箱根セミナ 9 7 (1997) 17-20.

SELF-Δ UNKNOTTING OPERATION AND ALEXANDER INVARIANTS

中西 康剛 (神戸大学理学部)

1. Introduction

Murakami-Nakanishi [MN] により定義された Δ-unknotting operation は、 Fig. 1 にあるような 1 箇所のみ異なるような 2 つの結び目や絡み目の正則表示 K, L の間の局所変形である。さらに、K, L で表示されるような結び目や絡み目を κ, λ で表すとき、 κ と λ は互いに Δ-move 一回でうつるという。

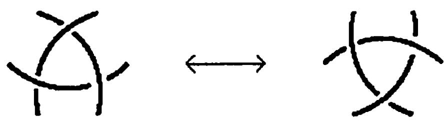

Fig. 1

Proposition 1 ([MN]). *Δ-unknotting operation* は、一般化した結び目解消操作である。さらに、 2 つの結び目や絡み目が *Δ-moves* の有限回の操作でうつりあうための必要十分条件は、 2 つの結び目や絡み目が同じ成分数を持ち、 かつ、 適当な成分の順序や向きをつけたときに、 対応する成分間の絡み数が一致することである。

特に、 Δ-unknotting operation を施す arcs がすべて同じ成分に属するとき、 self-Δ-unknotting operation という。 ([Sh])

以下では、 self-Δ-unknotting operations の有限回の操作でうつりあうための必要条件を考える。

Proposition 2. 2 つの絡み目 κ, λ が *self-Δ-unknotting operations* の有限回の操作でうつりあうとき、 適当に *Alexander matrices* $A_\kappa(t_1, \ldots, t_n)$, $A_\lambda(t_1, \ldots, t_n)$ を選択すれば、

$$A_\kappa(t_1, \ldots, t_n) \equiv A_\lambda(t_1, \ldots, t_n) \bmod \{(1-t_1)^2, \ldots, (1-t_n)^2\},$$
$$\Delta_\kappa(t_1, \ldots, t_n) \equiv \pm t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \Delta_\lambda(t_1, \ldots, t_n) \bmod \{(1-t_1)^2, \ldots, (1-t_n)^2\}$$

が成り立つ。

上記において、 $f(t_1, \ldots, t_n) \equiv g(t_1, \ldots, t_n) \bmod \{h_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, h_j(t_1, \ldots, t_n)\}$ は、$f(t_1, \ldots, t_n)$ と $g(t_1, \ldots, t_n)$ が $\mathbf{Z}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle/(h_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, h_j(t_1, \ldots, t_n))$ で同じ類に属することを意味する。

2 成分絡み目 $\lambda = L_1 \cup L_2$ の絡み数が $lk(L_1, L_2) = 0$ であるとき、以下の事実が知られている。([B], [N])

Proposition 3. 2 成分絡み目 $\lambda = L_1 \cup L_2$ の絡み数が $lk(L_1, L_2) = 0$ であるとき、*Alexander* 多項式は以下で特徴づけられる。

$$\Delta(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2)m(t_1, t_2)、\text{ただし、} m(t_1^{-1}, t_2^{-1}) = m(t_1, t_2).$$

Propositions 2, 3 から以下の事実がわかる。

Proposition 4. 絡み数が 0 であるような 2 成分絡み目 $\kappa = K_1 \cup K_2$, $\lambda = L_1 \cup L_2$ が有限回の *self-Δ-moves* でうつりあうならば、

$$\Delta_\kappa(t_1, t_2) \equiv \pm t_1^{r_1} t_2^{r_2} \Delta_\lambda(t_1, t_2) \bmod \{(1 - t_1)^2, (1 - t_2)^2\}$$

