

HAKONE SEMINAR 15 (1999) 31-44.

## SELF- $\Delta$ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

中西 康剛 (神戸大学理学部)

### 1. INTRODUCTION

この報告は、渋谷氏との共同研究 [NS] 及び箱根セミナーの記録 [中西 1, 2] に引き続くものである。Murakami-Nakanishi [MN] により定義された  $\Delta$ -unknotting operation は、Fig. 1.1 にあるような 1 箇所のみ異なるような 2 つの結び目や絡み目の正則表示  $K, L$  の間の局所変形である。さらに、 $K, L$  で表示されるような結び目や絡み目を  $\kappa, \lambda$  で表すとき、 $\kappa$  と  $\lambda$  は互いに  $\Delta$ -move の 1 回の操作でうつるといふ。

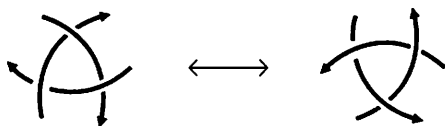


Fig. 1.1

**Theorem 1** ([MN]). 2 つの結び目や絡み目が  $\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち、かつ、適当な成分の順序や向きをつけたときに、対応する成分間の絡み数が一致することである。

特に、 $\Delta$ -move を施す arcs がすべて同じ成分に属するとき、self- $\Delta$ -move という。([Sh] 参照。) 以下では、self- $\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあうための必要条件を考える。論文 [NS] では、多変数 Alexander 多項式に関する必要条件を与えた。今回は、Conway 多項式に関する必要条件を与えることに成功した。証明は、岡田氏の結び目に関する結果 [Ok] における証明とまったく平行であり、自然な拡張として、Theorem 2 が得られる。

**Theorem 2.** 2 つの  $\mu$  成分絡み目  $\kappa, \lambda$  が self- $\Delta$ -move の 1 回の操作でうつりあうとき、Conway 多項式の  $z^i$  の係数  $a_i$  に関して次が成り立つ。

$$a_{\mu-1}(\kappa) = a_{\mu-1}(\lambda), \quad |a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu+1}(\lambda)| = |a_{\mu-1}(\kappa)|.$$

さらに、2つの  $\mu$  成分絡み目  $\kappa, \lambda$  が *self- $\Delta$ -moves* の  $n$  回の操作でうつりあうとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} a_{\mu-1}(\kappa) &= a_{\mu-1}(\lambda), \\ a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu+1}(\lambda) &\equiv n \cdot a_{\mu-1}(\kappa) \pmod{2 \cdot |a_{\mu-1}(\kappa)|}, \\ |a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu+1}(\lambda)| &\leq n \cdot |a_{\mu-1}(\kappa)|. \end{aligned}$$

Theorem 2 の証明は次節で与えるが、その証明をよく観察することにより、次の結果が得られる。

**Theorem 3 (Gokiso Observation).** 2つの  $\mu$  成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \dots \cup \kappa_\mu, \lambda = \lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_\mu$  が *self- $\Delta$ -moves* の有限回の操作でうつりあうとき、次が成り立つ。

$$a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\kappa) \times \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_2(\kappa_i) \right) = a_{\mu+1}(\lambda) - a_{\mu-1}(\lambda) \times \left( \sum_{i=1}^{\mu} a_2(\lambda_i) \right).$$

これらの事実から、交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、*self- $\Delta$ -moves* でうつりあうかどうか、および、うつりあうとしたら何回必要かを決定する。

ACKNOWLEDGEMENTS. 葉広和夫氏と村上育氏に謝意を表したい。Habiro's move との関連から Vassiliev 不変量で同値関係が評価可能とのご助言をいただいた。Theorem 3 はそれに相当するものである。児玉宏児氏と彼のコンピュータプログラム “Knot” に謝意を表したい。このプログラムにより、Conway 多項式などの不変量の計算が容易になった。大山淑之氏に謝意を表したい。彼との議論により、Theorem 3 が生まれた。

## 2. PROOFS OF THEOREMS 2 AND 3

Conway 多項式が axiomatic に計算できることを用いる。実際に、次の Fig. 2.1 のように、ある点の近傍のみが異なるような正則表示  $K_+, K_-, K_0$  をもつような 3 つの絡み目  $\kappa_+, \kappa_-, \kappa_0$  について、次の (2.1) が成り立つ。([Ka] 参照。)

