HAKONE SEMINAR 14 (1998) 77-82.

Primitive/Seifert-fibered constructionに関する補足

日本大学　　文理　　茂手木　公彦

講演ではprimitive/Seifert-fibered constructionに関してこれまでに得られた結果について述べ，最後にprimitive/Seifert-fibered positionなるものを定義してその一意性に関してお話しました。前半部は早稲田大学での研究集会「結び目理論」の報告集[6], 関西セミナーハウスでの研究集会「結び目の数理」の報告集[7]をご覧ください。本稿では講演後にわかった事柄について書いてみようと思います。

1　Primitive/Seifert-fibered constructionとは

結び目のDehn surgeryでSeifert fibered manifoldが生じる様子を理解するためのひとつのてがかりとしてJ.Dean [3]によりPrimitive/Seifert-fibered constructionというものが考え出された。本稿では，まずはじめにPrimitive/Seifert-fibered constructionについて復習し，その自然な一般化を考える。

VをS^3内に標準的に埋め込まれたgenus 2 handlebodyとし，Kを∂V上の結び目とする。$W = S^3 - \mathrm{int}V$とおけば，$S^3 = V \cup W$はS^3のgenus 2 Heegaard splittingを与えており，$F = \partial V = \partial W$はそのHeegaard surfaceになっている。このとき$\partial N(K) \cap \partial V$の1つの成分が代表するisotopy classをFに関するKの*surface slope*と呼ぶ。

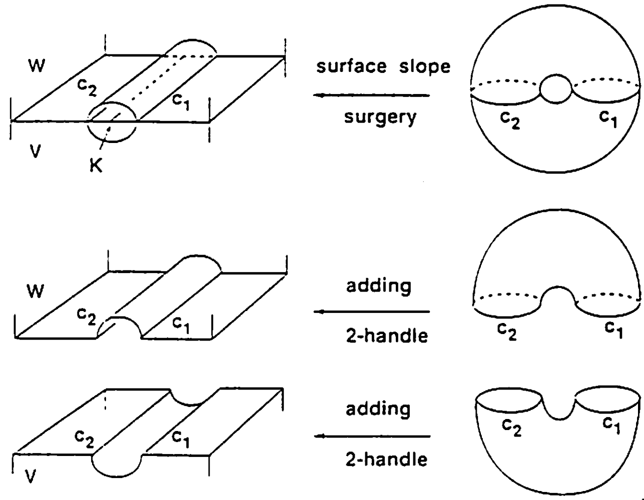

図1

図1が示すように, K 上の F に関する surface slope γ に沿って Dehn surgery をして得られた多様体 $(K;\gamma)$ は, V に K に沿って 2-handle を attach して得られた多様体 $V\cup_K[2-\text{handle}]$ と W に K に沿って 2-handle を attach して得られた多様体 $W\cup_K[2-\text{handle}]$ をそれらの境界で貼りあわせた多様体になっている。i.e., $(K;\gamma)=(V\cup_K[2-\text{handle}])\cup(W\cup_K[2-\text{handle}])$。

そこで 以下 $V\cup_K[2-\text{handle}]$, $W\cup_K[2-\text{handle}]$ について考えることにしよう。

定義 1 結び目 K は V に関して *Seifert-fibered* であるとは $V\cup_K[2-\text{handle}]$ が D^2 上高々2本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold になるときをいう。特に, $V\cup_K[2-\text{handle}]$ が solid torus のとき K は V に関して *primitive* であるという。

Remark. もともとの Dean の論文では K が Seifert-fibered あるいは primitive であるということを K を $\pi_1(V)$ の元とみて代数的に定義しているが [3, Lemma 2.2.1] により上の定義と同値であることがわかる。

S^3 の genus 2 Heegaard splitting を $S^3=V\cup_F W$ とし, K を $F=\partial V=\partial W$ 上の結び目とする。

定義 2 K が Heegaard surface F に関して *primitive/Seifert-fibered* とは K が V に関して primitive であり, W に関して Seifert-fibered のときをいう。