をみたす。

さらに、$m(t_1, t_2)$ を *Proposition 3* の意味で用いると、

$$m_\kappa(1, 1) = \pm m_\lambda(1, 1)$$

をみたす。

Proposition 4 と $m_{0_1^2}(1, 1) = 0, m_{5_1^2}(1, 1) = 1, m_{7_3^2}(1, 1) = 2, m_{9_{10}^2}(1, 1) = 3$ から、4 つの 2 成分絡み目 $0_1^2, 5_1^2, 7_3^2, 9_{10}^2$ は、互いに有限回の self-Δ-moves の操作ではうつりあわないことがわかる。

一方で、3 つの2 成分絡み目 $0_1^2, 8_{10}^2, 8_{12}^2$ は、有限回の self-Δ-moves の操作でうつりあうが、$m_{0_1^2}(1, 1) = 0, m_{8_{10}^2}(1, 1) = 0, m_{8_{12}^2}(1, 1) = 0$ から、Proposition 4 の結果には反しない。

2. Proof of Proposition 2

Proposition 2 を証明するには、次の Lemma を示せばよい。

Lemma. 2 つの n 成分絡み目 $\kappa = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, $\lambda = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ が *Fig. 2* で示されるような 1 箇所のみ異なる正則表示を持っていたとし、ここで表れる *arcs* がすべて i 番目の成分であったとする。このとき、適当に *Alexander matrices* $A_\kappa(t_1, \ldots, t_n)$, $A_\lambda(t_1, \ldots, t_n)$ を選択すると、

$$A_\kappa(t_1, \ldots, t_n) \equiv A_\lambda(t_1, \ldots, t_n) \bmod \{(1 - t_i)^2\},$$
$$\Delta_\kappa(t_1, \ldots, t_n) \equiv \pm t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \Delta_\lambda(t_1, \ldots, t_n) \bmod \{(1 - t_i)^2\}$$

が成り立つ。

Proof of Lemma. 基本群 $\pi_1(S^3 - \kappa)$ の生成元 $x_1, \ldots, x_6$ を Fig. 2 の左図に示されるように取り、他の生成元 $x_7, \ldots$ は通常通りに取る。同様に、基本群 $\pi_1(S^3 - \lambda)$ の生成元 $x_1, \ldots, x_6$ を

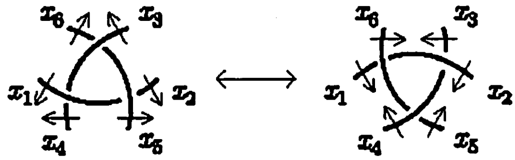

Fig. 2

Fig. 2 の左図に示されるように取り、 他の生成元 $x_7, \ldots$ は通常通りに取る。 すると、 $\pi_1(S^3 - \kappa)$ と $\pi_1(S^3 - \lambda)$ の群表示として次のものが得られる。

$$|x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots \quad | \quad x_1x_5x_2^{-1}x_5^{-1}, x_3x_1x_4^{-1}x_1^{-1}, x_5x_3x_6^{-1}x_3^{-1}, r_j|,$$

$$|x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots \quad | \quad x_1x_6x_2^{-1}x_6^{-1}, x_3x_2x_4^{-1}x_2^{-1}, x_5x_4x_6^{-1}x_4^{-1}, r_j|.$$

ここで、 r_j は図にない交差に対応する関係子である。 Fox's free differential calculus [F1, F2] により、 2 つの絡み目 κ, λ の Alexander matrices $A_\kappa(t_1, \ldots, t_n)$, $A_\lambda(t_1, \ldots, t_n)$ が次のように得られる。

$$\begin{vmatrix} 1 & -t_i & 0 & 0 & t_i - 1 & 0 & \mathbf{0} \\ t_i - 1 & 0 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & t_i - 1 & 0 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -t_i & 0 & 0 & 0 & t_i - 1 & \mathbf{0} \\ 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix}.$$

ここで、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ は列ベクトルで、 $\mathbf{M}$ は行列である。 また、 $|\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{M}|$ は計算 $\alpha\phi(\partial r_j / \partial x_i)$ に対応する部分である。 各 $\mathbf{0}$ はすべての成分が 0 であるような行ベクトルである。