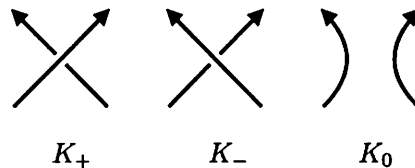


Fig. 2.1

SELF- $\Delta$  UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

$$(2.1) \quad \nabla_{\kappa_+} - \nabla_{\kappa_-} = z\nabla_{\kappa_0}.$$

*Proof of Theorem 2.* (2.1) により、Conway 多項式の差を計算してみよう。2つの  $\mu$  成分絡み目  $\kappa, \lambda$  が 1 回の self- $\Delta$ -move でうつつたとする。これを表示する正則表示  $K, L$  について、先の axiom により、次のように計算する。第一辺の両項を (2.1) により展開することにより、第二辺が得られる。第二辺の第一項と第三項は相殺される。第二辺の第二項と第四項を (2.1) により展開することにより、第三辺が得られる。第三辺の第一項と第三項は相殺される。第四辺の第二項と第四項をまとめることにより、第四辺が得られる。この式を(2.2) とする。

$$\begin{aligned}
 & \nabla(\text{図1}) - \nabla(\text{図2}) \\
 = & \nabla(\text{図3}) + z\nabla(\text{図4}) \\
 & - \nabla(\text{図5}) - z\nabla(\text{図6}) \\
 (2.2) \quad = & z(\nabla(\text{図7})) + z\nabla(\text{図8}) \\
 & - z(\nabla(\text{図9})) + z\nabla(\text{図10}) \\
 = & z^2(\nabla(\text{図11})) - \nabla(\text{図12})
 \end{aligned}$$

ここで、self- $\Delta$ -move であることに注意をすると、図で表されている strings の外部でのつながり方は次のいずれかである。

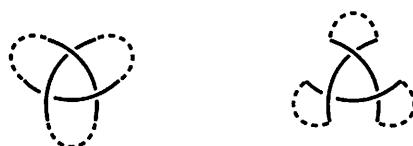


Fig. 2.2

よって、式の最終で表されている絡み目は  $\mu$  成分と  $\mu + 2$  成分のものである。 $\mu$  成分絡み目の Conway 多項式の 0 でない最低次の項は  $\mu - 1$  次以上である。 $\mu + 2$  成分絡み目の Conway 多項式の 0 でない最低次の項は  $\mu + 1$  次以上である。([Ka] 参照。) このことから、 $a_{\mu-1}(\kappa) - a_{\mu-1}(\lambda) = 0$  がわかる。また、 $\mu$  成分絡み目の  $\mu - 1$  次の係数は、成分間の絡み数にのみ依存して定まることが知られている。例えば、次の Lemma 4 を見よ。このことにより、与えられた 2 つの絡み目と第四式の  $\mu$  成分絡み目の  $a_{\mu-1}$  は一致する。このことにより、 $|a_{\mu+1}(\kappa) - a_{\mu+1}(\lambda)| = |\pm a_{\mu-1}(\kappa)|$  がわかる。以上の考察により、Theorem 2 が得られる。

**Lemma 4.**  $\mu$  成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \dots \cup \kappa_\mu$  の Conway 多項式の  $\mu - 1$  次の係数  $a_{\mu-1}$  は、成分間の絡み数  $lk(\kappa_i, \kappa_j)$  ( $i, j = 1, \dots, \mu$ ) にのみ依存する。

*Proof of Lemma 4.* よく知られているように、結び目については、 $a_0 = 1$  が成り立つ。 $2$  成分絡み目については、 $a_1 = lk(\kappa_1, \kappa_2)$  が成り立つ。(See [Ka].)  $3$  成分絡み目については、 $a_2 = lk(\kappa_1, \kappa_2) \cdot lk(\kappa_2, \kappa_3) + lk(\kappa_2, \kappa_3) \cdot lk(\kappa_3, \kappa_1) + lk(\kappa_3, \kappa_1) \cdot lk(\kappa_1, \kappa_2)$  が成り立つことを示すのもそうは難しくはない。Theorem 1 から、対応する成分間の絡み数が一致する 2 つの絡み目は、 $\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあう。ここでは、 $\Delta$ -move が  $a_{\mu-1}$  を変えないことを示そう。

成分数に関する帰納法で示す。第一に、 $\Delta$ -move を施すすべての arcs が同じ成分のものであるときを考える。この場合は、Theorem 2 の前半部で既に示している。第二に、 $\Delta$ -move を施す arcs の内 2 つが同じ成分のものであるときを考える。このときも第一の場合と同様の議論で示せる。なぜなら、(2.2) の第四式の 2 つの絡み目は  $\mu$  成分であるからである。第三に、 $\Delta$ -move を施す arcs がすべて異なる成分のものであるときを考える。このとき、(2.2) の第四式に現れる絡み目において、これらの 3 成分はひとつになり、成分数は  $\mu - 2$  となる。注意すべきことは、この 2 つの絡み目の対応する成分間の絡み数が一致する。帰納法の仮定により、この 2 つの絡み目の Conway 多項式の  $a_{\mu-3}$  は一致する。故に、第一式の 2 つの絡み目の Conway 多項式の  $a_{\mu-1}$  は一致する。以上で、Lemma 4 が証明された。

*Proof of Theorem 3.* ここで、上の計算式をそのまま self- $\Delta$ -move を操作する成分について適用でき、この成分の  $a_2$  の差は 1 である。これらの 2 つの差の符号について、注意深く観察すると、 $a_2$  の差に  $a_{\mu-1}$  をかけたものが、 $a_{\mu+1}$  の差になることが観察される。以上の考察により、Theorem 3 が得られる。

