箱根セミナ記録 9 6 (1996) 7-11.

Unknotting Numbers and Knot Diagrams

中西康剛　（神戸大学理学部）

1. *Introduction*

結び目 k の結び目解消数 $u(k)$ は、 k を表現するような結び目正則射影図全てのなかで、 自明な結び目正則射影図を得るために必要な交叉の上下の入れ替えの最小数である。 この定義において、 「結び目正則射影図全て」 を 「最小交叉結び目正則射影図全て」 にかえると結び目解消数が得られないことは [5] と Bleiler [1] にある。 結び目 10_8 (Conway notation [2] では 514) の最小交叉正則射影図 (Fig. 1 (a)) は S^2 上で一意で $u(10_8) = 2$ であることが知られている。 ところが、 どの 2 つの交叉の上下を入れ替えても自明な結び目正則射影図にはならない。 （最小交叉ではないが、 別な結び目正則射影図を適切にとれば、 2 つの交叉の上下を入れ替えて自明な結び目正則射影図が得られる。） そこで、 次のような疑問が湧く。

K をk を表現するような最小交叉正則結び目射影図とするとき、 いずれかの交叉の上下の入れ替えをすれば、 結び目解消数は減るのではないだろうか。

ここで、 K が最小交叉結び目正則射影図であることは必要である。 このことは、 例えば [5] に、 結び目解消数が 1 である結び目 6_2 (= 312) の （最小交叉ではない） 結び目正則射影図でどの交叉の上下を入れ替えても 自明な結び目正則射影図にならない例があげられている。 また、 有名な Conway の 11 交叉数結び目の 2 個の結び目正則射影図を Fig. 1 (b), (c) にあげたが、 最小交叉の (b) の図の $*$ で示された交叉の上下の入れ替えで自明な結び目正則射影図が得られるのに対して、 最小交叉でない (c) の図のどの交叉の上下の入れ替えによっても自明な結び目正則射影図は得られない。 また、先の例で、 Fig. 1 (a) の $*$ で示された交叉の上下を入れ替えると、 結び目解消数が 1 である 6_2 が得られる。

(a)　(b)　(c)

Fig. 1

この報告では、 結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目については上記の疑問に対する解答が得られたことを扱う。

Kanenobu and Murakami [3] は、結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目の特徴付けを行い、Conway notation で次のように表現されると示した。

$$C(a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \pm 2, -a_n, \ldots, -a_2, -a_1).$$

2 節において、この Conway notation に対応する結び目正則射影図を交代的に変形する。このとき、自明な結び目解消正則射影図が得られる交叉の上下の入れ替えが生き残れるようにする。Kauffman, Murasugi [4] および Thistlethwaite [7] によって既約な交代的結び目正則射影図は最小交叉であることがわかっているので、次の結果を得たことになる。

Theorem A. 結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目のある最小交叉結び目正則射影図において、ある交叉の上下の入れ替えで、自明な結び目正則射影図が得られる。

第三 Tait 予想によれば、同じ結び目を表現するような 全ての既約な最小交叉結び目正則射影図は flypes の有限回の操作でうつりあう、という。ここで、自明な結び目正則射影図を得るような交叉の上下の入れ替えは、flype の操作の後も生き残るので、次のようにもいえる。

Theorem B. 第三 Tait 予想を仮定すると、結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目の任意の最小交叉結び目正則射影図において、ある交叉の上下の入れ替えで、自明な結び目正則射影図が得られる。

2. *Deformation and Proof*

Proposition 1 ([3]). 結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目は Conway notation で次のように表現できる。

$$C(a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \pm 2, -a_n, \ldots, -a_2, -a_1).$$

上の Proposition により、結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目は Fig. 2 のように描ける。ここで、$a, a_2, a_4, \ldots$ は右手系の交叉の個数を表し、$a_1, a_3, \ldots$ は左手系の交叉の個数を表す。Fig. 2 では、$a = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3, \ldots$ の場合を表している。また、$*$ で示された交叉の上下を入れ替えると自明な結び目正則射影図が得られる。

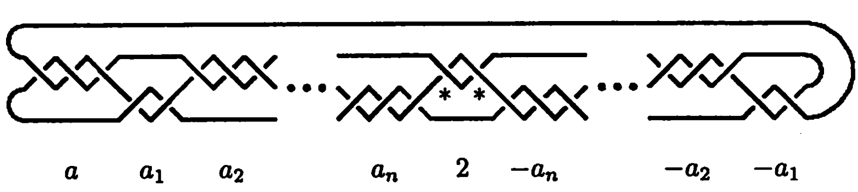

Fig. 2

この節では、この結び目正則射影図を交代的に変形する。

第一段として、どの対 a_i, a_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ も同じ符号を持つように変形しよう。異なる符号を持つとき、Fig. 3 のように 3 本の braid の中心部分（a_{i+1} に対応する交叉の 2 番目の交叉から $-a_{i+1}$ に対応する交叉の後から 2 番目の交叉まで）を π だけ回転することにより、$*$ で示された交叉を保ちつつ交叉数を 2 減らす。

交叉数は有限であるので、この操作を有限回施すことにより、どの対 a_i, a_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ も同じ符号を持つように変形される。

