

HAKONE SEMINAR 14 (1998)61-75.

## SELF- $\Delta$ UNKNOTTING OPERATION AND CONWAY POLYNOMIALS

中西 康剛 (神戸大学理学部)

### 1. INTRODUCTION

この報告は、昨年の報告 [中西] に引き続くものである。Murakami-Nakanishi [MN] により定義された  $\Delta$ -unknotting operation は、Fig. 1.1 にあるような 1 箇所のみ異なるような 2 つの結び目や絡み目の正則表示  $K, L$  の間の局所変形である。さらに、 $K, L$  で表示されるような結び目や絡み目を  $\kappa, \lambda$  で表すとき、 $\kappa$  と  $\lambda$  は互いに  $\Delta$ -move の 1 回の操作でうつるといふ。

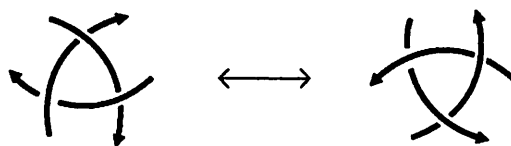


Fig. 1.1

**Proposition 1** ([MN]). 2 つの結び目や絡み目が  $\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち、かつ、適当な成分の順序や向きをつけたときに、対応する成分間の絡み数が一致することである。

特に、 $\Delta$ -move を施す arcs がすべて同じ成分に属するとき、self- $\Delta$ -move といふ。(Cf. [Sh].)

以下では、self- $\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあうための必要条件を考える。

**Proposition 2** ([NS]). 2 つの絡み目  $\kappa, \lambda$  が  $self-\Delta$ -moves の有限回の操作でうつりあうとき、適当に *Alexander matrices*  $A_\kappa(t_1, \dots, t_n), A_\lambda(t_1, \dots, t_n)$  を選択すれば、

$$A_\kappa(t_1, \dots, t_n) \equiv A_\lambda(t_1, \dots, t_n) \pmod{\{(1-t_1)^2, \dots, (1-t_n)^2\}},$$

が成り立ち、 $n$  変数 *Alexander polynomials*  $\Delta_\kappa, \Delta_\lambda$  について、

$$\Delta_\kappa(t_1, \dots, t_n) \equiv \pm t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \Delta_\lambda(t_1, \dots, t_n) \pmod{\{(1-t_1)^2, \dots, (1-t_n)^2\}}$$

が成り立つ。

$f(t_1, \dots, t_n) \equiv g(t_1, \dots, t_n) \pmod{\{h_1(t_1, \dots, t_n), \dots, h_j(t_1, \dots, t_n)\}}$  は、 $f(t_1, \dots, t_n)$  と  $g(t_1, \dots, t_n)$  が  $h_1(t_1, \dots, t_n), \dots, h_j(t_1, \dots, t_n)$  で生成される  $\mathbf{Z}\langle t_1, \dots, t_n \rangle$  のイデアル  $I$  による商  $\mathbf{Z}\langle t_1, \dots, t_n \rangle / I$  で同じ類に属することを意味する。

この Propositions 2 から、例えば、4 つの 2 成分絡み目  $0_1^2, 5_1^2, 7_3^2, 9_{10}^2$  は、互いに有限回の  $self-\Delta$ -moves の操作ではうつりあわないことを示した。

今回の講演では、Conway polynomial を用いることにより、2-component links に関して、より容易に判定する方法を与えることに成功した。証明は、岡田氏の次の結果 [Ok] における証明とまったくパラレルであり、この証明法は成分数が 3 以上の場合にも適用が可能である。

