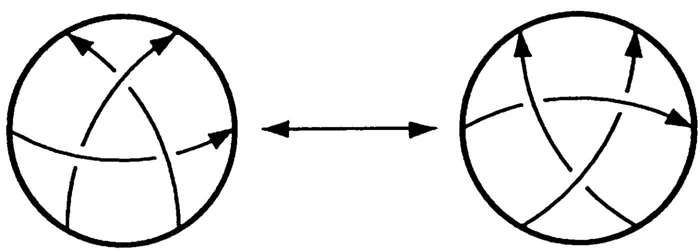
箱根セミナ記録 9 5 (1995) 49-54.

Delta-Unknotting Number for Knots, II

中西康剛（神戸大学理学部）

以下は、内田吉昭氏（山形大学理学部）、中村一路氏（大阪大学理学部）との共同研究の報告である。

Δ-unknotting operation は、次の図のように link diagram における local move であって、これの有限回の操作で移り合うことと link の対応する components の間の linking numbers が一致することが同値であることが [MN] により知られている。



そして、特に、knots に関しては有限回で移り合うので、その最小回数を Δ-Gordian distance $d_G^{\Delta}(k_1, k_2)$ という。また、trivial knot との間の Δ-Gordian distance を Δ-unknotting number $u^{\Delta}(k)$ という。

Δ-unknotting number に関して、知られている結果は、次の通りである。([MN], [O])

Proposition 1. *(1)* $u^{\Delta}(k) \equiv \mathrm{Arf}(k) \pmod 2$,
(2) $u^{\Delta}(k) \geq m(k)/2$,
(3) $u^{\Delta}(k) \geq T(k)$,
(4) $u^{\Delta}(k) \geq g^*(k) \geq |\sigma(k)|$,
(5) $u^{\Delta}(k) \geq |a_2(k)|$.

Proposition 2. *(1)* $d_G^{\Delta}(k_1, k_2) \equiv \mathrm{Arf}(k_1) - \mathrm{Arf}(k_2) \pmod 2$,
(2) $d_G^{\Delta}(k_1, k_2) \equiv |a_2(k_1) - a_2(k_2)|$.

また、Δ-unknotting number が決定されている knots は、岡田 ([O]) により、交点数 8 以下の素な結び目と twisted knots が、中村 ([N]) により、14 個を除く交点数 10 以下の素な結び目について Δ-unknotting number が決定されている。

(50)

この報告の目的は、交差がすべて正であるような pretzel knot の Δ-unknotting number が決定できたことを報告することにある。

Main Theorem. 交差がすべて正であるような pretzel knot に対して、 $u^{\Delta} = a_2$ である。

証明の概略

交差がすべて正であるような pretzel knots を二つの場合に分ける。

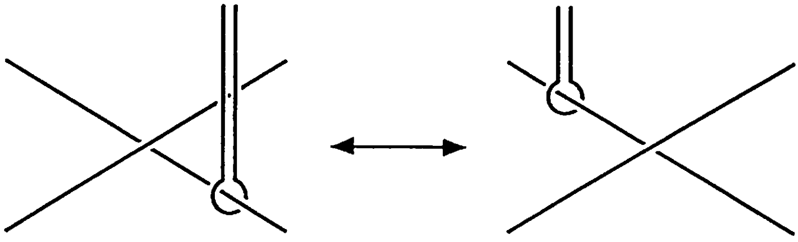
(1) 奇数 n 個の正の整数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の場合。

(2) 正の整数 α_1 と奇数 $n-1$ 個の正の整数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の場合、及び、負の整数 α_1 と偶数 $n-1$ 個の正の整数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の場合。

証明において次の Claims を用いる。

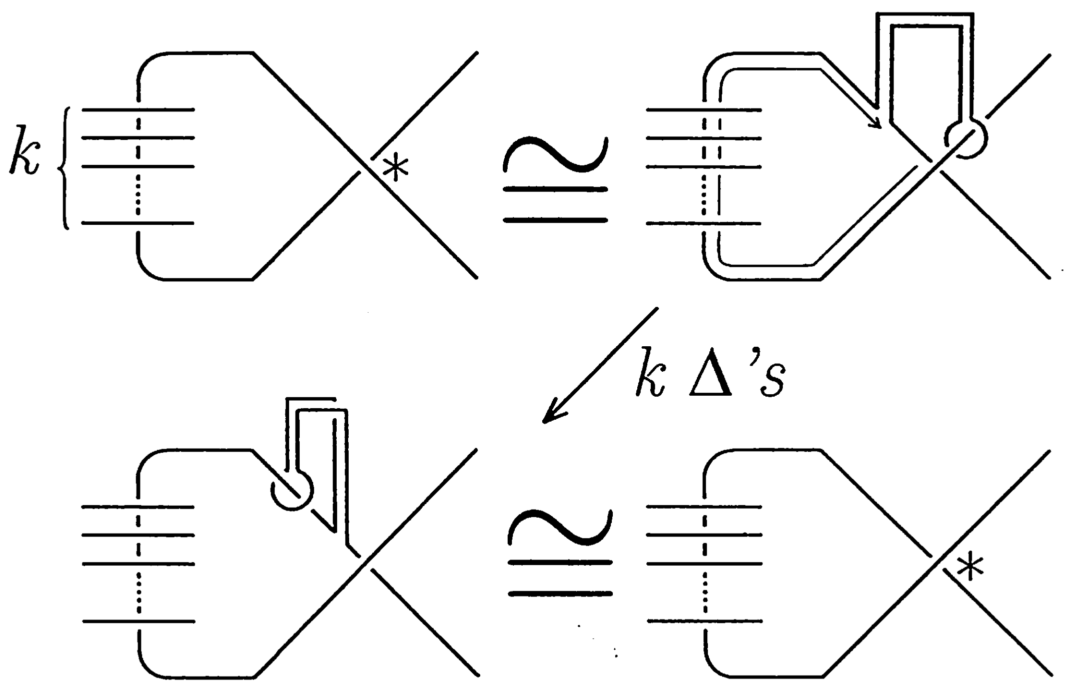
Claim 1. 止め金は一回の Δ-unknotting operation でハードルを越える。