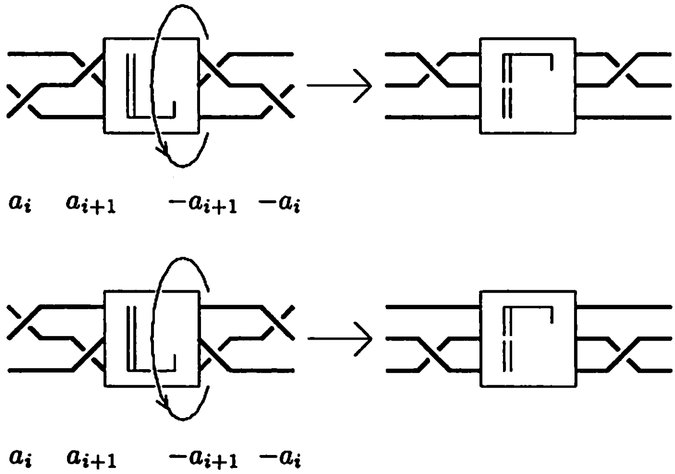

Fig. 3

第二段として、次の変形を行う。第一段の変形の後で非交代的である可能性は高々 2 箇所である。ひとつは a と a_1 であり、もうひとつは a_n と ± 2 あるいは ± 2 と $-a_n$ である。前者 a と a_1 の対については、a に対応する交叉の最後の交叉から a_1 に対応する交叉の最初の交叉までを Fig. 4 のように押し出してやる。

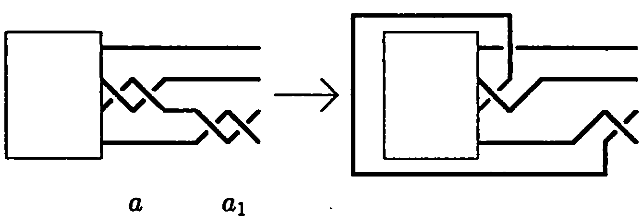

Fig. 4

後者 a_n と ±2 (あるいは a_n と ±2) の対については、 a_n に対応する交叉の最後の交叉から ±2 に対応する交叉の最初の交叉まで (±2 に対応する交叉の最後の交叉から $-a_n$ に対応する交叉の最初の交叉まで) を Fig. 5 のように押し出してやる。

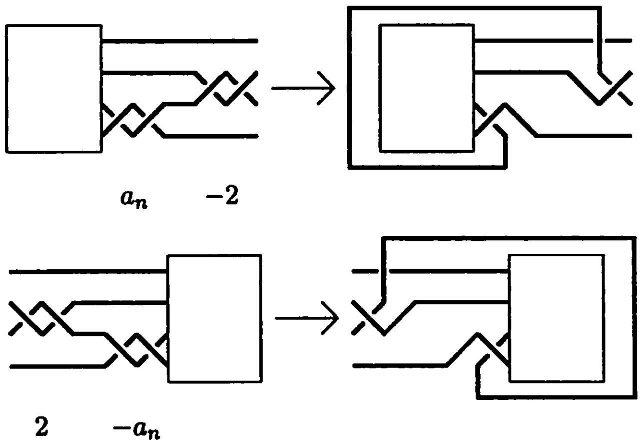

Fig. 5

第二段の操作を施した後は、 交代的な結び目正則射影図が得られており、 また既約になっている。 次の Kauffman, Murasugi [4] および Thistlethwaite [7] によって得られた結果により、この結び目正則射影図は最小交叉である。 また、 ある交叉で上下の入れ替えをすると自明な結び目正則射影図になっている。

Proposition 2 (第二 Tait 予想 [4], [7]) . 交代的結び目の既約で交代的な結び目正則射影図の交叉数は一定である。

操作 flype は Fig. 6 に描かれるような結び目正則射影図上の変形である。 ここで、 操作の前後で、 * で示される交叉の上下の入れ替えをすると同型な結び目が得られることに注目しよう。

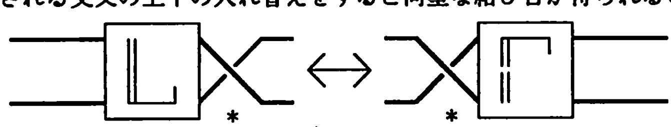

Fig. 6

第三 Tait 予想によれば、 同じ結び目を表現する 全ての既約で交代的な結び目正則射影図は flypcs の有限回の操作でうつりあう。 それで、 結び目解消数が 1 であるような 2 橋結び目の任意の最小交叉結び目正則射影図において、 ある交叉の上下の入れ替えで、 自明な結び目正則射影図が得られる。

REFERENCES

[1] S. A. Bleiler. A note on unknotting number. *Math. Proc. Cambridge Phils. Soc.* **96** (1984), 469–471.

[2] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and their algebraic properties. In *Computational problems in Abstract Algebra.* (Pergamon Press 1970), pp. 329–358.

[3] T. Kanenobu and H. Murakami. Two-bridge knots with unknotting number one. *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), 499–502.

[4] K. Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* **26** (1987), 187–194.

[5] Y. Nakanishi. Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings. *Math. Seminar Notes Kobe Univ.* **11** (1983), 257–258.

[6] P. G. Tait. On knots, I. In *Scientific paper*. (Cambridge Univ. Press 1898), pp. 273–347.

[7] M. B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* **26** (1987), 297–309.