

DS-diagram の既約性と C -既約性

河野 正晴

DS-diagram の既約性と C -既約性について議論し, C -既約だが既約でない DS-diagram の例を与える。ただしここでいう既約とは以前「強 C -既約」と呼んでいたものである。

既約, C -既約の定義を少し変更した。この変更は generalized DS-diagram に対してのものであり DS-diagram に対しては変更はない。

1 move など

DS-diagram, generalized DS-diagram, move などの定義は [2], [3], [5], [6] を参考にしてください。

「generalized DS-diagram」は用語として少し長いのでここでは GS-diagram と呼ぶことにする。

多様体は向きづけられているものとし, 特にことわらない限り連結とする。GS-diagram も向きづけられているものとする。GS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ が向きづけられているとは $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $\partial\mathcal{B} = S$ となる何個かの 3-ball からなる集合 \mathcal{B} が定められており, $M(\Sigma)$ の向きを定める様に \mathcal{B} に向きをが決められていることを意味する。

GS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $S - G$ 上の fixed point free involution τ を次で定義する ; p を $S - G$ の任意の点とする。 $f^{-1}(f(p))$ は 2 点からなる集合なので, それを $\{p, p'\}$ とするとき $\tau(p) = p'$ と決める。 τ を **GS-diagram から決まる involution** という。

$f(S)$ の面 X に対し $f^{-1}(X)$ の連結成分の一つを X^+ とするとき, $\tau(X^+) = X^-$ と定義する。

S 上の loop が次を満たすとき, ℓ は general position にあるという。

- (1) ℓ は G と transversal である。
- (2) $\overline{\tau(\ell - G)}$ を $\tau(\ell)$ と書くとき, ℓ と $\tau(\ell)$ は transversal である。

ℓ を S の general position にある loop とする。この様な loop を **bridge** と呼ぶ。 ℓ に関する S -move を $[\ell]$ と表す。 Σ に S -move $[\ell]$ を行って得られる GS-diagram を $\Sigma[\ell]$ と書く。

Σ の面 X^+ が (open) 2-disk と同相なとき円板面という。 Σ の面 X^+ が境界を 2 つ以上持つとき X^+ を非円板面といい、非円板面を持つ GS-diagram を非円板型と呼ぶ。DS-diagram の面はすべて円板面である。

X^+ が Σ の円板面で、 X^+ と X^- が S の別の成分にあるとき、 X^+ に関する G -move を行うことができる。この G -move を $[X^+]$ と表し、 Σ に G -move を行って得られる GS-diagram を $\Sigma[X^+]$ と書く。

Σ の面 X^+ と X^- が $S - \ell$ の別の成分にあるとき X^+ (X^-) は ℓ で分離されるという。

$\Sigma[\ell]$ の円板面 Y^+ が ℓ で分離されているとき $\Sigma[\ell]$ に対し Y^+ で G -move を行うことができる。

この 2 つの move を続けて行う move を SG -move と呼び $[\ell, Y^+]$ と書き、得られる GS-diagram を $\Sigma[\ell, Y^+]$ と書く。一般に $[M_1], \dots, [M_k]$ を S -move または G -move とするとき Σ に $[M_1], \dots, [M_k]$ を順に行って得られる GS-diagram を

$$\Sigma[M_1, \dots, M_k]$$

と書く。

DS-diagram に SG -move を行って得られる GS-diagram は、hoop・非円板面などが発生する可能性があるので DS-diagram とは限らない。

$\Sigma = (S, G, f)$ に対し $p(\Sigma) = \sharp f(V(G))$, $q(\Sigma) = \sharp f(G)$ とおく。ここで $\sharp f(V(G))$ は $f(V(G))$ の個数であり $\sharp f(G)$ は $f(G)$ の成分数である。

Σ の複雑度 $c(\Sigma)$ を $(p(\Sigma), q(\Sigma))$ で定義する。順序は辞書式順序とする。 Σ が DS-diagram のときは常に $q(\Sigma) = 1$ なので $p(\Sigma)$ を複雑度ということもある。多様体 M に対して 2 通りの複雑度を定義することができる。

$$c(M) = \min \{ c(\Sigma) \mid M(\Sigma) \cong M, \Sigma \text{ は GS-diagram} \}$$

$$c_{DS}(M) = \min \{ c(\Sigma) \mid M(\Sigma) \cong M, \Sigma \text{ は DS-diagram} \}$$

定義より $c(M) \leq c_{DS}(M)$ が成立するが、2 つの関係については後で見る。

bridge ℓ に対し

$$c(\ell) = \sharp(G \cap \ell) + \sharp f(\ell \cap \tau(\ell))$$

を ℓ の複雑度と呼ぶ。 $n = \sharp(G \cap \ell)$ とするとき ℓ は n -bridge であるという。 ℓ が n -bridge で $c(\ell) = k$ のとき k -point n -bridge という。 $k \geq n$ である。 $k = n$ のとき、すなわち $\ell \cap \tau(\ell) = \emptyset$ のとき bridge は **proper** であるという。

面 X^+ に対し $V(X^+)$ を X^+ の頂点全体の集合とすると、

$$c(X^+) = \sharp f(V(X^+))$$

を面 X^+ の複雑度という。面 X^+ が n -gon で $c(X^+) = k$ のとき k -point n -gon という。 $k \leq n$ である。 $k = n$ のとき面は **proper** であるという、

SG -move $[\ell, Y^+]$ を行うことで DS -diagram Σ の複雑度は $c(\ell) - c(Y^+)$ だけ変化する。すなわち

$$p(\Sigma[\ell, Y^+]) = p(\Sigma) + c(\ell) - c(Y^+)$$

が成立する。

SG -move で複雑度を下げる変形を C -move と呼ぶ。典型的な C -move として次で定義する 2-move, 3-move がある。

proper な 2-gon が存在するとき (図 1 左), $[\ell, Y^+]$ は C -move である。この move を **2-move** と呼ぶ。 $\Sigma[\ell, Y^+]$ は Σ より頂点数が 2 少なくなり, 2-gon が消滅している。

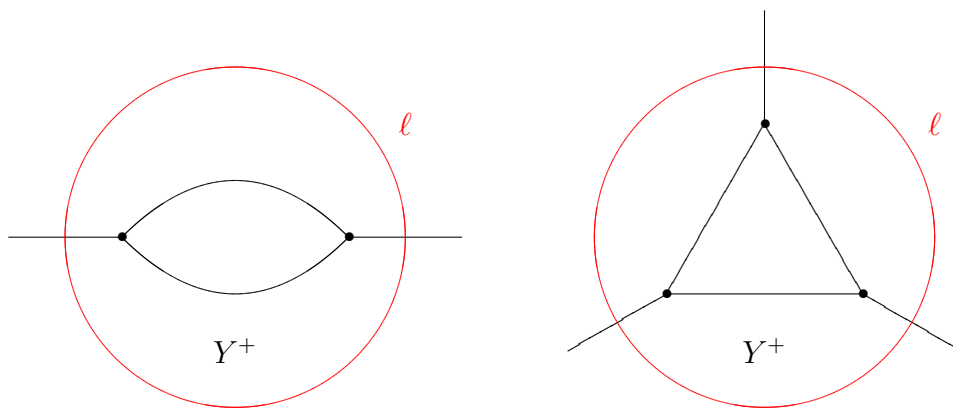


図 1

2つあるどちらの面で G -move を行っても同値な move である。ここで 2つの SG -move $[\ell, Y^+], [\ell', Y'^+]$ が同値とは $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ を意味し, $[\ell, Y^+] \cong [\ell', Y'^+]$ と書く。

すなわち図 1 左のもう一つの面を Y'^+ とするとき

$$\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell, Y'^+]$$

が成立する。

2-move は [9] で山下が Φ^- と名付けた変形である。

proper な 3-gon が存在するとき (図 1 右), $[\ell, Y^+]$ は C -move である。この move を **3-move** と呼ぶ。 $\Sigma[\ell, Y^+]$ は Σ より頂点数が 1 少なくなり, 3-gon が消滅している。3つあるどの面で G -move を行っても 3-move は同値である。

3-move は [9] で山下が Ψ^- と名付けた変形である。山下は piping を基本に考えているので 2-move, 3-move はその逆変形となっている。

SG -move で複雑度を変えない変形を B -move と呼ぶ。逆変形も B -move なので、有限回の B -move によって移りあう GS -diagram を B -同値と呼ぶ。典型的なものとして次の 4-move がある。