**Proposition 3** ([Ok]). 2 つの結び目  $\kappa, \lambda$  が  $(self-)\Delta$ -move の 1 回の操作でうつりあうとき、

$$|a_2(\kappa) - a_2(\lambda)| = 1$$

が成り立つ。さらに、2 つの結び目  $\kappa, \lambda$  が  $(self-)\Delta$ -moves の  $n$  回の操作でうつりあうとき、

$$a_2(\kappa) - a_2(\lambda) \equiv n \pmod{2}$$

$$|a_3(\kappa) - a_3(\lambda)| \leq n$$

が成り立つ。

**Proposition 4.** 2 つの 2 成分絡み目  $\kappa, \lambda$  が  $self-\Delta$ -move の 1 回の操作でうつりあうとき、

$$a_1(\kappa) = a_1(\lambda),$$

$$|a_3(\kappa) - a_3(\lambda)| = |a_1(\kappa)|,$$

が成り立つ。さらに、2つの2成分絡み目  $\kappa, \lambda$  が *self- $\Delta$ -moves* の  $n$  回の操作でうつりあうとき、

$$a_1(\kappa) = a_1(\lambda),$$

$$a_3(\kappa) - a_3(\lambda) \equiv n \cdot a_1(\kappa) \pmod{2 \cdot |a_1(\kappa)|}$$

$$|a_3(\kappa) - a_3(\lambda)| \leq n \cdot |a_1(\kappa)|$$

が成り立つ。

このことから、交叉点数が7以下の素な2成分絡み目の57の ordered and oriented types について、*self- $\Delta$ -moves* でうつりあうかどうか、および、うつりあうとしたら何回必要かを決定できたので、これを以下に報告する。

ACKNOWLEDGEMENTS. 葉広和夫氏と村上斉氏に謝意を表したい。昨年の報告以降に、Habiro's move との関連から Vassiliev 不変量で同値関係が評価可能とのご助言をいただいた。今回の2成分絡み目に対する  $a_3$  はそれに相当するものである。葉広氏のクラスパー理論と同様な完全な不変量が存在するかどうかは今後の課題である。

## 2. PROOF OF PROPOSITION 4

Conway polynomial が axiomatic に計算できることを用いる。実際に、次の Fig. 2.1 のように、ある点の近傍のみが異なるような正則表示  $K_+, K_-, K_0$  をもつような3つの絡み目  $\kappa_+, \kappa_-, \kappa_0$  について、 $\nabla_{\kappa_+} - \nabla_{\kappa_-} = z\nabla_{\kappa_0}$  が成り立つ。(Cf. [Ka].)

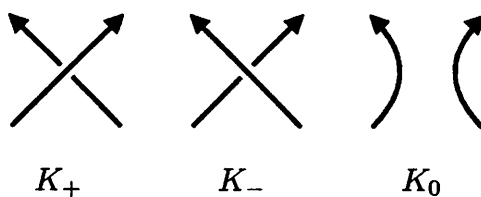


Fig. 2.1

(64)

これにより、次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 & \nabla(\text{図1}) - \nabla(\text{図2}) \\
 = & \nabla(\text{図1}) + z\nabla(\text{図3}) \\
 & - \nabla(\text{図2}) - z\nabla(\text{図4}) \\
 = & z(\nabla(\text{図3}) + z\nabla(\text{図5})) \\
 & - z(\nabla(\text{図4}) + z\nabla(\text{図6})) \\
 = & z^2(\nabla(\text{図7}) - \nabla(\text{図8}))
 \end{aligned}$$

ここで、self- $\Delta$ -move であることに注意をすると、図で表されている strings の外部でのつながり方は次のいずれかである。

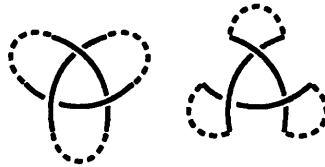


Fig. 2.2

よって、式の最終で表されている絡み目は 2 成分と 4 成分のものである。  $n$  成分絡み目の Conway polynomial の最低次の項は  $n - 1$  次式であり、2 成分絡み目にあっては成分の間の絡み数が係数として現れる。(Cf. [Ka].)