命題 1.1 ([3]) *K が genus 2 Heegaard surface F に関して primitive/Seifert-fibered ならば $(K;\gamma)$ (γ は F に関する surface slope) は S^2 上高々3本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold (i.e., small Seifert fibered manifold) か2つのレンズ空間の connected sum になる.*

命題1.1において $(K;\gamma)$ が Seifert fibered manifold のとき, このような構成法を *primitive Seifert-fibered construction* という。

<u>注意.</u> (1) primitive/Seifert-fibered construction は Berge [1] により導入された構成法を一般化したものになっている。Berge の構成法は特に, primitive/primitive (doubly primitive) の場合で, $(K;\gamma)$ がレンズ空間になる場合に対応している。
(2) K が V, W の両方に関して Seifert-fibered, i.e., Seifert/Seifert (doubly Seifert) である場合も考えられる。この場合は $(K;\gamma)$ は S^2 上4本の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold か graph manifold になる。

2 問題と一般化

Dean は [3] の中で次のような問題を挙げている.

(1) hyperbolic knot 上の Seifert fibering surgery は primitive/Seifert-fibered construction で説明されるか?

(2) primitive/Seifert-fibered knot は satellite knot にはなりえないか?

primitive/primitive, primitive/Seifert, Seifert/Seifert のいずれの構成も surgery slope は integral という制約はつくが, hyperbolic knot 以外の一般の結び目で考えられる。そこで次のような問題も考えられる。

(3) 任意の integral Seifert fibering surgery は primitive/Seifert, Seifert/Seifert construction で説明されるか?

そこで, hyperbolic knot 以外の結び目上の (integral な)Seifert fibering surgery に目を向けてみよう。

Example 1. torus knot 上の任意の integral Seifert fibering surgery は primitive/Seifert-fibered construction で説明される。

Example 2. $(spq \pm 1, s)$-cable of (p,q)-torus knot は 2 つの integral small Seifert fibering surgeries $s(spq \pm 1) + 1$, $s(spq \pm 1) - 1$ をもっているが, これらの surgery はいずれも primitive/Seifert-fibered construction で説明される。

Example 3. 2 つの torus knots の connected sum $T_{p,q} \sharp T_{r,s}$ 上の $pq + rs$-surgery は S^2 上 4 本の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold になるが, この surgery は Seifert/Seifert construction で説明される。

Example 4. graph knot 以外の satellite knot K で適当な整数 r に対し $(K; r)$ が S^2 上 4 本の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold になる例が知られているが ([4]), この surgery は Seifert/Seifert construction で説明される。

Example 2 の結び目のうち $(2pq \pm 1, 2)$-cable of (p,q)-torus knot に $4pq$-surgery すると, $\mathbb{P}^2$ 上 2 本の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold が得られる。

♡ この surgery はどのように説明されるのだろうか？♡

実はこの surgery も次の意味でやはり "primive/Seifert-fibered construction" で説明される。K を $(2pq \pm 1, 2)$-cable of (p,q)-torus knot とする。K を S^3 の genus 2 Heegaard splitting $S^3 = V \cup_F W$ の Heegaard surface F に "$V \cup_K [2-\text{handle}]$ が $\mathbb{P}^2$ 上 2 本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold", "$W \cup_K [2-\text{handle}]$ が solid torus" となるようにのせることができる。$V \cup_K [2-\text{handle}]$ が D^2 上高々 2 本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold ではないので, もともとの定義 1 によれば K は V に関して Seifert-fibered にはなっていない。そこで, K が V に関して *Seifert-fibered* であるということの定義を以下のように修正してみよう。

定義 1' 結び目 K が V に関して *Seifert-fibered* であるとは $V \cup_K [2-\text{handle}]$ が Seifert fibered manifold になるときをいう。

このように修正することにより, $(2pq \pm 1, 2)$-cable of (p,q)-torus knot 上 $4pq$-surgery (これは toroidal Seifert fibering surgery) も "primitive/Seifert-fibered construction" で説明される。

Remark. Gordon と Luecke は最近 hyperbolic knot の Dehn surgery で $\mathbb{P}^2$ 上 2 本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold が生じる例を発見している。