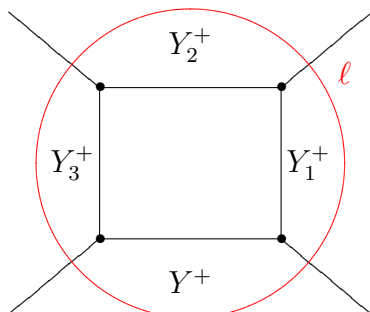


図 2

proper 4-gon が存在するとき (図 2), $[l, Y^+]$ は B -move である。この変形を **4-move** と呼ぶ。 $\Sigma[l, Y^+]$ と Σ は頂点数が同じであり, 4-gon が別の場所に移動している。

$[l, Y^+] \cong [l, Y_2^+]$, $[l, Y_1^+] \cong [l, Y_3^+]$ であるが, $[l, Y^+]$ と $[l, Y_1^+]$ は一般に別の move である。

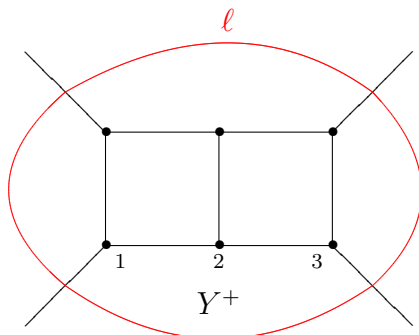


図 3

図 3 の様に 4-gon が 2 つ隣接していてそれらを囲む loop l が proper で頂点のラベル 1, 2, 3 が異なるとき $[l, Y^+]$ は C -move である。この move を 4^2 -move と呼ぶ。 4^3 -move 等も同様に定義できる。

[7] では 1-gon が存在するときに複雑度を下げる変形として H -move を考えた。しかし多様体が S^3 の場合結果が GS -diagram にならないこともあった。そこで前処理と後処理をしてそのようなことを避けたい。

ループ型の退化辺を含む GS -diagram Σ に対し

- (1) loop のまわりで S -move を行い,

- (2) (必要なら) 前処理を行い,
- (3) H -move を行い,
- (4) (可能なら) 後処理を行った

変形を I -move と呼ぶ。GS-diagram に I -move を行った結果は GS-diagram である。 I -move を以下に定義する。

ループ型の辺のラベルを a とするとラベル a 辺のまわりは図 4 の様である。

- (1) 最初にループ型であるラベル a 辺の外側の loop ℓ で S -move を行う。
 ℓ としてもう一つのループ型ラベル a 辺のまわりを選んでもよい。
- (2) ループ型でないラベル a 辺に余接続⁽¹⁾する面の一方を $X(a)^+$ とするとき、 $X(a)^+$ とラベル α_2, α_4 で交わる bridge α で S -move を行う。ただし、 $X(a)^+$ が 1-gon または 2-gon のときはこの操作を行わない。
- (1) で ℓ として図とは異なる loop を選んだときは、 α はラベル b 辺及びラベル c 辺と隣接する辺を横切る loop を選ぶ。
- (3) 面 Y^+ で H -move を行う。 H -move を貼り付ける面 Y^+ を用いて $[Y^+]$ と書く。
- (4) Σ が awabi のときは $\Sigma[\ell, \alpha, Y^+]$ におけるグラフ G が空集合になるので後処理は行わない。それ以外は面 Z^+ ($\Sigma[\ell, \alpha, Y^+]$ では 1-gon になる) で G -move を行う。
 Z^+ でなくラベル c 辺とラベル α_3 辺にかこまれる面で G -move してもよい。
 I -move を行うと GS-diagram の複雑度は下がる。

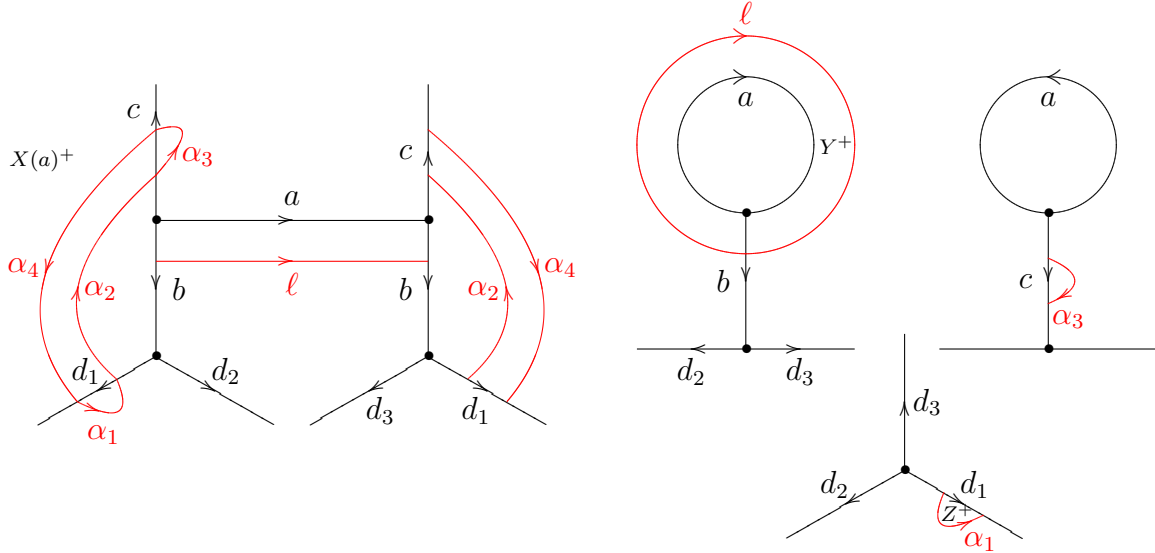


図 4

Σ を非円板型とすると次の性質を満たす loop L が S 上に存在する。

- (1) $L \cap G = \emptyset$ 。

⁽¹⁾ある辺の端点を頂点にもち、その辺に局所的には接続しない面を余接続するという。

(2) L が S で張る 2 つの 2-disk は G と交わる。

(3) $L \cap \tau(L) = \emptyset$ 。

この L に対し \mathcal{B} で proper な 2-disk D, D' で $\partial D = L, \partial D' = \tau(L), D \cap D' = \emptyset$ となるものが存在する。 $U(D) = D \times [-1, 1], U(D') = D' \times [-1, 1]$ を D および D' の正則近傍とする。ただし、同相写像 $h : D \rightarrow D'$ が存在して、任意の $b \in \partial D, t \in [-1, 1]$ に対し $\tau(b, t) = (h(b), t)$ を満たしているとする。このとき $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} - \text{Int}(U(D)) - \text{Int}(U(D'))$ とおき、 $\partial \tilde{\mathcal{B}} = \tilde{S}$ 上の involution $\tilde{\tau}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(a) &= \tau(a) & (a \in S - (\partial D \times [-1, 1] \cup \partial D' \times [-1, 1])) \\ \tilde{\tau}(a, \pm 1) &= (h(a), \pm 1) & (a \in D \times \{-1, 1\}) \end{aligned}$$

とし、 $\tilde{\tau}$ で決まる GS-diagram を $\tilde{\Sigma} = (\tilde{S}, G, \tilde{f})$ とし、 Σ から L による **separation** で得られる GS-diagram と呼ぶ。これを [4] では *GS-cancel* と呼んでいた。involution によって GS-diagram が定まることは次の命題 1 を参照のこと。 $\tilde{\Sigma}$ は G -move 可能である。

separation で得られる $\tilde{\Sigma}$ に対し $M(\tilde{\Sigma})$ は連結とは限らない。 $M(\tilde{\Sigma})$ が連結のときは $M(\Sigma) \cong M(\tilde{\Sigma}) \# S^2 \times S^1$ であり、 $M(\tilde{\Sigma})$ が非連結のときは、連結成分を M_1, M_2 とすると $M(\Sigma) \cong M_1 \# M_2$ である。

命題 1 $\Sigma = (S, G, f)$ を GS-diagram とする。 τ を GS-diagram から決まる fixed point free involution とする。

U を S の点 p の十分小さい近傍とする。「十分小さい」とは $f|_U$ が同相写像であることを意味する。点列 $\{p_n\}$ は $U - G$ の一つの連結成分に入っているとする。以下点列はすべてこの条件を満たすとする。このとき次が成立する。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ が収束するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n)$ は収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n)$ となる。
- (2) $\{p_n\}$ と $\{p'_n\}$ は $U - G$ の同じ成分に入っているとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p'_n)$$