以上の考察により、Proposition 4 が得られる。

REMARK. 3 成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2 \cup \kappa_3$  の Conway polynomial の最低次の項は 2 次式であり、成分の間の絡み数の組み合わせ  $lk(\kappa_1, \kappa_2) \cdot lk(\kappa_2, \kappa_3) + lk(\kappa_2, \kappa_3) \cdot lk(\kappa_3, \kappa_1) + lk(\kappa_3, \kappa_1) \cdot lk(\kappa_1, \kappa_2)$  が係数として現れる。同様のことは

一般の場合にもいえるので、成分数が多いときにも、Propositions 3, 4 の一般化は可能である。

### 3. CLASSIFICATION

交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、self- $\Delta$ -moves でうつりあうかどうか、および、うつりあうとしたら何回必要か、について以下で議論する。Appendix に 57 個の link types の一覧表を付けておいたので参照されたい。

Propositions 2, 4 により、絡み数によりまず大きく分類される。交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の絡み数は 3 から  $-3$  の間である。

(1) 絡み数が 3 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$6_1^2pp$ ,  $r6_1^2pn$ ,  $6_2^2pp$  の 3 個である。

これらの  $a_3$  は mod 3 で合同ではないので、self- $\Delta$ -moves ではうつりあわない。よって、3 個の類がある。

(2) 絡み数が 2 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$4_1^2pp$ ,  $r4_1^2pn$ ,  $6_3^2pp$ ,  $r6_3^2pn$ ,  $7_5^2pp$ ,  $d7_5^2pp$ ,  $r7_5^2pn$ ,  $dr7_5^2pn$ ,  $7_7^2pn$ ,  $d7_7^2pn$ ,  $r7_7^2pp$ ,  $dr7_7^2pp$  の 12 個である。

これらの  $a_3$  について、mod 2 の合同類で分類すると、以下の 2 つに分類できる。

(2.1)  $r4_1^2pn$ ,  $6_3^2pp$ ,  $r7_5^2pn$ ,  $dr7_5^2pn$ ,  $r7_7^2pp$ ,  $dr7_7^2pp$ .

(2.2)  $4_1^2pp$ ,  $r6_3^2pn$ ,  $7_5^2pp$ ,  $d7_5^2pp$ ,  $7_7^2pn$ ,  $d7_7^2pn$ .

(2.1) について、

$$r4_1^2pn \sim_{\Delta} r7_5^2pn \sim_{\Delta} dr7_5^2pn,$$

$$6_3^2pp \sim_{\Delta} r7_7^2pp \sim_{\Delta} dr7_7^2pp$$

であり、これら 2 つの類は self- $\Delta$ -moves ではうつりあわない。

$7_5^2$ ,  $7_7^2$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、うつりあうことは容易に示せる。(Figs. 3.1, 3.2 参照。) また、 $r7_5^2pn \sim_{\Delta} dr7_5^2pn$ ,  $r7_7^2pp \sim_{\Delta} dr7_7^2pp$

はうつりあうのに 2 回の self- $\Delta$ -moves を必要とする。各成分が自明な結び目と trefoil knot であるために、奇数回ではうつりあわない。

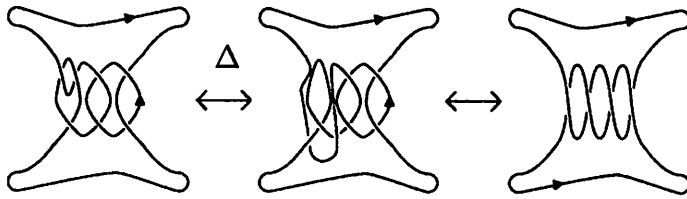


Fig. 3.1

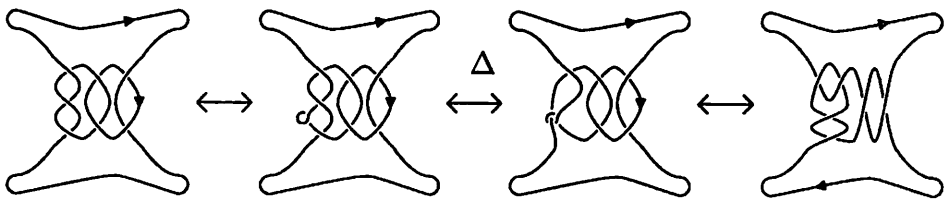


Fig. 3.2

この両類が self- $\Delta$ -moves ではうつりあわないことは、各々の結び目成分に注目するとわかる。たとえば、 $r4_1^2pn$  と  $6_3^2pp$  について、 $a_3$  の比較により、Proposition 4 から、self- $\Delta$ -moves でうつりあうとすると、奇数回の self- $\Delta$ -moves でうつりあうことになる。このとき、成分のいずれかについては奇数回の self- $\Delta$ -moves を施すことになる。自明な結び目から自明な結び目に奇数回の (self-)  $\Delta$ -moves でうつりあうことになり、Proposition 3 に矛盾する。