表示行列の基本変形により、 次のように変形できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & -t_i & 0 & 0 & t_i - 1 & 0 & \mathbf{0} \\ t_i - 1 & 0 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & t_i - 1 & 0 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t_i - 1 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & t_i - 1 & 0 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} + t_i^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} + t_i^{-1}\mathbf{b} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{d} & \mathbf{c} + t_i^{-1}\mathbf{d} & \mathbf{e} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim |\mathbf{a} + t_i^{-1}\mathbf{b} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{d} \quad \mathbf{c} + t_i^{-1}\mathbf{d} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{f} \quad \mathbf{e} + t_i^{-1}(t_i - 1)\mathbf{b} + t_i^{-1}\mathbf{f} \quad \mathbf{M}|$$

$$\sim |t_i\mathbf{a} + \mathbf{b} + (t_i - 1)\mathbf{d} \quad t_i\mathbf{c} + \mathbf{d} + (t_i - 1)\mathbf{f} \quad t_i\mathbf{e} + (t_i - 1)\mathbf{b} + \mathbf{f} \quad \mathbf{M}|,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -t_i & 0 & 0 & 0 & t_i - 1 & \mathbf{0} \\ 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t_i - 1 & 1 & -t_i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} + t_i\mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} - (t_i - 1)\mathbf{a} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & t_i - 1 & 1 & -t_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} + t_i\mathbf{a} - (t_i - 1)\mathbf{c} & \mathbf{d} + t_i\mathbf{c} & \mathbf{e} & \mathbf{f} - (t_i - 1)\mathbf{a} & \mathbf{M} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} \mathbf{b} + t_i\mathbf{a} - (t_i - 1)\mathbf{c} & \mathbf{d} + t_i\mathbf{c} - (t_i - 1)\mathbf{e} & \mathbf{f} - (t_i - 1)\mathbf{a} + t_i\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{vmatrix}.$$

ここで以下の計算に注目しよう。

$$\mathbf{f} - (t_i - 1)\mathbf{a} + t_i\mathbf{e} + (t_i - 1)(\mathbf{b} + t_i\mathbf{a} - (t_i - 1)\mathbf{c}) \equiv \mathbf{f} + t_i\mathbf{e} + (t_i - 1)\mathbf{b} \bmod (t_i - 1)^2,$$

$$\mathbf{d} + t_i\mathbf{c} - (t_i - 1)\mathbf{e} + (t_i - 1)(\mathbf{f} - t_i\mathbf{e} + (t_i - 1)\mathbf{b}) \equiv \mathbf{d} + t_i\mathbf{c} + (t_i - 1)\mathbf{f} \bmod (t_i - 1)^2,$$

$$\mathbf{b} + t_i\mathbf{a} - (t_i - 1)\mathbf{c} + (t_i - 1)(\mathbf{d} + t_i\mathbf{c} + (t_i - 1)\mathbf{f}) \equiv \mathbf{b} + t_i\mathbf{a} + (t_i - 1)\mathbf{d} \bmod (t_i - 1)^2.$$

故に、 上の 2 つの行列は mod $(t_i - 1)^2$ で一致する。 以上で証明が得られた。

References

[B] J.L. Bailey, *Alexander invariants of links*, Ph.D. Thesis (1977), Univ. of British Columbia.

[F1] R.H. Fox, *Free differential calculus, I*, Ann. of Math. **57** (1953), 547 – 560.

[F2] R.H. Fox, *Free differential calculus, II*, Ann. of Math. **59** (1954), 196 – 210.

[MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75 – 89.

[N] Y. Nakanishi, *A surgical view of Alexander invariants of links*, Math. Seminar Notes Kobe Univ. **8** (1980), 199 – 218.

[R] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc., 1976.

[Sh] T. Shibuya, *Self Δ-equivalence of ribbon links*, Osaka J. Math. **33** (1996), 751 –760.