が成立する。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = p'$ が成立するとき $p \sim_0 p'$ と定義し、 \sim_0 が生成する同値関係を \sim とする。 $p \in E(G)$ に対し $\{p' \mid p' \sim p\}$ の個数は 3 個である。

逆に S 上の 3-regular graph G に対し filed point free involution $\tau : S - G \rightarrow S - G$ が存在して、(1)–(3) を満たすとする。

S の関係 \sim_0 を

$$p \sim_0 p' \iff \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = p'$$

で定義し、 \sim_0 が生成する同値関係を \sim とする。 $f : S \rightarrow S / \sim$ とすると (S, G, f) は GS-diagram である。

証明 $\Sigma = (S, G, f)$ が GS-diagram であるとは S の 3-regular graph G に対し次が成立することであった。

- (1) $f : (S, G) \rightarrow (f(S), f(G))$ は 局所同相写像である。
- (2) $S - G$ の点 p に対し $\sharp f^{-1} \circ f(p) = 2$ が成立する。
- (3) $G - V(G)$ の点 p に対し $\sharp f^{-1} \circ f(p) = 3$ が成立する。
- (4) $V(G)$ の点 p に対し $\sharp f^{-1} \circ f(p) = 4$ が成立する。

τ を GS-diagram Σ から決まる involution とする。 $p \in S$ に対し $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ とする。 $\{p_n\}$ の各点は p の十分小さい近傍 U に含まれるとする。 $f^{-1}(f(U))$ の成分で $\tau(p_n)$ を含むものを U' とし、 $p' = f_{|U'}^{-1}(f(p))$ とする。 p' の十分小さい近傍 V をとる。 必要なら U を取り直して $U' \subset V$ としておく。 $f_{|U} : U \rightarrow f(U)$ は同相写像なので $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = f(p)$ が成立する。 $f_{|V}$ も同相写像なので $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{|V}^{-1}(f(p_n)) = f_{|V}^{-1}(p)$ が成立する。 $f_{|V}^{-1}(f(p_n)) = \tau(p_n)$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = p'$ となる。 $p \in S - G$ のとき $p = p'$ なら involution τ が fixed point free に矛盾。 $p \in G$ ときは f は 局所同相写像なので $p \neq p'$ である。

$\{p_n\}$ と $\{p'_n\}$ が $U - G$ の同じ成分に入っていて $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n$ となっているとする。 前と同じように $\{p_n\}$ に対して V をとると $\tau(p'_n) \in V$ となっている。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p'_n)$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{|V}^{-1}(f(p_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{|V}^{-1}(f(p'_n))$ が成立する。 これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p'_n)$ が成立する。

$\{p' \mid p' \sim p\} = \{p' \mid f(p') = f(p)\}$ なので個数は 3 である。

次に逆を証明する。

最初に次を示す。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ とする。 $\{q_n\}$ は $U - G$ の $\{p_n\}$ が属している成分とは別の成分に入っていて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$ が成立しているとする。 このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(q_n)$ である。

$p \in E(G)$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(q_n)$ となる場合 $\{p' \mid p' \sim p\}$ の個数は 2 であり矛盾。

$p \in V(G)$ のとき p の近くの $E(G)$ の点 q で次を満たすものが存在する ; q に収束する点 $\{p'_n\}, \{q'_n\}$ で $\{p'_n\}$ は $U - G$ の $\{p_n\}$ が含まれる成分に、 $\{q'_n\}$ は $U - G$ の $\{q_n\}$ が含まれる成分に含まれる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(q_n)$ が成立するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(q'_n)$ が成立するので矛盾。 よって (4) は成立する。

$\{p' \mid p' \sim p\} = \{p' \mid f(p') = f(p)\}$ となっている。 $p \in S - G$ のとき

$$p \sim_0 p' \iff p' = \tau(p)$$

なので $\{p' \mid p' \sim p\}$ の個数は 2 個である。 p の近傍 U で $U \cap \tau(U) = \emptyset$ となるものが存在するので $f_{|U}$ は同相写像である。

$p \in S - G$ のとき (4) より p の近傍 U で $U \cap \tau(U - G) = \emptyset$ となるものが存在するので $f|_U$ は同相写像である。個数の条件は (3) である。

$p \in V(G)$ のとき p の近傍 U で $U - G$ が 3 個の成分を持つものをとる。それぞれの成分の中に p に収束する点列

$$\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\}$$

をとる。

$$p_1 = p, p_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(p_n), p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(q_n), p_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(r_n)$$

とおくと (1) および (4) より $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$) である。 $p_i \sim p$ であるがこれ以外に $q \sim p$ となる点があれば q の近くの $E(G)$ の点 q' で $\{q'' \mid q'' \sim q'\}$ の個数が 4 以上になり矛盾。よってこの場合 $\{p' \mid p' \sim p\}$ の個数は 4 である。

p の近傍 U で $U \cap \tau(U - G) = \emptyset$ となる U をとれば $f|_U$ は同相写像である。■

GS-diagram に対し C -move, I -move, G -move, separation のいずれも不可能なとき, C -既約と呼び, そうでないとき C -可約という。 B -同値な GS-diagram がすべて C -既約な GS-diagram を既約と呼び, そうでないとき可約という。

C -既約の定義を少し変更した (separation を加えた) ため

$$\text{複雑度最小} \implies \text{既約}$$

は成立しない。ここでいう「複雑度最小」は GS-diagram としての最小である。

$\Sigma(0, 1)$ は複雑度最小であるが C -既約ではない。ただし $\Sigma(p, q)$ は lens space の横山の標準形 ([10], [11]) およびその GS-diagram への拡張 ([5]) とする。

しかし制限をつけると成立する。

命題 2 $M(\Sigma)$ が多様体として既約のとき

$$\text{複雑度最小} \implies \text{既約}$$

が成立する。

証明のために次の補題を証明する。

補題 3 複雑度最小の GS-diagram Σ が $M(\Sigma) \not\cong S^3, P^3, L(3, 1)$ で $M(\Sigma)$ が多様体として既約のとき, Σ は DS-diagram である。

証明 GS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ は複雑度最小であるとする。 Σ が次を満たすとき DS-diagram である。

- (1) $G \neq \emptyset$ 。
- (2) 球面数は 1 である, ただし球面数とは S の成分数のことである。
- (3) 非円板面を持たない,

(4) hoop を持たない。

$G = \emptyset$ のとき $\Sigma = \Sigma(1, 0)$ または $\Sigma(2, 1)$ である。 $M(\Sigma(1, 0)) \cong S^3$, $M(\Sigma(2, 1)) \cong P^3$ なのでこの場合はない。

$G \neq \emptyset$ かつ球面数が 2 以上なら C -move, I -move または G -move が可能なので、球面数は 1 である。

非円板面をもつならば separation 可能である。 Σ に separation を行って $\tilde{\Sigma}$ が得られたとする。 $M(\tilde{\Sigma})$ が連結なら $M(\Sigma) \cong M(\tilde{\Sigma}) \# S^2 \times S^1$ となるがこれは矛盾。

$M(\tilde{\Sigma})$ が非連結なら $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ となり $M(\Sigma) \cong M(\Sigma_1) \# M(\Sigma_2)$ となるが、 $M(\Sigma)$ は既約なので $M(\Sigma_1)$ または $M(\Sigma_2)$ は S^3 である。 $M(\Sigma_2) \cong S^3$ とすると $M(\Sigma_1) \cong M(\Sigma)$ で $c(\Sigma_1) < c(\Sigma)$ となり矛盾。

非円板面を持たず hoop を持つとき $\Sigma = \Sigma(3, 1)$ となる。この場合もないので Σ は DS-diagram である。 ■

命題 2 を証明する。 Σ は複雑度最小なので C -既約が示されれば既約も示される。

$M(\Sigma) = S^3$ のとき $\Sigma = \Sigma(1, 0)$ なので C -既約である。 $M(\Sigma) = P^3$ のとき $\Sigma = \Sigma(2, 1)$ なので C -既約である。 $M(\Sigma) = L(3, 1)$ のとき $\Sigma = \Sigma(3, 1)$ なので C -既約である。