SELF- $\Delta$  UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

3. CLASSIFICATION

交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、self- $\Delta$ -moves でうつりあうかどうか、および、うつりあうとしたら何回必要か、について以下で議論する。Appendix に 57 個の link types の一覧表を付けておいたので参照されたい。

Theorem 2 により、絡み数  $i_1 = a_1(\kappa_1 \cup \kappa_2) = lk(\kappa_1, \kappa_2)$  によりまず大きく分類される。交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の絡み数は 3 から  $-3$  の間である。次に、Theorem 3 により、 $i_2 = a_3(\kappa_1 \cup \kappa_2) - a_1(\kappa_1 \cup \kappa_2) \times (a_2(\kappa_1) + a_2(\kappa_2))$  により分類する。

(1) 絡み数が 3 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$$(i_1, i_2) = (3, 0) \quad 6_1^2 pp.$$

$$(i_1, i_2) = (3, -4) \quad r6_1^2 pn.$$

$$(i_1, i_2) = (3, 2) \quad 6_2^2 pp.$$

(2) 絡み数が 2 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$$(i_1, i_2) = (2, 1) \quad r4_1^2 pn \sim_{\Delta} r7_5^2 pn \sim_{\Delta} dr7_5^2 pn.$$

$$(i_1, i_2) = (2, -1) \quad 6_3^2 pp \sim_{\Delta} r7_7^2 pp \sim_{\Delta} dr7_7^2 pp.$$

$$(i_1, i_2) = (2, 0) \quad 4_1^2 pp \sim_{\Delta} 7_5^2 pp \sim_{\Delta} d7_5^2 pp,$$

$$(i_1, i_2) = (2, 2) \quad r6_3^2 pn \sim_{\Delta} 7_7^2 pn \sim_{\Delta} d7_7^2 pn$$

$7_5^2, 7_7^2$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、うつりあうことは容易に示せる。(Figs. 3.1, 3.2 参照。)

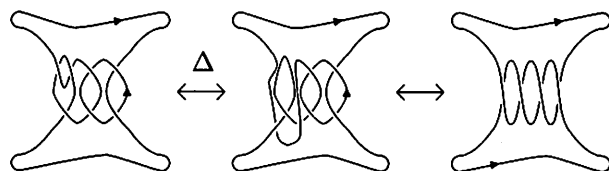


Fig. 3.1

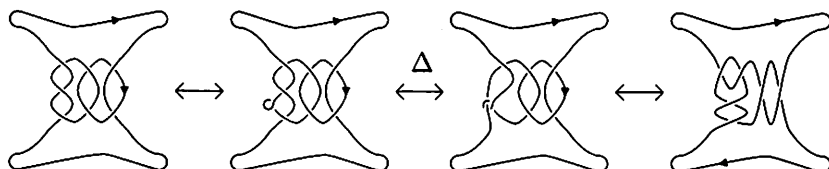


Fig. 3.2

また、 $r7_5^2pn \sim_{\Delta} dr7_5^2pn$ ,  $r7_7^2pp \sim_{\Delta} dr7_7^2pp$ ,  $7_5^2pp \sim_{\Delta} d7_5^2pp$ ,  $7_7^2pn \sim_{\Delta} d7_7^2pn$  はう  
つりあうのに 2 回の self- $\Delta$ -moves を必要とする。各成分が自明な結び目と trefoil knot  
である。次の Claim 5 により、奇数回ではうつりあわない。故に、最小数は 2 である。

都合あわせて、絡み数 2 では、4 個の類が存在する。また、各類の中で、うつりあうの  
に要する self- $\Delta$ -moves の回数も決定された。

**Claim 5.** 2 つの 2 成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$  と  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  が  $\Delta$  link homotopic であ  
るとする。

(1) すべての成分  $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$  が trivial knots で  $a_2 = 0$  とする。このとき、Theorem  
2 から 1 回の self  $\Delta$  move で成分の  $a_2$  が  $\pm 1$  だけ変わるので、奇数回の self  $\Delta$  moves  
ではうつりあわない。

(2) 成分  $\kappa_1$  と  $\lambda_1$  が trivial knots で  $a_2 = 0$  であり、成分  $\kappa_2$  と  $\lambda_2$  が trefoil knots  
で  $a_2 = \pm 1$  とする。奇数回の self  $\Delta$  moves ではうつりあわない。

(3) 成分  $\kappa_1, \kappa_2$ , と  $\lambda_1$  が trivial knots で  $a_2 = 0$  であり、成分  $\lambda_2$  が trefoil knots  
で  $a_2 = \pm 1$  とする。偶数回の self  $\Delta$  moves ではうつりあわない。

(3) 絡み数が 1 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$$\begin{aligned} (i_1, i_2) &= (1, 0) && 2_1^2pp. \\ (i_1, i_2) &= (1, 2) && 7_1^2pn \sim_{\Delta} 7_2^2pn. \\ (i_1, i_2) &= (1, -2) && r7_1^2pp \sim_{\Delta} r7_2^2pp. \end{aligned}$$

各類でうつりあうことは、実際にやってみることである。(Fig. 3.3 参照。)