主張の意味は下図の通りである。ここで、止め金は他の結び目図式の載る平面に対して垂直に立っており Δ-unknotting operation によって交差点を通過できることを図示している。



Claim 2. 結び目図式において有限回の Δ-unknotting operations で交差の上下を入れ替えれる。

主張の意味は下図の通りである。ここで、止め金は k 回の Δ-unknotting operations によって k 個の交差点を通過することによって交差の上下の入れ替えができることを図示している。



Calim 3. 結び目図式 k_+ のある正の交差点で、上下を入れ替えたものを k_-、スムージングしたものを k_∞ とするとき、Conway 多項式の 2 次の係数 a_2 について、$a_2(k_+)-a_2(k_-)=lk(k_\infty)$ が成り立つ。

証明は例えば [K] にある。

さて、pretzel knots に話を戻そう。

Case (1) 奇数 n 個の正の整数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の場合。すべての α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が 1 である場合には、$(2, n)$ 型の torus knot であり、[O] によって証明済みである。そこで、一般性を失わずに $\alpha_1 \geq 3$ としてよい。

始めの α_1 回の捩れの strand の交差について、交差の入れ替えと smoothing を考える。つまり、$k_+^{(1)} = P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ とし、交差の上下を入れ替えたものを $k_-^{(1)}$、スムージングしたものを $k_\infty^{(1)}$ とおく。$k_\infty^{(1)}$ のすべての交差は正であるので、Claim 2 に従って止め金を動かすときに $lk(k_\infty^{(1)})$ 回の Δ-unknotting operations によって交差点を通過することによって交差点 C_1 の上下の入れ替えができる。Proposition 2 により、$a_2(k_+^{(1)}) - a_2(k_-^{(1)}) = lk(k_\infty^{(1)}) \geq d_G^\Delta(k_+^{(1)}, k_-^{(1)}) \geq 0$ が得られる。

次にこのようにして得られた $k_-^{(1)}$ を $k_+^{(2)} = P(\alpha_1 - 2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ とし、交差の上下を入れ替えたものを $k_-^{(2)}$、スムージングしたものを $k_\infty^{(2)}$ とおく。同様の議論により、$a_2(k_+^{(2)}) - a_2(k_-^{(2)}) = lk(k_\infty^{(2)}) \geq d_G^\Delta(k_+^{(2)}, k_-^{(2)}) \geq 0$ が得られる。以下、始めの捩れの strand の交差について同様の議論をおこない、$a_2(k_+^{(i)}) - a_2(k_-^{(i)}) = lk(k_\infty^{(i)}) \geq d_G^\Delta(k_+^{(i)}, k_-^{(i)}) \geq 0 \quad (i = 3, \ldots, w = (\alpha - 1)/2)$ が得られる。これらの辺を足しあわせることにより、

$$a_2(k_+^{(1)}) - a_2(k_-^{(w)}) = \sum_{1 \leq i \leq w} a_2(k_+^{(i)}) - a_2(k_-^{(i)}) \geq \sum_{1 \leq i \leq w} d_G^\Delta(k_+^{(i)}, k_-^{(i)}) \geq d_G^\Delta(k_+^{(1)}, k_-^{(w)}) \geq 0$$

が得られる。

ここで、$k_-^{(w)}$ が $P(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の図式になっていることに注意する。

次に、次の α_2 回の捩れの strand の交差について、交差の入れ替えと smoothing を考える。以上と同様の議論により、$P(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の図式は $P(1, 1, \ldots, \alpha_n)$ の図式に Δ-unknotting operations によって変形でき、

$$a_2(P(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) - a_2(P(1, 1, \ldots, \alpha_n)) \geq d_G^\Delta(P(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), P(1, 1, \ldots, \alpha_n)) \geq 0$$