それ以外のときは補題 3 より Σ は DS-diagram である。separation は不可能なので C -既約でなければ C -move 等が可能になり、最小性に矛盾する。 ■

多様体が既約のとき次が成立する。

$$\begin{aligned} c(S^3) &= (0, 0) < (1, 1) = c_{DS}(S^3) \\ c(P^3) &= (0, 0) < (2, 1) = c_{DS}(P^3) \\ c(L(3, 1)) &= (0, 1) < (2, 1) = c_{DS}(L(3, 1)) \\ c(M) &= c_{DS}(M) \quad (\text{上以外}) \end{aligned}$$

$M(\Sigma)$ の既約性をはずすと等号の成立する例は知られていない。しかし等号不成立の例は沢山知られている。

GS-diagram Σ_1, Σ_2 に対して $c(\Sigma) = (p(\Sigma_1) + p(\Sigma_2), q(\Sigma_1) + q(\Sigma_2) + 1)$ かつ $M(\Sigma) \cong M(\Sigma_1) \# M(\Sigma_2)$ となる GS-diagram を次の様に構成できる。

Σ_1 の一つの面の中に面の中で 2-disk を張る loop ℓ_1 をとり、2-disk を X_1^+ とする。 Σ_2 の一つの面の中に面の中で 2-disk を張る loop ℓ_2 をとり、2-disk を X_2^+ とする。 X_2^+ に対応する $\Sigma_2[\ell_2]$ の面を $X_2'^+$ とする。

同相写像 $g : X_1^+ \rightarrow X_2'^+$ を一つ固定する。 Σ_1 の involution を τ_1 , $\Sigma_2[\ell_2]$ の involution を τ_2 とするとき、 g と $\tau_2 \circ g \circ \tau_1$ で X_1^+ と $X_2'^+$, X_1^- と $X_2'^-$ を貼り合わせて Σ_1 と $\Sigma_2[\ell_2]$ からできる GS-diagram を Σ とする。この操作は separation の逆操作になっている。

$M = L(4, 1) \# L(4, 1)$ に対し上の議論を適用する。

$$c(L(4, 1)) = c_{DS}(L(4, 1)) = (1, 1)$$

より $c(M) \leq (2, 3)$ である。 M は [1] の 6 頂点以下の DS-diagram のリストにはないので $p_{DS}(M) > 6$ である。 よって

$$c(M) < c_{DS}(M)$$

である。

ここでは $M(\Sigma)$ は非連結も許すものとする。 すなわち Σ を GS-diagram とし、 $M(\Sigma) = M_1 \cup \dots \cup M_n$ (M_i は連結) となっているとする。 このとき、 $N(\Sigma) = M_1 \# \dots \# M_n$ と定義する。

DS-diagram Σ が与えられたとき、 Σ に可能な限り C -move 等を行って得られる C -既約な GS-diagram を $\tilde{\Sigma}$ とするとある非負整数 k が存在して $N(\Sigma) \cong N(\tilde{\Sigma}) \# k(S^2 \times S^1)$ となる。

$M(\Sigma)$ が多様体として既約のとき、 $N(\Sigma) \cong N(\tilde{\Sigma})$ となる。 $M(\tilde{\Sigma})$ が connected でないときも、 1 つの成分以外は S^3 なので C -既約な GS-diagram Σ' が存在して $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ となる。

$c_N(M) = \min \{ c(\Sigma) \mid N(\Sigma) \cong M, \Sigma \text{ は GS-diagram} \}$ と定義すると

$$c_N(M) \leq c(M) \leq c_{DS}(M)$$

が成立する。 M が既約のときは

$$c_N(M) = c(M)$$

が成立する。 既約でない多様体も扱うときは $c_N(M)$ の方が良いのかもしれない。

2 いくつかの補題

ここでは既約性と C -既約性を議論するため必要な補題を証明する。

bridge l と G との図 5 左の様な intersection を **edge connection** と呼ぶ。 図 5 右の様な intersection を **corner connection** と呼ぶ。



図 5

補題 4 GS-diagram Σ は自己隣接面を持たないとする。bridge ℓ が corner connection または edge connection を持っており, ℓ を isotopy で変形して corner connection または edge connection を消した bridge を ℓ' とする。

$[\ell, Y^+]$ が C -move のとき $\Sigma[\ell']$ の面 Y'^+ が存在して $[\ell', Y'^+]$ も C -move である。

$[\ell, Y^+]$ が B -move のときは Y'^+ が存在して $[\ell', Y'^+]$ は B -move または C -move になる。

$[\ell, Y^+]$ が B -move で C -move が存在しないときは $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ となるよう Y'^+ を選べる。

証明 Σ の bridge ℓ は乗っている球面を 2 つの 2-disk に分けるが, それらの一方が Σ のどの面も含まないとき ℓ は **zero** であるという。zero bridge が 3-bridge 以下のとき **trivial** であるという。

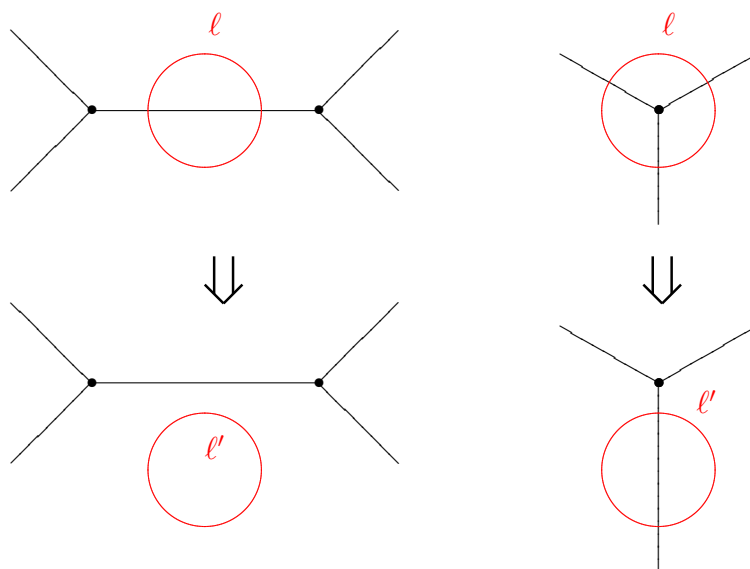


図 6

bridge ℓ が trivial な場合図 6 の様に ℓ' も trivial であり, ともに B -move で

$$\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$$

となっている。以下 bridge ℓ は trivial でないとする。

最初に ℓ が edge connection を持つときを考える。edge connection のまわりの面 X_i^+ ($i = 1, \dots, 5$) を図 7 の様に決める。図 7 のラベル a 辺を $a^{(1)}$ と名付ける。

$\tau(\ell) \cap X_i^+ = \emptyset$ のときは $Y_i^+ = X_i^+$ とおく。 $\tau(\ell) \cap X_i^+ \neq \emptyset$ のときは $\tau(\ell)$ で分割された X_i^+ の $a^{(1)}$ 辺に接続する成分を Y_i^+ とする。

