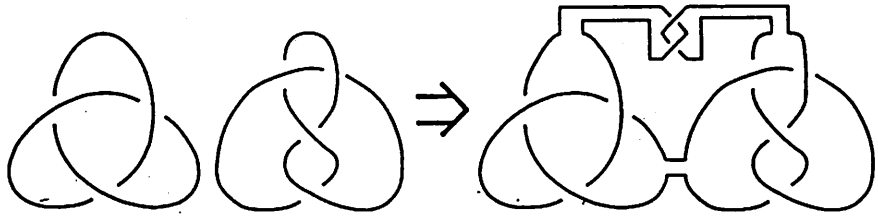
箱根セミナ記録 9 3 (1993)95-99.

# ユニオンの素性について

神戸大学理学部・中西康剛

渋谷［1］の研究において、局所結び目をもたないような、2つの非自明結び目のユニオンは必ず素であるとの結果が得られているが、証明を数度聴くうちにタングルの議論が使えるように思えた。そこで、いくつかの場合に分けて考えたところ、より一般化した結果を得た。以下はその要旨である。

ユニオンの概念は、樹下・寺坂［2］により導入されたもので、与えられた2つの結び目の正則射影図から次図のように結びつけてできる結び目を2つの結び目のユニオンと呼ぶ。



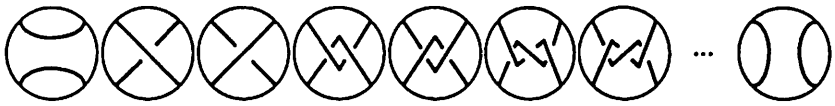
後述する主定理の系として、上述の結果が得られる。

系　局所結び目をもたないような、2つの非自明結び目のユニオンは必ず素である。

## 1．タングル

この報告では、タングルとは、3次元球体 $B$ とそのプロパーに埋め込まれた2本の弧 $t$ の対（$B$, $t$）を示す。（つまり2糸タングルのみを取り扱う。）タングルが局所結び目をもたないときに**局所自明**という。2つのタングルが同値であるとは、対の同相写像があるときにいう。タングルの2本の弧が3次元球体にプロパーに埋め込まれた円板によって

分離されるとき、タングルが**分離可能**であるという。局所自明で分離可能なタングルを**自明なタングル**という。また、この自明なタングルの正則射影図を有理タングルということがある。その特別な場合に、**整数タングル**がある。（次図参照。）局所自明で分離可能でないタングルを、**素なタングル**という。



0　1　-1　2　-2　3　-3　∞

このとき、次のような事実が判る。

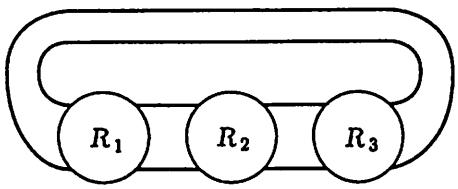
**命題**　（1）　2つの素なタングルのタングル和で表される結び目（または絡み目）は素である。

（2）　素なタングルと自明なタングルの接合で表されるタングルは自明なタングルのどちらの弧も接合の円板に境界平行でないならば、素である。

（3）　2つの自明なタングルの接合で表されるタングルは、どちらの自明なタングルのどちらの弧も接合の円板に境界平行でなく、かつ、どちらの自明なタングルも整数タングルでなければ、素なタングルである。

## 2．Montesinos 結び目

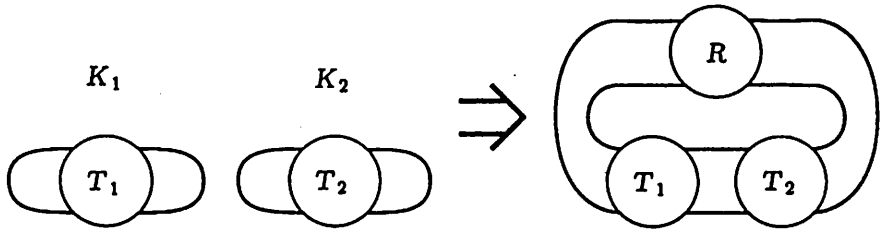
Montesinos 結び目と呼ばれる一群の結び目がある。この報告では、特に、3つの有理タングル $R_1, R_2, R_3$ で与えられる次図のような Montesinos 結び目のみを扱う。