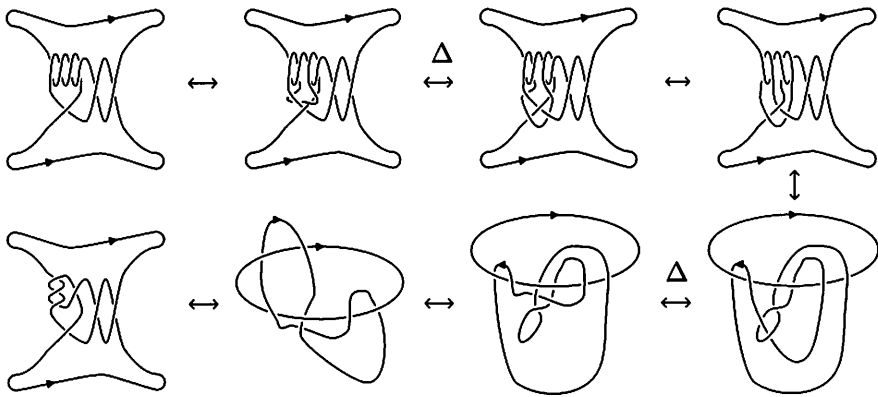


Fig. 3.3

(4) 絡み数が 0 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

SELF- $\Delta$  UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

$(i_1, i_2) = (0, 0)$	$0_1^2$ .
$(i_1, i_2) = (0, 1)$	$5_1^2 pp \sim_{\Delta} r7_6^2 pp \sim_{\Delta} dr7_6^2 pp$ $\sim_{\Delta} 7_8^2 pp \sim_{\Delta} d7_8^2 pp$ .
$(i_1, i_2) = (0, -1)$	$r5_1^2 pp \sim_{\Delta} 7_6^2 pp \sim_{\Delta} d7_6^2 pp$ $\sim_{\Delta} r7_8^2 pp \sim_{\Delta} dr7_8^2 pp$ .
$(i_1, i_2) = (0, 2)$	$7_3^2 pp \sim_{\Delta} r7_4^2 pp \sim_{\Delta} dr7_4^2 pp$ .
$(i_1, i_2) = (0, -2)$	$r7_3^2 pp \sim_{\Delta} 7_4^2 pp \sim_{\Delta} d7_4^2 pp$ .

まず、 $(i_1, i_2) = (0, 1)$  の場合を考える。 $7_8^2 pp$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、 $7_8^2 pp \sim_{\Delta} 5_1^2 pp$  がうつりあうことは容易に示せる。(Fig. 3.4 参照。)

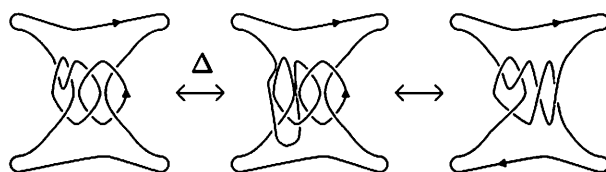


Fig. 3.4

$7_8^2 pp \sim_{\Delta} d7_8^2 pp$  については、成分が自明な結び目と trefoil knot であるために、Claim 5 から奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。実際に、 $5_1^2 pp$  を経由して、2 回でうつりあう。 $r7_6^2 pp \sim_{\Delta} 5_1^2 pp$  がうつりあうことは、やってみることである。実際、2 回 self- $\Delta$ -moves を施すとうつりあう。各成分が自明な結び目であるために、Claim 5 から奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。(Fig. 3.5 参照。)

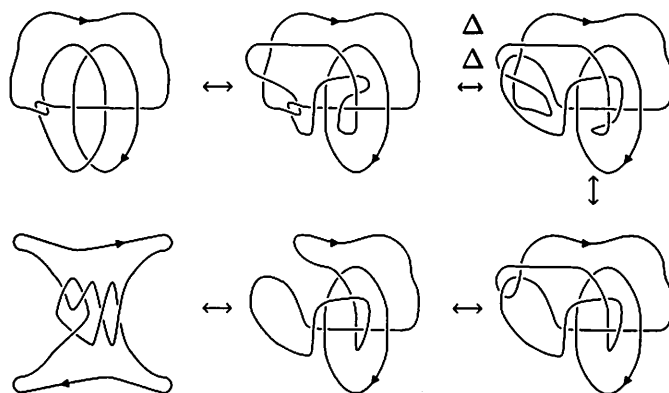


Fig. 3.5

$r7_6^2pp \sim_{\Delta} dr7_6^2pp$  については、成分がともに自明な結び目であるために、奇数回ではう  
つりあわないので、Claim 5 から偶数回必要である。実際に、 $5_1^2pp$  を経由して、4 回でう  
つりあう。2 回でうつりあわないのは次の Claim 6 により証明される。