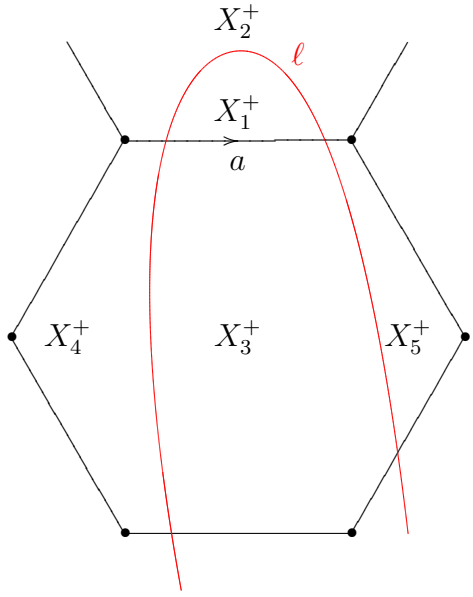


图 7

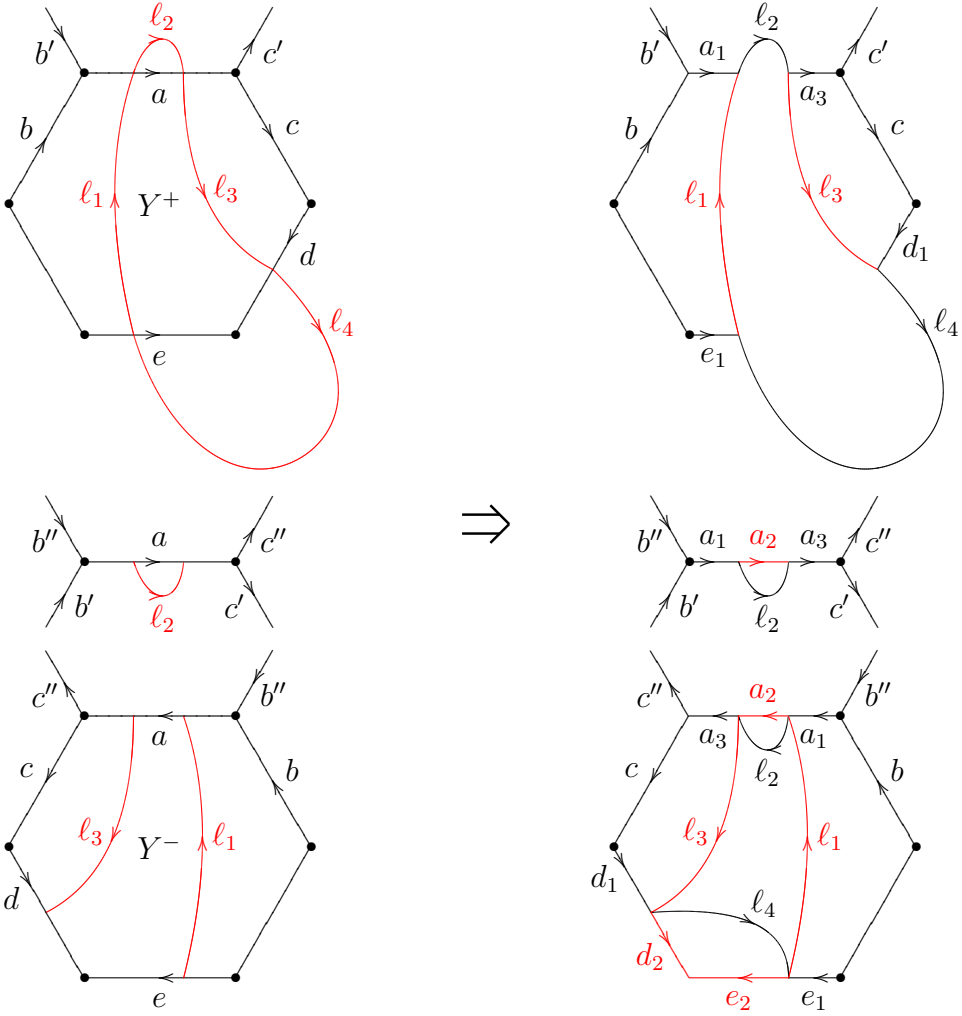


图 8

$Y^+ \neq Y_i^+$ のとき $Y'^+ = Y^+$ とおくと $c(\ell) > c(\ell')$ より $[\ell', Y'^+]$ は C -move であり, この場合補題は成立する。よって $Y^+ = Y_i^+$ とする。 Y_i^+ に対応する $\Sigma[\ell']$ の面を Y'^+ とすると Y'^+ は ℓ' で分離されている。

$Y^+ = Y_1^+$ のときを考える。 $\tau(\ell) \cap X_1^+ = \emptyset$ のとき $Y_1^+ = X_1^+$ であり, $c(\ell) \leq c(Y^+) = 2$ より ℓ が trivial になる。

$\tau(\ell) \cap X_1^+ \neq \emptyset$ のとき $c(Y_1^+)$ は 3 または 4 である。このとき ℓ と $\tau(\ell)$ は交わる。 $c(Y_1^+) = 3$ のときは $\#f(\ell \cap \tau(\ell)) \geq 1$, $c(Y_1^+) = 4$ のときは $\#f(\ell \cap \tau(\ell)) \geq 2$ よりこの場合は不可能である。

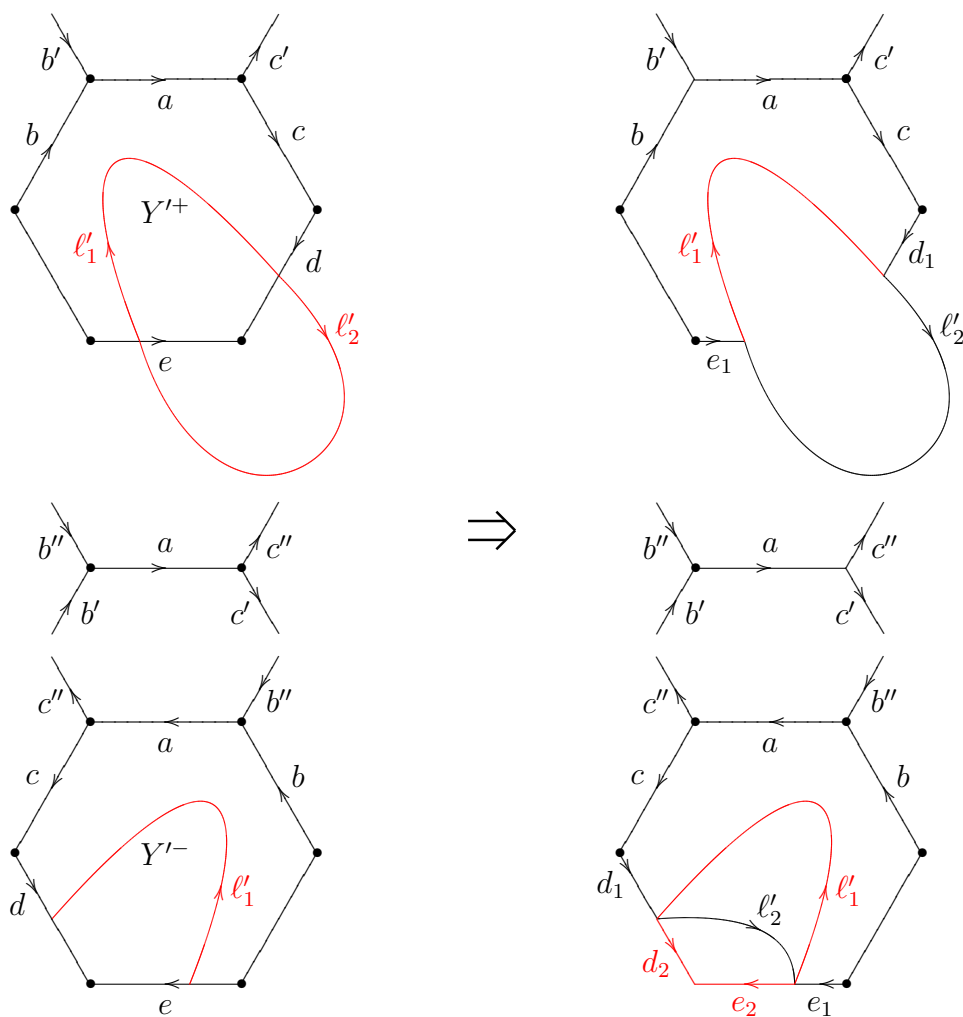


図 9

Y_i^+ が $a^{(1)}$ 辺以外のラベル a 辺に接続する場合としない場合に分ける。最初はしない場合を考える。

$Y^+ = Y_4^+$ と $Y^+ = Y_5^+$ は対称なので Y_4^+ のみ考える。 $Y^+ = Y_4^+$ のとき、 $c(Y_4^+) \leq c(Y'^+)$ かつ $c(\ell') = c(\ell) - 2$ なので $[\ell', Y'^+]$ は C -move である。

$Y^+ = Y_3^+$ のときを考える。 Σ の ℓ とラベル a 辺と Y^\pm 面のまわりは図 8 左の様になっている。ただし bridge ℓ のラベルを l_1, l_2, l_3, l_4 とした。ラベル l_4 辺は G によってさらに分割されているかもしれない。 Σ に対し $[\ell, Y^+]$ を行って得られる $\Sigma[\ell, Y^+]$ が図 8 右である。ただし赤線は貼り合わせにより $\Sigma[\ell, Y^+]$ の辺ではなくなっていることを表す。以下変形後の赤線はそれを表すものとする。