(2.2) について、

$$\begin{aligned} 4_1^2pp &\sim_{\Delta} 7_5^2pp \sim_{\Delta} d7_5^2pp, \\ r6_3^2pn &\sim_{\Delta} 7_7^2pn \sim_{\Delta} d7_7^2pn \end{aligned}$$

であり、両類は self- $\Delta$ -moves ではうつりあわない。証明は (2.1) と同様である。

都合あわせて、絡み数 2 では、4 個の類が存在する。また、各類の中で、うつりあうのに要する self- $\Delta$ -moves の回数も決定された。

(3) 絡み数が 1 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

$2_1^2pp$ ,  $7_1^2pn$ ,  $r7_1^2pp$ ,  $7_2^2pn$ ,  $r7_2^2pp$  の 5 個である。

絡み数が 1 であるので、これらの  $a_3$  によっては分類ができないが、以下の 3 つに分類できる。

$$2_1^2 pp.$$

$$7_1^2 pn \sim_{\Delta} 7_2^2 pn.$$

$$r7_1^2 pp \sim_{\Delta} r7_2^2 pp.$$

この分類は Proposition 2 により、確認できる。たとえば、

$$\Delta_{2_1^2}(t_1, t_2) = 1,$$

$$\Delta_{7_1^2 pn}(t_1, t_2) = -(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 + t_2) - t_1 t_2,$$

$$\Delta_{r7_1^2 pp}(t_1, t_2) = (t_1 - 1)(t_2 - 1)(1 + t_1 t_2) - t_1 t_2$$

であるが、Proposition 2 から、self- $\Delta$ -moves でうつりあうとすると、

$$\Delta_{7_1^2 pn}(t_1, t_2) \equiv \pm t_1^{r_1} t_2^{r_2} \Delta_{2_1^2}(t_1, t_2) \pmod{\{(1 - t_1)^2, (1 - t_2)^2\}}$$

である。つまり、

$$-(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 + t_2) - t_1 t_2 \mp t_1^{r_1} t_2^{r_2} \equiv 0 \pmod{\{(1 - t_1)^2, (1 - t_2)^2\}}.$$

$t_1 = 1$  を代入すると、 $-t_2 \mp t_2^{r_2} \equiv 0 \pmod{\{(1 - t_2)^2\}}$ . 故に、 $r_2 = 1$  で複号は + とわかる。同様に  $t_2 = 1$  を代入することにより、 $r_1 = 1$  とわかる。元に戻ると、

$$-(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 + t_2) \equiv 0 \pmod{\{(1 - t_1)^2, (1 - t_2)^2\}}$$

が成り立つことになり、矛盾する。他の組み合わせも同様である。

各類でうつりあうことは、実際にやってみることである。(Fig. 3.3 参照。)