**Claim 6.** 2 つの 2 成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  が *self- $\Delta$ -moves* の 2 回の操  
作でうつりあうとする。また、 $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$  はすべて自明な結び目であるとする。このと  
き、うつりあうための 2 回の *self- $\Delta$ -moves* は同一成分に対して施しているの  
で、 $\kappa_1$  に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\kappa_2$  の lifts の *linking numbers* と  $\lambda_1$  に  
沿った *infinite cyclic covering space* における  $\lambda_2$  の lifts の *linking numbers* が一致す  
るか、または、 $\kappa_2$  に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\kappa_1$  の lifts の *linking numbers*  
と  $\lambda_2$  に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\lambda_1$  の lifts の *linking numbers*  
が一致する。

実際に比較してみると、一致しない。 $r7_6^2pp$  と  $dr7_6^2pp$  は order のみ異なるので、各成  
分に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\kappa_1$  の lifts を見ると、Fig. 3.6 に示  
すとおりである。一方が隣りの lifts とのみ絡み数を持つものに対して、他方は 2 つ隣の lifts  
とも絡み数を持っている。従って、*self- $\Delta$ -moves* の 2 回の操作でうつりあうことはない。

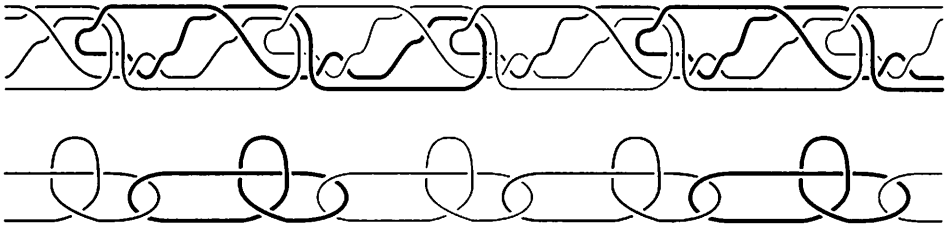


Fig. 3.6

**REMARK.** 2 つの 2 成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  について、 $\kappa_1, \lambda_1$  は自明な  
結び目であるとする。さらに、 $\kappa_1$  に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\kappa_2$   
の lifts の *linking numbers* と  $\lambda_1$  に沿った *infinite cyclic covering space* における  $\lambda_2$   
の lifts の *linking numbers* が一致しているとする。このとき、covering space における  
 $\Delta$ -moves で互いにつりあうが、この変形は元の空間でも  $\kappa_1, \lambda_1$  に対する *self- $\Delta$ -moves*  
として実現可能である。上の例はこうした *infinite cyclic covering space* における lifts  
の絡み数が一致していなくとも *self- $\Delta$ -moves* でうつりあうことがあることを示している点  
で、とても興味深い。



SELF- $\Delta$  UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

次に、 $r7_6^2pp$ ,  $dr7_6^2pp$  と  $7_8^2pp$ ,  $d7_8^2pp$  は 3 回 self- $\Delta$ -moves を施すとうつりあう。各成分が自明な結び目であるために、Claim 5 から偶数回ではうつりあわない。1 回ではうつりあわないのは、次の Claim 7 により証明される。

**Claim 7.** 2 つの 2 成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  が self- $\Delta$ -move の 1 回の操作でうつりあうとする。また、 $\kappa_1, \lambda_1, \lambda_2$  はすべて自明な結び目であり、 $\kappa_2$  は *trefoil knot* とする。このとき、うつりあうための self- $\Delta$ -move は  $\kappa_2$  に対して施しているので、 $\kappa_1$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\kappa}_2$  と、 $\lambda_1$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\lambda}_2$  または  $\lambda_2$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\lambda}_1$  のいずれかは self- $\Delta$ -move の 1 回の操作でうつりあう。

実際に比較してみる。 $7_8^2pp$  の自明な結び目成分で  $-1/2$  Dehn surgery した結果は、Fig. 3.7 の通りである。結果として得られる結び目は  $5_2$  で、 $a_2(5_2) = 2$  である。

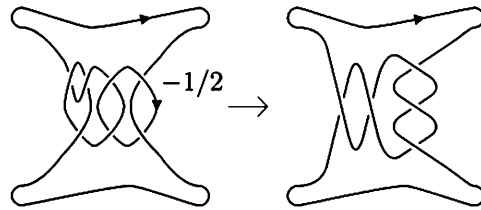


Fig. 3.7

$r7_6^2pp$  の自明な結び目成分で  $-1/2$  Dehn surgery した結果は、Fig. 3.8 の通りで、得られた結び目の  $a_2$  は、いずれも  $-2$  であり、Theorem 2 に矛盾する。

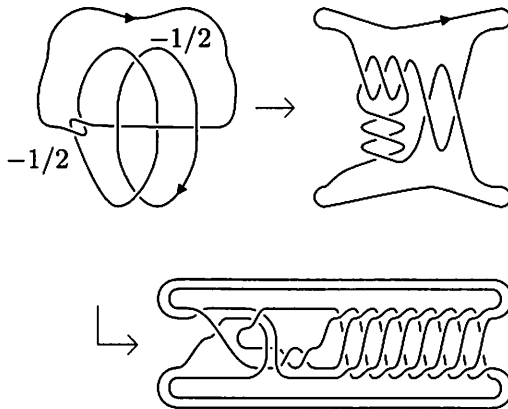


Fig. 3.8

$(i_1, i_2) = (0, -1)$  の場合は、 $(i_1, i_2) = (0, 1)$  の場合の鏡像であり、同様に示せる。

$(i_1, i_2) = (0, 2)$  の場合は、 $r7_4^2pp$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、 $r7_4^2pp$  と  $7_3^2pp$  がうつりあうことは容易に示せる。(Fig. 3.9 参照。)  $r7_4^2pp \sim_{\Delta} dr7_4^2pp$  については、成分が自明な結び目と trefoil knot であるために、Claim 5 から奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。実際に、 $7_3^2pp$  を経由して、2 回でうつりあう。