Σ の ℓ' とラベル a 辺と Y^\pm 面のまわり図 9 左の様になっている。 Σ に対し $[\ell', Y'^+]$ を行って得られる $\Sigma[\ell', Y'^+]$ が図 9 右である。図 8 右のラベル $a_1 l_2 a_3$ 辺と図 9 右のラベル a 辺とを対応させることにより $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ が成立する。

$Y^+ = Y_2^+$ のときは Y_3^+ のときと同様にラベル $l_1 a_2 l_3$ 辺と ℓ'_1 辺とを対応させることにより $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ が成立することが分る。

次に Y_i^+ が $a^{(1)}$ 辺以外のラベル a 辺に接続する場合を考える。 $Y^+ = Y_2^+, Y_4^+$ のときは ℓ により分離されないので $Y^+ = Y_3^+$ のときを考える。このとき $\Sigma[\ell, Y^+]$ は図 10 の様である。 $\Sigma[\ell', Y'^+]$ は図 9 で $e^{-1} = a$ で X^+ が対隣接しているものである。このとき $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ が成立している。

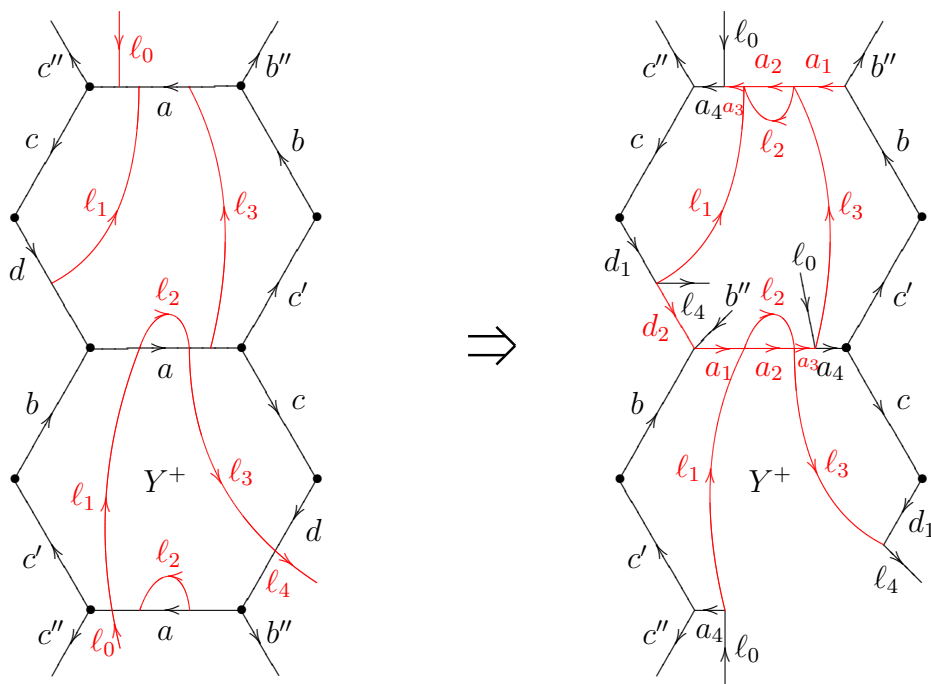


図 10

次に ℓ が corner connection を持つ場合を考える。

ℓ が 2-bridge の場合 Σ は自己隣接するので 3-bridge 以上である。 ℓ が 3-bridge のとき ℓ' は 2-bridge である。 Σ が横山の標準形 $\Sigma(p, 1)$ 以外のとき面 Y' が存在して

$[\ell', Y'^+]$ は C -move である ([8] 補題 1.2)。 Σ が $\Sigma(p, 1)$ のときは面 Y'^+ が存在して $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ であることが分る。よって ℓ は 4-bridge 以上とする。

ℓ によって分割される面を図 11 左の X_1^+, \dots, X_6^+ とする。図のラベル a 辺を $a^{(1)}$, ラベル b 辺を $b^{(1)}$ と名付ける。 $a^{(1)}$ 辺または $b^{(1)}$ 辺に接続し, X_i^+ に含まれる面を Y_i^+ とする。図の ℓ のラベル l_4 部分は G によりいくつか分割されている可能性がある。

$\Sigma[\ell]$ の面 Y^+ に対応する $\Sigma[\ell']$ の面を Y'^+ とする。

$Y'^+ \neq Y_i^+$ のとき $Y'^+ = Y^+$ より $[\ell', Y'^+]$ は C -move である。

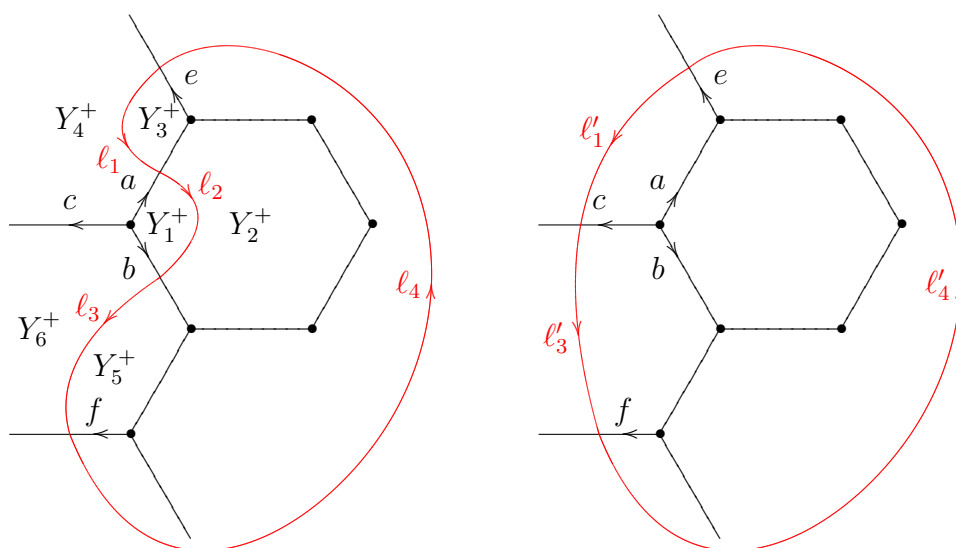


図 11

$Y^+ = Y_1^+$ のとき $c(Y^+) = 3$ より ℓ は 3-bridge 以下になり矛盾。

Y_3^+ と Y_5^+ および Y_4^+ と Y_6^+ の対称性により Y_3^+, Y_4^+ の場合のみ考える。

$Y^+ = Y_3^+$ のとき $c(Y'^+) \geq c(Y^+)$ より $[\ell', Y'^+]$ は C -move である。

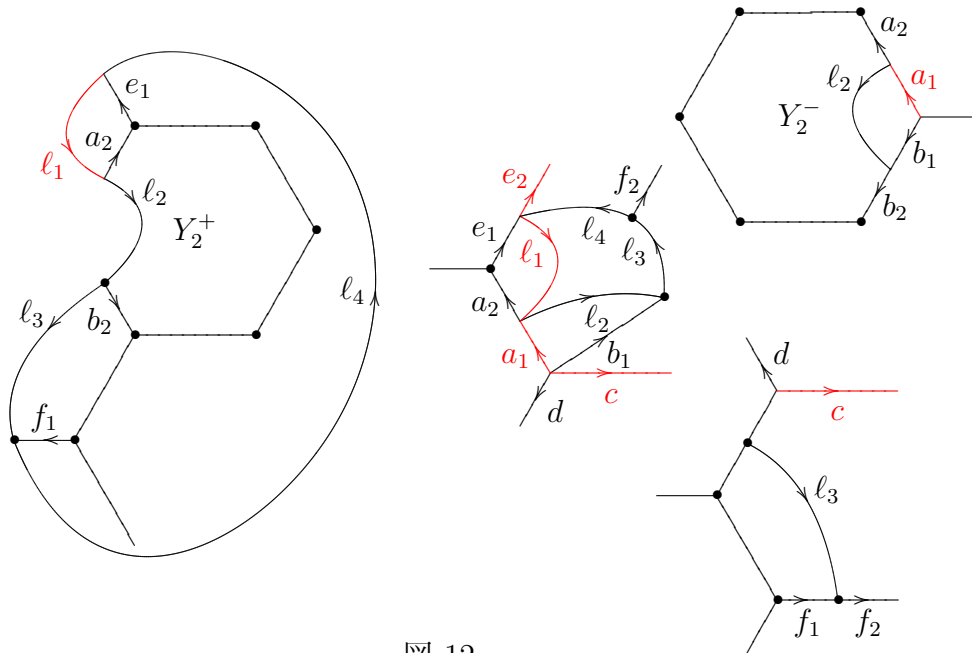


図 12

$a^{(1)}$ 辺と $b^{(1)}$ 辺の共通頂点を x とし, x のラベルを 1 とする。最初に Y_i^+ に x 以外のラベル 1 頂点がない場合を考える。