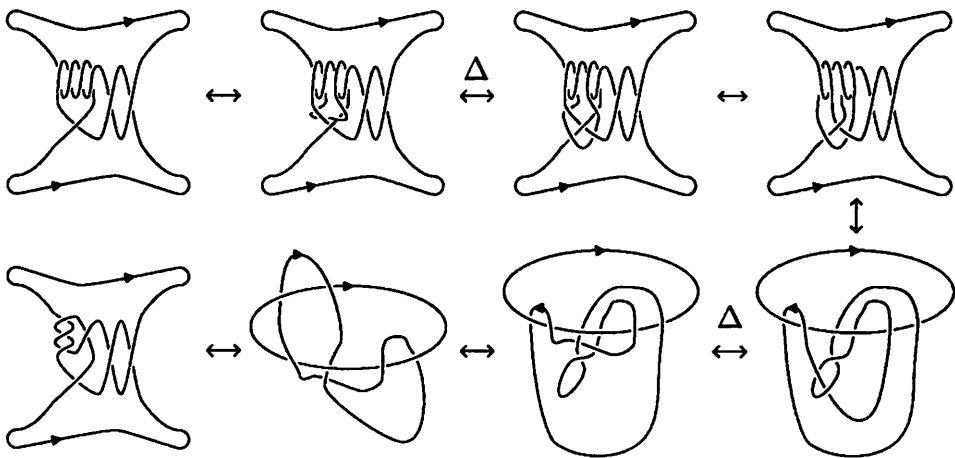


Fig. 3.3

(4) 絡み数が 0 で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目.

$0_1^2$ ,  $5_1^2pp$ ,  $r5_1^2pp$ ,  $7_3^2pp$ ,  $r7_3^2pp$ ,  $7_4^2pp$ ,  $d7_4^2pp$ ,  $r7_4^2pp$ ,  $dr7_4^2pp$ ,  $7_6^2pp$ ,  $d7_6^2pp$ ,  $r7_6^2pp$ ,  $dr7_6^2pp$ ,  $7_8^2pp$ ,  $d7_8^2pp$ ,  $r7_8^2pp$ ,  $dr7_8^2pp$  の 17 個である。

これらの  $a_3$  について、 $\text{mod } 0$  の合同類で分類すると、以下の 5 つに分類できる。

(4.0)  $0_1^2$ .

(4.1)  $5_1^2pp \sim_{\Delta} r7_6^2pp \sim_{\Delta} dr7_6^2pp \sim_{\Delta} 7_8^2pp \sim_{\Delta} d7_8^2pp$ .

(4.-1)  $r5_1^2pp \sim_{\Delta} 7_6^2pp \sim_{\Delta} d7_6^2pp \sim_{\Delta} r7_8^2pp \sim_{\Delta} dr7_8^2pp$ .

(4.2)  $7_3^2pp \sim_{\Delta} r7_4^2pp \sim_{\Delta} dr7_4^2pp$ .

(4.-2)  $r7_3^2pp \sim_{\Delta} 7_4^2pp \sim_{\Delta} d7_4^2pp$ .

(4.1) について、 $7_8^2pp$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、 $7_8^2pp \sim_{\Delta} 5_1^2pp$  がうつりあうことは容易に示せる。(Fig. 3.4 参照。)

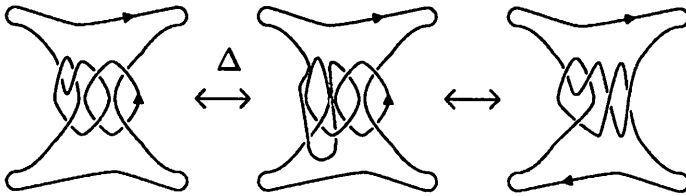


Fig. 3.4

$7_8^2pp \sim_{\Delta} d7_8^2pp$  については、成分が自明な結び目と trefoil knot であるために、奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。実際に、 $5_1^2pp$  を経由して、2 回でうつりあう。 $r7_6^2pp \sim_{\Delta} 5_1^2pp$  がうつりあうことは、やってみることである。実際、2 回 self- $\Delta$ -moves を施すとうつりあう。各成分が自明な結び目であるために、奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。(Fig. 3.5 参照。)