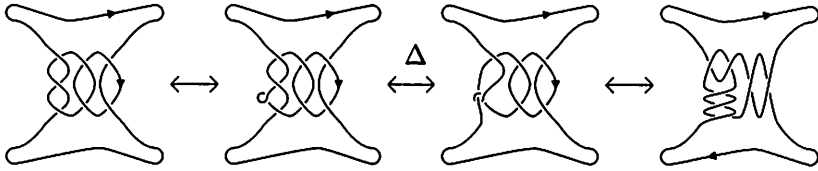


Fig. 3.9

$(i_1, i_2) = (0, -2)$  の場合は、 $(i_1, i_2) = (0, 2)$  の場合の鏡像であり、同様に示せる。

(5) 絡み数が  $-n$  ( $n \geq 1$ ) で交差点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

これらは、絡み数が  $n$  ( $n \geq 1$ ) で交差点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の鏡像であり、分類はそれらの鏡像により議論できる。

以上の議論により、交差点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、self- $\Delta$ -moves でうつりあうものを 1 つの表にまとめ、うつりあうとしたら何回必要かを表の各欄に記載したものが以下の通りである。

$6_1^2pp$	$r6_1^2pn$	$6_2^2pp$						
	$r4_1^2pn$	$r7_5^2pn$	$dr7_5^2pn$		$6_3^2pp$	$r7_7^2pp$	$dr7_7^2pp$	
$r4_1^2pn$	0	1	1	$6_3^2pp$	0	1	1	
$r7_5^2pn$		0	2	$r7_7^2pp$		0	2	
	$4_1^2pp$	$7_5^2pp$	$d7_5^2pp$		$r6_3^2pn$	$7_7^2pn$	$d7_7^2pn$	
$4_1^2pp$	0	1	1	$r6_3^2pn$	0	1	1	
$7_5^2pp$		0	2	$7_7^2pn$		0	2	
$2_1^2pp$		$7_1^2pn$	$7_2^2pn$		$r7_1^2pp$	$r7_2^2pp$		
	$7_1^2pn$	0	2	$r7_1^2pp$	0	2		
$0_1^2$		$5_1^2pp$	$r7_6^2pp$	$dr7_6^2pp$	$7_8^2pp$	$d7_8^2pp$		
	$5_1^2pp$	0	2	$dr7_6^2pp$	2	2	1	
	$r7_6^2pp$		0	$7_8^2pp$	3	3	3	
	$dr7_6^2pp$			$7_8^2pp$	0	3	3	
	$7_8^2pp$			$d7_8^2pp$		0	2	

SELF-Δ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II

	$r5_1^2pp$	$7_6^2pp$	$d7_6^2pp$	$r7_8^2pp$	$dr7_8^2pp$
$r5_1^2pp$	0	2	2	1	1
$7_6^2pp$		0	4	3	3
$d7_6^2pp$			0	3	3
$r7_8^2pp$				0	2