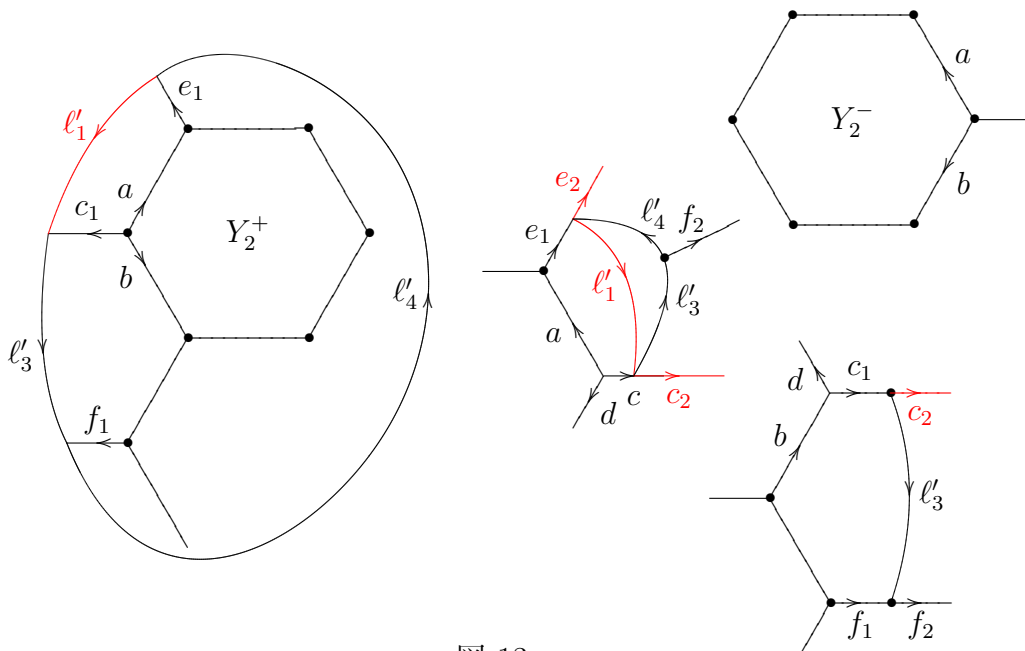


図 13

$Y^+ = Y_4^+$ のとき $\Sigma[\ell', Y'^+]$ は図 13 の様になっている。 $c(\ell') = c(\ell) - 1$ であり $c(Y'^+) = c(Y^+) - 1$ なので $p([\ell', Y'^+]) = p([\ell, Y^+])$ が成立している。よって $[\ell, Y^+]$

が C -move のときは $[\ell', Y^{'+}]$ も C -move, $[\ell, Y^+]$ が B -move のときは $[\ell', Y^{'+}]$ も B -move である。このとき図 12 と図 13 とを比較することにより $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y^{'+}]$ が成立していることが分る。

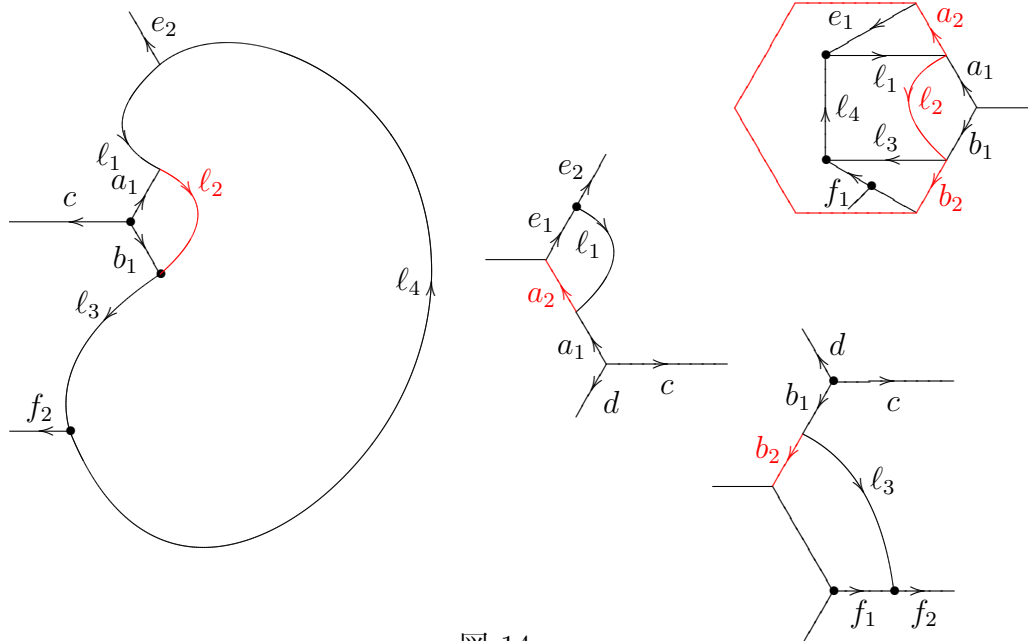


図 14

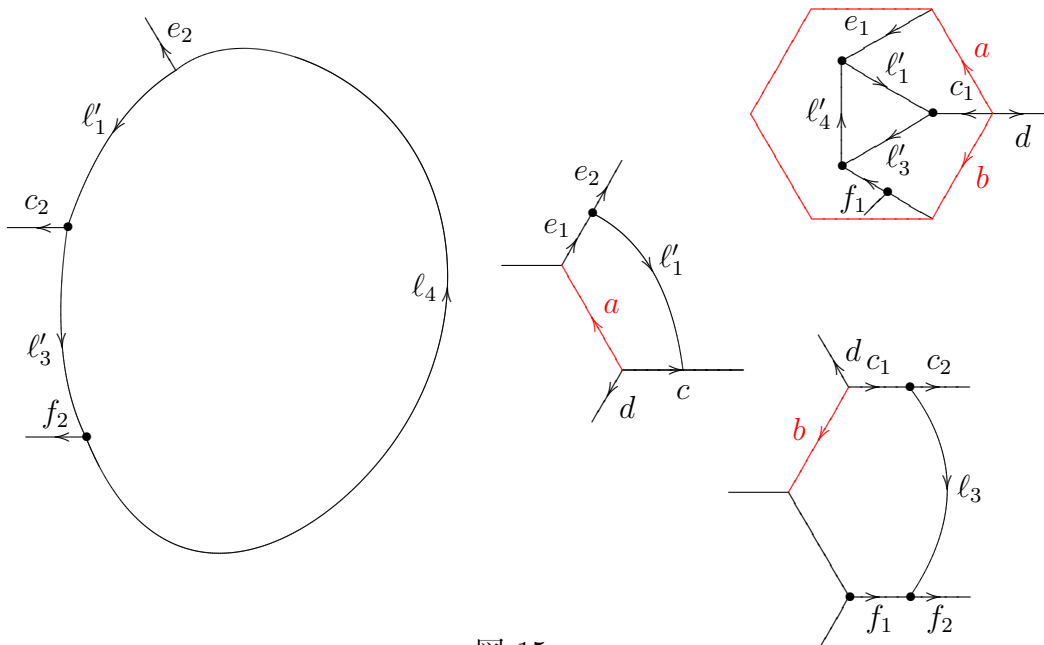


図 15

$Y^+ = Y_2^+$ のとき $\Sigma[\ell', Y'^+]$ は図 14 の様になっている。 $c(\ell') = c(\ell) - 1$ であり $c(Y'^+) = c(Y^+) - 1$ なので $p([\ell', Y'^+]) = p([\ell, Y^+])$ が成立している。よって $[\ell, Y^+]$ が C -move のときは $[\ell', Y'^+]$ も C -move, $[\ell, Y^+]$ が B -move のときは $[\ell', Y'^+]$ も B -move である。このとき図 14 と図 15 とを比較することにより $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ が成立していることが分る。