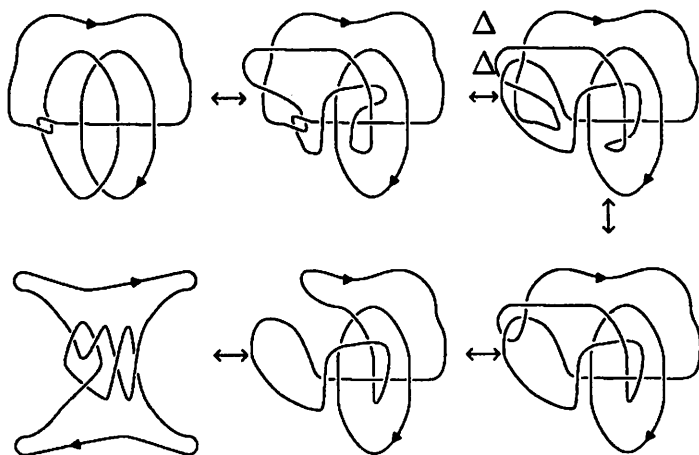


Fig. 3.5

$r7_6^2pp \sim_{\Delta} dr7_6^2pp$  については、成分がともに自明な結び目であるために、奇数回ではうつりあわないので、偶数回必要である。実際に、 $5_1^2pp$  を経由して、4回でうつりあう。2回でうつりあわないのは次の事実により証明される。

**Claim 5.** 2つの2成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  が self- $\Delta$ -moves の2回の操作でうつりあうとする。また、 $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$  はすべて自明な結び目であるとする。このとき、うつりあうための2回の self- $\Delta$ -moves は同一成分に対して施しているので、 $\kappa_1$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\kappa_2$  の lifts の linking numbers と  $\lambda_1$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\lambda_2$  の lifts の linking numbers が一致するか、または、 $\kappa_2$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\kappa_1$  の lifts の linking numbers と  $\lambda_2$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\lambda_1$  の lifts の linking numbers が一致する。

実際に比較してみると、一致しない。 $r7_6^2pp$  と  $dr7_6^2pp$  は order のみ異なるので、各成分に沿った infinite cyclic covering space における  $\kappa_1$  の lifts を見ると、Fig. 3.6 に示すとおりである。一方が隣りの lifts とのみ絡み数を持つものに対して、他方は2つ隣の lifts と絡み数を持っている。従って、self- $\Delta$ -moves の2回の操作でうつりあうことはない。

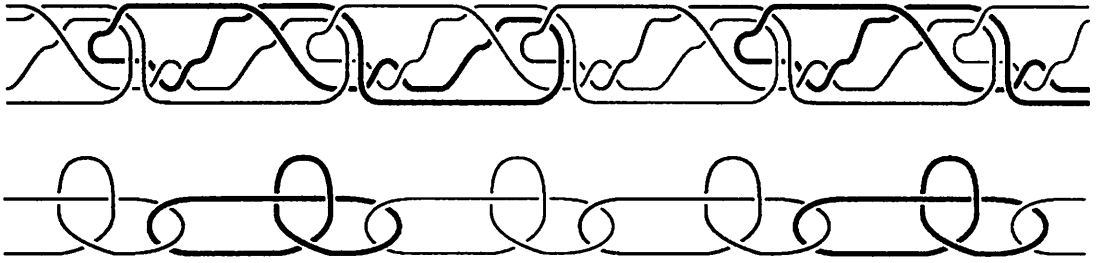


Fig. 3.6

REMARK. 2つの2成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  について、 $\kappa_1, \lambda_1$  は自明な結び目であるとする。さらに、 $\kappa_1$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\kappa_2$  の lifts の linking numbers と  $\lambda_1$  に沿った infinite cyclic covering space における  $\lambda_2$  の lifts の linking numbers が一致しているとする。このとき、covering space における  $\Delta$ -moves で互いにうつりあうが、この変形は元の空間でも  $\kappa_1, \lambda_1$  に対する self- $\Delta$ -moves として実現可能である。上の例はこうした infinite cyclic covering space における lifts の絡み数が一致していなくとも self- $\Delta$ -moves でうつりあうことがあることを示している点で、とても興味深い。

次に、 $r7_6^2pp, dr7_6^2pp$  と  $7_8^2pp, d7_8^2pp$  は3回 self- $\Delta$ -moves を施すとうつりあう。各成分が自明な結び目であるために、偶数回ではうつりあわない。1回ではうつりあわないのは、次の事実により証明される。