	$7_3^2pp$	$r7_4^2pp$	$dr7_4^2pp$
$7_3^2pp$	0	1	1
$r7_4^2pp$		0	2

	$r7_3^2pp$	$7_4^2pp$	$d7_4^2pp$
$r7_3^2pp$	0	1	1
$7_4^2pp$		0	2

$2_1^2pn$
-----------

	$r7_1^2pn$	$r7_2^2pn$
$r7_1^2pn$	0	2

	$7_1^2pp$	$7_2^2pp$
$7_1^2pp$	0	2

	$4_1^2pn$	$7_5^2pn$	$d7_5^2pn$
$4_1^2pn$	0	1	1
$7_5^2pn$		0	2

	$r6_3^2pp$	$7_7^2pp$	$d7_7^2pp$
$r6_3^2pp$	0	1	1
$7_7^2pp$		0	2

	$r4_1^2pp$	$r7_5^2pp$	$dr7_5^2pp$
$r4_1^2pp$	0	1	1
$r7_5^2pp$		0	2

	$6_3^2pn$	$r7_7^2pn$	$dr7_7^2pn$
$6_3^2pn$	0	1	1
$r7_7^2pn$		0	2

$r6_1^2pp$
------------

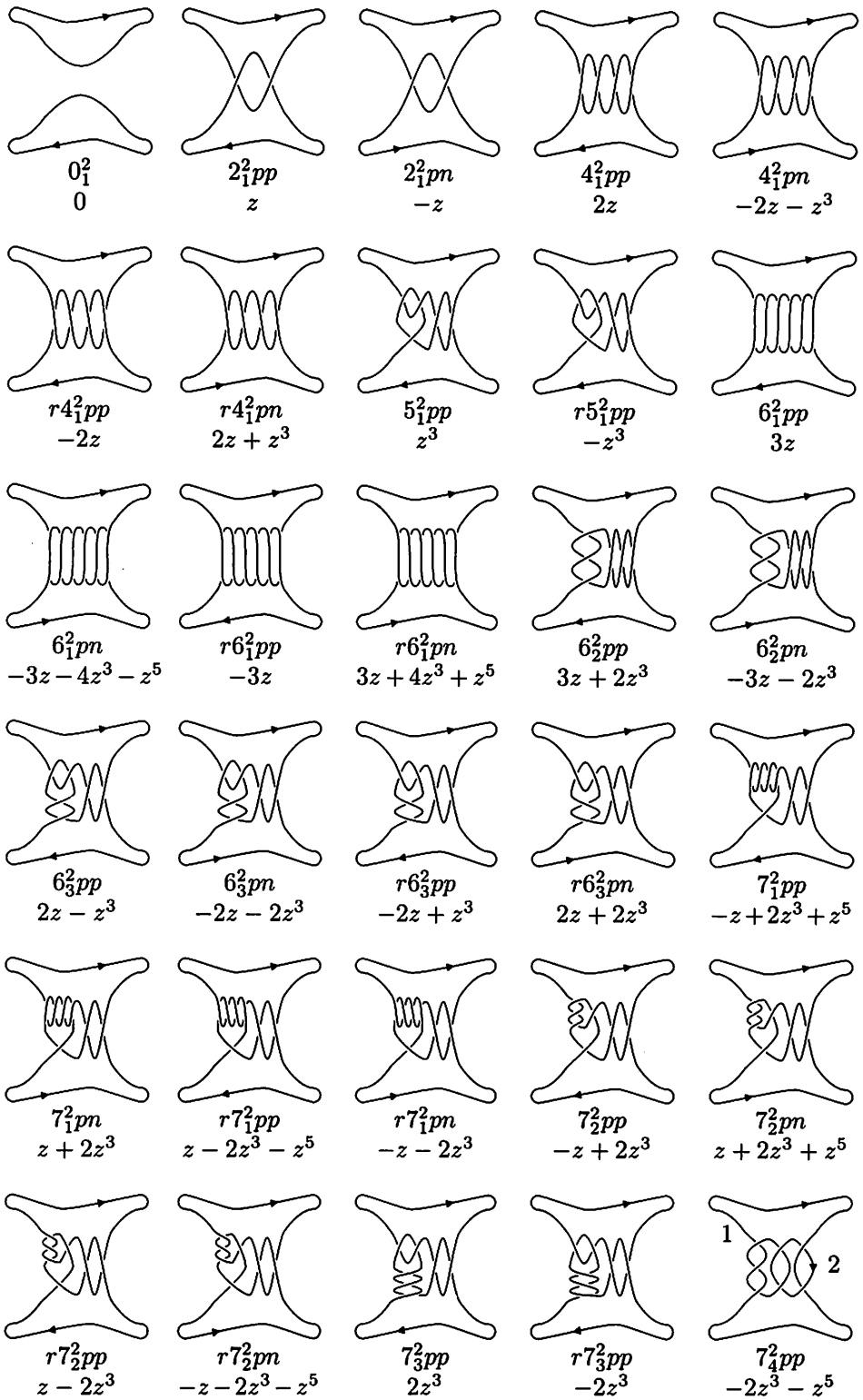
$6_1^2pn$
-----------

$r6_2^2pp$
------------

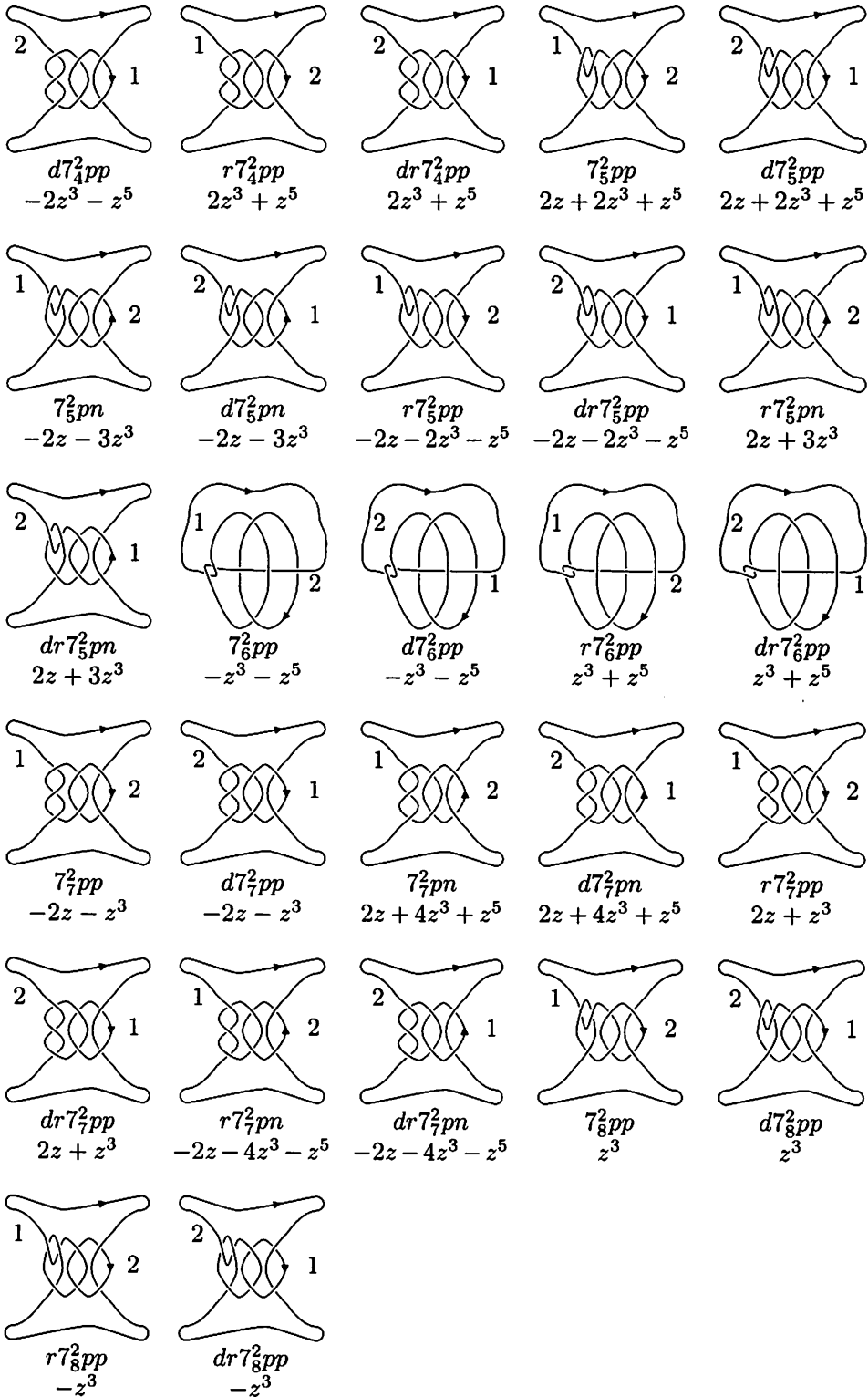
APPENDIX: TABLE OF ORDERED AND ORIENTED PRIME 2-COMPONENT LINKS

以下に、交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、表をまとめた。

摘要：絡み目の表示は Conway's notation ( $[C]$ ) による。正則表示の下にある  $xyN_n^2zw$  において、 $N_n^2$  は Alexander-Briggs による絡み目の番号であり、 $N$  は交叉の数を、 $n$  は同じ交叉数の結び目の内の順番を、表している。Conway's notation に従って正則表示を描いたとき、上の arc を含む成分を第二成分とするものには  $x$  の位置に  $d$  を付けた。そうでないものは、上の arc を含む成分が第一成分とするものである。また、Conway's notation に従う正則表示の鏡像を正則表示とするものには、 $y$  の位置に  $r$  をつけた。 $z$  の位置には、正則表示で第一成分の右上の arc が時計回りについているものには  $p$  を、反時計回りのについているものには  $n$  をつけた。 $w$  の位置には、正則表示で第二成分の右上の arc が時計回りについているものには  $p$  を、反時計回りのについているものには  $n$  をつけた。正則表示の下にある  $xyN_n^2zw$  のさらに下にある多項式は、正則表示された絡み目の Conway 多項式である。



