm(\delta_1 + 1)$ と $\pm(\delta_1 - 1)$ の組み合わせからすべての整数が生じる。

References

[H] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000), 1–83.

[M] S. V. Matveev, *Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere*, Mat. Zametki **42** (1987), 268–278, 345 (Russian); English translation: Math. Notes **42** (1987), 651–656.

[MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.

[中西] 中西 康剛, *Self-Δ Unknotting Operation and Conway polynomials, II*, 箱根セミナ記録1999 (2000), 31–44.

[N] Y. Nakanishi, *Delta link homotopy for two component links*, Topology and its Appl. (to appear).

[岡田] 岡田真枝, *Δ-operation and Conway polynomial for classical knot*, 大阪大学修士論文, 1991.

[OTY] Y. Ohyama, K. Taniyama, and S. Yamada, *Realization of Vassiliev invariants by unknotting number one knots*, preprint (1999).

[Sh] T. Shibuya, *self-Δ-equivalence of ribbon links*, Osaka J. Math. **33** (1996), 751–760.

[TY] K. Taniyama and A. Yasuhara, *Local moves on spatial graphs and finite type invariants*, preprint (1999).