♡ この例もきっと上の一般化された意味での primitive/Seifert-fibered construction で説明されるに違いない。 ♡

ところで Dean の問題 (2) に対しては, [6] において次のような解答を与えた。

定理 2.1 *A primitive/Seifert-fibered knot K is non-hyperbolic if and only if K is a torus knot or an $(spq \pm 1, s)$-cable of a (p,q)-torus knot. Furthermore, any integral small Seifert fibering surgery on K is realized as a primitive/Seifert-fibered construction.*

K が V に関して *Seifert-fibered* であるということの定義を定義 1' のように変更した際に, それに伴い定理 2.1 はどのように修正されるのだろうか?

定理 2.2 K が V に関して *Seifert-fibered* であるということの定義を $V \cup_K [2-\text{handle}]$ が *Seifert fibered manifold* になるときと修正しても定理 *2.1* はそのまま成り立つ。

証明のアイディア:

Seifert-fibered の定義を一般化したことにより, 例えば $(K;r)$ が S^2 上 4 本以上の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold になる可能性もでてくるが, K はもう一方の側で primitive なので K の tuunel number は 1 となり S^2 上 4 本以上の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold は生じ得ないことがわかる。実際, K の tunnel number が 1 なので $(K;r)$ の Heegaard genus は高々2 である。一方, S^2 上 4 本以上の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold で genus$\leq$ 2 となるのは [2], [8] より exceptional fibers がちょうど 4 本で, それらの indices が $2,2,2,2n+1$ の場合に限ることが知られている。ところが, S^2 上 $2,2,2,2n+1$ という indices の exceptional fibers をもつ Seifert fibered manifold は 1 次元ホモロジー群が巡回群でないので S^3 内の結び目の Dehn surgery では生じない。また, satellite knot 上の Dehn surgery で $\mathbb{P}^2$ 上の Seifert fibered manifold が生じるのは $K = (6p \pm 1, 3)$-cable of $(p, 2)$-torus knot の $18p \pm 2$-surgery と $K = (2pq \pm 1, 2)$-cable of (p, q)-torus knot の $4pq$-surgery に限ることが知られている ([5])。したがって, $(K;r)$ が small Seifert fibered manifold になる場合といくつかの lens spaces の connected sum になる場合に帰着される。これらの場合は [6] ですでに証明されている。

Remark. (1) $K = (6p \pm 1, 3)$-cable of $(p, 2)$-torus knot の $18p \pm 2$-surgery によって prism manifold が生じるが, これは S^2 上 3 本の exceptional fibers を持つ Seifert fibered manifold であり, この surgery はもともとの primitive/Seifert-fibered construction で説明される。

(2) $K = (2pq \pm 1, 2)$-cable of (p, q)-torus knot の $4pq$-surgery は先にみたように, 一般化した primitive/Seifert-fibered construction になっている。

参考文献

[1] J. Berge; Some knots with surgeries yielding lens spaces, (unpublished manuscript).

[2] M. Boileau and H. Zieschang; Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds, Invent. math. **76** (1984), 455–468.

[3] Dean, J.; Hyperbolic knots with small Seifert-fibered Dehn surgeries, Ph.D. thesis, University of Texas at Austin, 1996.

[4] Miyazaki, K. and Motegi, K.; Seifert fibred manifolds and Dehn surgery, Topology **36** (1997), 579–603.

[5] Miyazaki, K. and Motegi, K.; Seifert fibered manifolds and Dehn surgery II, Math. Ann. **311** (1998), 647–664.

[6] 宮崎桂, 茂手木公彦; Primitive/Seifert-fibered knots について, 研究集会「結び目理論」報告集 (1998), 69–76.

[7] 茂手木公彦; Realizing multiplicities of Seifert manifolds by Dehn surgery on hyperbolic knots, 研究集会「結び目の数理」報告集

[8] Morimoto, K.; On minimum genus Heegaard splittings of some orientable closed 3-manifolds, Tokyo J. Math. **12** (1989), 321–355.