が得られる。以下、n に関する induction により、$P(1, \ldots, 1, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ の図式は $P(1, \ldots, 1, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ の図式に Δ-unknotting operations によって変形でき、

$$a_2(P(1, \ldots, 1, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)) - a_2(P(1, \ldots, 1, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n))$$
$$\geq d_G^\Delta(P(1, \ldots, 1, \alpha_i, \ldots, \alpha_n), P(1, \ldots, 1, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)) \geq 0 \quad (i = 3, \ldots, n)$$

が得られる。これらの辺を足しあわせることにより、

$$
\begin{aligned}
& a_2(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) - a_2(P(1,1,\dots,1)) \\
&\quad = \sum_{1\le i\le n} a_2(P(1,\dots,1,\alpha_i,\dots,\alpha_n)) - a_2(P(1,\dots,1,1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)) \\
&\quad \ge \sum_{1\le i\le n} d_G^{\triangle}(P(1,\dots,1,\alpha_i,\dots,\alpha_n), P(1,\dots,1,1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)) \\
&\quad \ge d_G^{\triangle}(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), P(1,1,\dots,1)) \ge 0
\end{aligned}
$$

が得られる。$P(1,1,\dots,1)$ が $a_2(P(1,1,\dots,1)) \ge u^{\Delta}(P(1,1,\dots,1)) \ge 0$ をみたす結び目であることに注目して、$a_2(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) \ge u^{\Delta}(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) \ge 0$ が得られる。

一方で、[O] の次の結果 Proposition 3 により
$a_2(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) \le u^{\Delta}(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))$ であるから、

$$a_2(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) = u^{\Delta}(P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))$$

と証明できた。

(2) 正の整数 α_1 と奇数 $n-1$ 個の正の整数 $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ の場合, 及び、負の整数 α_1 と偶数 $n-1$ 個の正の整数 $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ で定まる pretzel knot $P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ の場合。

始めの α_1 回の捩れの strand の交差について、交差の入れ替えと smoothing を考える。つまり、$k_+^{(1)} = P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ とし、交差の上下を入れ替えたものを $k_-^{(1)}$、スムージングしたものを $k_\infty^{(1)}$ とおく。$k_\infty^{(1)}$ のすべての交差は正であるので、Claim 2 に従って止め金を動かすときに $lk(k_\infty^{(1)})$ 回の Δ-unknotting operations によって交差点を通過することによって交差点 C_1 の上下の入れ替えができる。Proposition 2 により、$a_2(k_+^{(1)}) - a_2(k_-^{(1)}) = lk(k_\infty^{(1)}) \ge d_G^{\triangle}(k_+^{(1)}, k_-^{(1)}) \ge 0$ が得られる。

次にこのようにして得られた $k_-^{(1)}$ を $k_+^{(2)} = P(\alpha_1 \mp 2,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ とし、交差の上下を入れ替えたものを $k_-^{(2)}$、スムージングしたものを $k_\infty^{(2)}$ とおく。同様の議論により、$a_2(k_+^{(2)}) - a_2(k_-^{(2)}) = lk(k_\infty^{(2)}) \ge d_G^{\triangle}(k_+^{(2)}, k_-^{(2)}) \ge 0$ が得られる。以下、始めの捩れの strand の交差について同様の議論をおこない、$a_2(k_+^{(i)}) - a_2(k_-^{(i)}) = lk(k_\infty^{(i)}) \ge d_G^{\triangle}(k_+^{(i)}, k_-^{(i)}) \ge 0 \quad (i = 3,\dots,w=\alpha_1/2)$ が得られる。これらの辺を足しあわせることにより、

$$a_2(k_+^{(1)}) - a_2(k_-^{(w)}) = \sum_{1\le i\le w} a_2(k_+^{(i)}) - a_2(k_-^{(i)}) \ge \sum_{1\le i\le w} d_G^{\triangle}(k_+^{(i)}, k_-^{(i)}) \ge d_G^{\triangle}(k_+^{(1)}, k_-^{(w)}) \ge 0$$

が得られる。

ここで、$k_-^{(w)}$ が $P(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ の図式になっていることに注意する。これは、$(2,\alpha_i)$ 型の torus knots $(i=2,\dots,n)$ であり、[O] によって
$a_2(P(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) = u^{\Delta}(P(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) \ge 0$ である。これから、

$a_2(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \geq u^\Delta(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \geq 0$ が得られる。

一方で、[O] の次の結果 Proposition 3 により

$a_2(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \leq u^\Delta(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$ であるから、

$$a_2(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = u^\Delta(P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$$

と証明できた。

Proposition 3. $|a_2(k)| \leq u^\Delta(k)$.

Referemces

[K] L.H. Kauffman: On knots, Ann. of Math. Study, vol. 115, Princeton Univ., 1990.

[MN] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann., 284 (1989), 75–89.

[N] K. Nakamura: Generalized unknotting operations of polygonal type and rotational type, 大阪大学大学院修士論文, 大阪大学, 1995.

[O] M. Okada: Delta unknotting operations and the second coefficient of the Conway polynomial, J. Math. Soc. Japan, 42 (1990), 713–717.