**Claim 6.** 2つの2成分絡み目  $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2$ ,  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  が self- $\Delta$ -move の1回の操作でうつりあうとする。また、 $\kappa_1, \lambda_1, \lambda_2$  はすべて自明な結び目であり、 $\kappa_2$  は trefoil knot とする。このとき、うつりあうための self- $\Delta$ -move は  $\kappa_2$  に対して施しているので、 $\kappa_1$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\kappa_2}$  と、 $\lambda_1$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\lambda_2}$  または  $\lambda_2$  に沿った  $-1/2$  Dehn surgery の結果の  $\widetilde{\lambda_1}$  のいずれかは self- $\Delta$ -move の1回の操作でうつりあう。

実際に比較してみると、Proposition 3 により  $a_2$  の比較からうつりあわないことがわかる。 $7_8^2pp$  の自明な結び目成分で  $-1/2$  Dehn surgery した結果は、Fig. 3.7 の通りである。結果として得られる結び目は  $5_2$  で、 $a_2(5_2) = 2$  である。

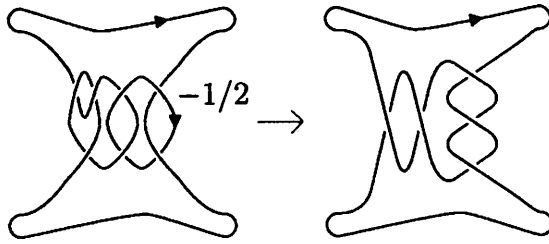


Fig. 3.7

$r7_6^2pp$  の自明な結び目成分で  $-1/2$  Dehn surgery した結果は、Fig. 3.8の通りで、得られた結び目の  $a_2$  は、いずれも  $-2$  であり、Propositin 2 に矛盾する。

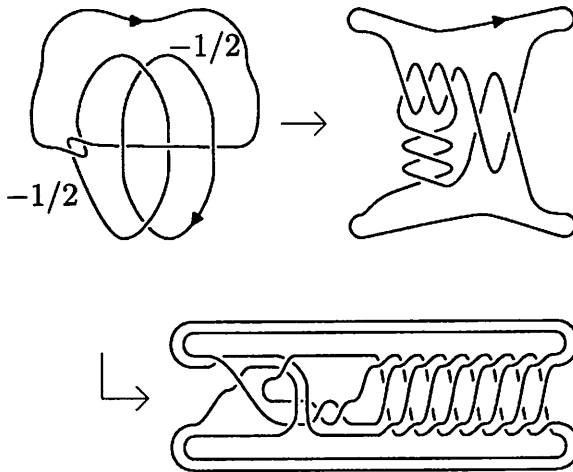


Fig. 3.8

(4.-1) については、(4.1) の鏡像であり、同様の議論ができる。

(4.2) について、 $r7_4^2pp$  の trefoil 部分で self- $\Delta$ -move を施すことにより、 $r7_4^2pp$  と  $7_3^2pp$  がうつりあうことは容易に示せる。(Fig. 3.9 参照。)  $r7_4^2pp \sim_{\Delta} dr7_4^2pp$  については、成分が自明な結び目と trefoil knot であるために、奇数回ではうつりあわないので、2 回必要である。実際に、 $7_3^2pp$  を経由して、2 回でうつりあう。

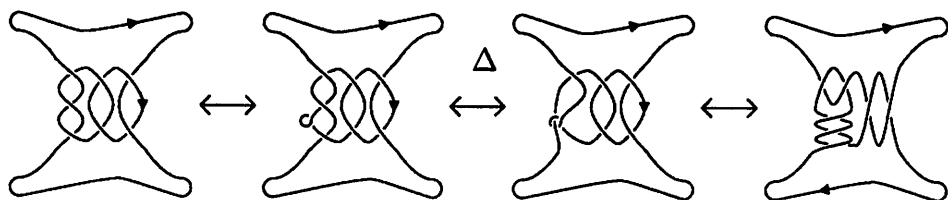


Fig. 3.9

(4.-2) については (4.2) の鏡像であり、同様の議論ができる。。

(5) 絡み数が  $-n$  ( $n \geq 1$ ) で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目。

これらは、絡み数が  $n$  ( $n \geq 1$ ) で交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の鏡影であり、分類はそれらの鏡影により議論できる。