SELF- $\Delta$  UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS, II



## References

- [AB] J.W. Alexander and G.B. Briggs, *On types of knotted curves*, Ann. of Math. (2) **28** (1927), 562–586.
- [C] J.H. Conway, *An enumeration of knots and links, and their algebraic properties*, Computational problems in Abstract Algebra (Oxford, 1967), Pergamon Press, 1970, pp. 329–358.
- [Ka] L.H. Kauffman, *The Conway polynomial*, Topology **20** (1981), 101–108.
- [MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.
- [中西 1] 中西 康剛, *Self- $\Delta$  Unknotting Operation and Alexander invariants*, 箱根セミナー記録1997 (1998), 17–20.
- [中西 2] 中西 康剛, *Self- $\Delta$  Unknotting Operation and Conway polynomials*, 箱根セミナー記録1998 (1999), 61–75.
- [NS] Y. Nakanishi and T. Shibuya, *Relations among self Delta-equivalence and self Sharp-equivalences for links*, Proc. of Knots in Hellas 1998, Editor: J.H. Przytycki, World Sci. Publ., Singapore (to appear).
- [Ok] M. Okada, *Delta-unknotting operation and the second coefficient of the Conway polynomial*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 713–717.
- [Sh] T. Shibuya, *Self  $\Delta$ -equivalence of ribbon links*, Osaka J. Math. **33** (1996), 751–760.