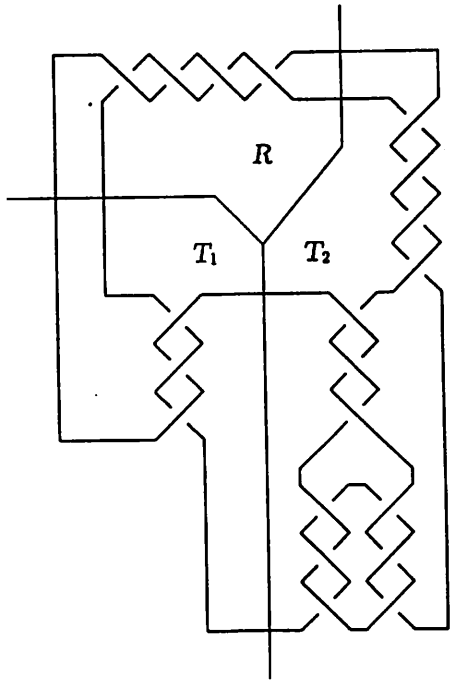
この図において、有理タングルが全て整数タングルでないとき、素な3橋結び目であることが、［3，4］により知られている。

## 3．主定理

**主定理**　与えられた2つの非自明結び目の正則射影図から次図のように結びつけてできる結び目は、素である。ただし、$R$ で表されているタングルは、整数タングルを除く有理タングルである。




**註**　この主定理で整数タングルを除いているのは、次のような反例があるからである。



**証明**　次の３通りに分けて証明する。

（１）　$T_1, T_2$ がともに素なタングルであるとき。

（２）　$T_1, T_2$ の一方が素なタングルで、他方が自明なタングルであるとき。

（３）　$T_1, T_2$ がともに自明なタングルであるとき。

（１）　命題の（２）により、$T_1$ と $R$ の接合で得られるタングルは素であり、$T_2$ が素であることから、命題の（１）から得られる結び目や絡み目は素であるとわかる。

（２）　$T_1, T_2$ の内、自明なタングルを $T_1$ としよう。$K_1$ が非自明であることから $T_1$ が整数タングルでないことがわかる。命題の（３）により、$T_1$ と $R$ の接合で得られるタングルは素であり、$T_2$ が素であることから、命題の（１）から得られる結び目や絡み目は素であるとわかる。

（３）　（２）と同様にして、$T_1, T_2$ が整数タングルでないことがわかる。$R$ が整数タングルでないことから、このMontesinos結び目（または、絡み目）は素であるとわかる。

## ４．インサイドストーリー

１９８０年代の結び目理論の発展は多くのものを我々にもたらしてくれている。強可逆的結び目のProperty P の解決、Property R の解決、バンド和に関する種数の超加法性などにより次のような事実が容易に証明される。

自明でないタングルに対して、自明な結び目が得られるようなタングル和は高々一通りである。

自明でないタングルに対して、成分数が２の自明な絡み目が得られるようなタングル和は高々一通りである。

タングルに対して、自明な結び目が得られるようなタングル和と、成分数が２の自明な絡み目が得られるようなタングル和とがあれば、与えられたタングルは自明である。

こうした事実と関連しているがまだ未解決の問題に次がある。

与えられたタングルに対して、素でない結び目や絡み目が得られるようなタングル和は何通りあるか。

Eudave-Muñoz ［5］の研究により、あるとしても高々3通りであることが知られているが、3通りとなる例はまだ発見されていない。2通りとなる例はその論文で与えられている。この例が、主定理での反例と関連している。

## 参考文献


［1］T. Shibuya: Primeness of union of knots, 1993 preprint.

［2］S. Kinoshita and H. Terasaka: On union of knots, Osaka Math. J., 9 (1957), 131 - 153.

［3］F. Bonahon: Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimension 3, Thèse de 3e cycle, Orsay, 1979.

［4］M. Boileau and L. Siebenmann: A planar classification of pretzel knots and Montesinos knots, Prépublications Orsay, 1980.

［5］M. Eudave-Muñoz: Primeness and sums of tangles, Trans. Amer. Math. Soc., 306 (1988), 773 - 790.