以上の議論により、交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、self- $\Delta$ -moves でうつりあうものを 1 つの表にまとめ、うつりあうとしたら何回必要かを表の各欄に記載したものが以下の通りである。

$6_1^2 pp$	$r6_1^2 pn$	$6_2^2 pp$						
	$r4_1^2 pn$	$r7_5^2 pn$	$dr7_5^2 pn$		$6_3^2 pp$	$r7_7^2 pp$	$dr7_7^2 pp$	
$r4_1^2 pn$		1	1	$6_3^2 pp$		1	1	
$r7_5^2 pn$			2	$r7_7^2 pp$			2	
	$4_1^2 pp$	$7_5^2 pp$	$d7_5^2 pp$		$r6_3^2 pn$	$7_7^2 pn$	$d7_7^2 pn$	
$4_1^2 pp$		1	1	$r6_3^2 pn$		1	1	
$7_5^2 pp$			2	$7_7^2 pn$			2	
$2_1^2 pp$		$7_1^2 pn$	$7_2^2 pn$		$r7_1^2 pp$	$r7_2^2 pp$		
	$7_1^2 pn$		2	$r7_1^2 pp$		2		
$0_1^2$		$5_1^2 pp$	$r7_6^2 pp$	$dr7_6^2 pp$	$7_8^2 pp$	$d7_8^2 pp$		
	$5_1^2 pp$		2	2	1	1		
	$r7_6^2 pp$			4	3	3		
	$dr7_6^2 pp$				3	3		
	$7_8^2 pp$					2		

	$r5_1^2pp$	$7_6^2pp$	$d7_6^2pp$	$r7_8^2pp$	$dr7_8^2pp$
$r5_1^2pp$		2	2	1	1
$7_6^2pp$			4	3	3
$d7_6^2pp$				3	3
$r7_8^2pp$					2

	$7_3^2pp$	$r7_4^2pp$	$dr7_4^2pp$		$r7_3^2pp$	$7_4^2pp$	$d7_4^2pp$
$7_3^2pp$		1	1	$r7_3^2pp$		1	1
$r7_4^2pp$			2	$7_4^2pp$			2

$2_1^2pn$		$r7_1^2pn$	$r7_2^2pn$		$7_1^2pp$	$7_2^2pp$
	$r7_1^2pn$		2	$7_1^2pp$		2

	$4_1^2pn$	$7_5^2pn$	$d7_5^2pn$		$r6_3^2pp$	$7_7^2pp$	$d7_7^2pp$
$4_1^2pn$		1	1	$r6_3^2pp$		1	1
$7_5^2pn$			2	$7_7^2pp$			2

	$r4_1^2pp$	$r7_5^2pp$	$dr7_5^2pp$		$6_3^2pn$	$r7_7^2pn$	$dr7_7^2pn$
$r4_1^2pp$		1	1	$6_3^2pn$		1	1
$r7_5^2pp$			2	$r7_7^2pn$			2

$r6_1^2pp$	$6_1^2pn$	$r6_2^2pp$
------------	-----------	------------

## References

- [Ka] L.H. Kauffman, *The Conway polynomial*, *Topology* **20** (1981), 101–108.  
 [MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, *Math. Ann.* **284** (1989), 75–89.  
 [中西] 中西 康剛, *Self- $\Delta$  Unknotting Operation and Alexander invariants*, 箱根セミナ記録1997 (1998), 17–20.  
 [NS] Y. Nakanishi and T. Shibuya, *Relations among self-Delta equivalence and self-Sharp equivalences*, preprint (1998).  
 [Ok] M. Okada, *Delta-unknotting operation and the second coefficient of the Conway polynomial*, *J. Math. Soc. Japan* **42** (1990), 713–717.  
 [Sh] T. Shibuya, *Self  $\Delta$ -equivalence of ribbon links*, *Osaka J. Math.* **33** (1996), 751–760.

## APPENDIX

以下に、交叉点数が 7 以下の素な 2 成分絡み目の 57 の ordered and oriented types について、表をまとめた。

(74)