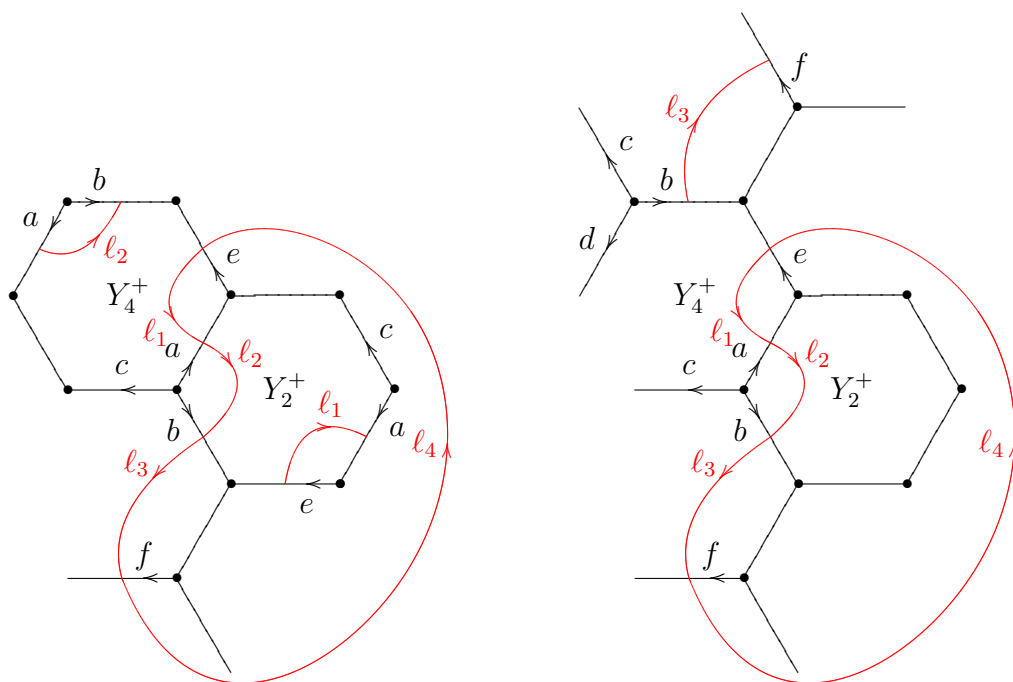


図 16

次に Y^+ が x 以外のラベル 1 頂点を持つときを考える。 $Y^+ = Y_2^+$ に x 以外のラベル 1 頂点がない場合 Y_2^+ はラベル 1 頂点を持つのでここで頂点が 1 つ増える。しかしラベル 1 頂点を他に持つ場合頂点が増えない可能性がある。

$Y^+ = Y_2^+$ のとき, 例えば図 16 左のとき, Y_2^+ にはラベル c 辺が存在する。 Y_2^+ ではここに ℓ' との共通部分になる頂点が発生する。

ほかにもいくつかの場合があるが対隣接して ℓ によって分離されないかラベル c 辺を持ち $c(Y'^+) = c(Y^+) - 1$, $p([\ell, Y^+]) = p([\ell', Y'^+])$ が成立する。また $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ も同様に成立する。

$Y^+ = Y_4^+$ のとき, 例えば図 16 右のとき, Y^+ にもラベル 1 頂点が存在するがラベル b 辺上にある ℓ との共通部分が Y^+ では消える。

対隣接して ℓ によって分離されないかラベル b 辺を持ち $c(Y'^+) = c(Y^+) - 1$, $p([\ell, Y^+]) = p([\ell', Y'^+])$ が成立する。また $\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell', Y'^+]$ も同様に成立する。

■

補題 5 GS-diagram Σ は自己隣接面を持たないとする。

$[l, Y^+]$ が $\sum_{\#(l \cap \partial X^+) > 2} \#(l \cap \partial X^+) > 2$ を満たす C -move のとき, C -move $[l', Y'^+]$

で

$$\sum_{\#(l \cap \partial X^+) > 2} \#(l \cap \partial X^+) > \sum_{\#(l' \cap \partial X^+) > 2} \#(l' \cap \partial X^+) \quad (*)$$

を満たすものが存在する。

$[l, Y^+]$ が B -move のときは C -move $[l', Y'^+]$ で条件 (*) を満たすものが存在するか, 条件 (*) を満たす B -move $[l', Y'^+]$ および $[l'', Y''^+]$ で

$$\Sigma[l, Y^+] \cong \Sigma[l', Y'^+, l'', Y''^+]$$

となるものが存在する。

証明 補題 4 より l は edge connection および corner connection を持たないとしてよい。

$\#(l \cap \partial X^+) > 2$ となる面 X^+ を一つ固定して考える。

$X^+ - l$ の成分 A に対し $\partial \bar{A} \cap l = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_k$ (β_i は arc) とおく。 $k = 1$ のとき **outermost** という。 outermost でない A が存在するのでそれをひとつ固定する。

X^+ 内の $\tau(l)$ の成分 γ を A との関係で次の様にタイプ分けする。

- (0) $A \cap \gamma = \emptyset$,
- (1) $\exists \beta_1, \beta_2 ; \gamma \cap \beta_1 \neq \emptyset, \gamma \cap \beta_2 \neq \emptyset$
- (2) $\exists \beta_1 ; \gamma \cap \beta_1 \neq \emptyset \forall \beta_i (i \neq 1) ; \gamma \cap \beta_i = \emptyset$
- (3) $\gamma \subset A \forall i ; \gamma \cap \beta_i = \emptyset$

X^+ と Y^+ の関係で場合分けをする。

- [1] $Y^+ \cap X^+ = \emptyset$ かつ $Y^- \cap X^+ = \emptyset$,
- [2] $Y^+ \subset X^+$ または $Y^- \subset X^+$,

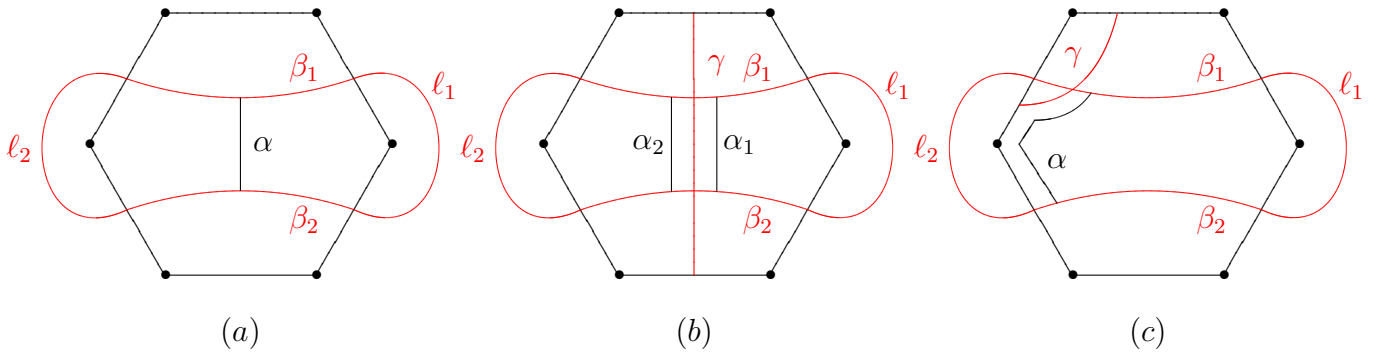


図 17

最初に [1] のときを考える。

(a) $A \cap \tau(\ell) = \emptyset$ のとき [図 17 (a)] :

∂A の β_1 と β_2 を結ぶ A 内の arc を α とする。 α は ℓ を 2 つの成分 l_1, l_2 に分ける。 $l_1 \cup \alpha$ または $l_2 \cup \alpha$ は Y^+ を分離する。 分離する方を ℓ' とする。 このとき $c(\ell') \leq c(\ell) - 3$ が成立する。

(b) type (1) の γ が存在するとき [図 17 (b)] :

$\gamma \cap A = \alpha$ とおく。 α の A における正則近傍を $U = U(\alpha; A)$ とするとき、 $\ell - U$ は 2 つの成分からなるので、 それを l_1, l_2 とする。 また $\partial U - \ell$ の成分を α_1, α_2 とする。

$l_1 \cup \alpha_1$ または $l_2 \cup \alpha_2$ は Y^+ を分離する。 分離する方を ℓ' とおく。 このとき $c(\ell') \leq c(\ell) - 3$ が成立している。

(c) type (1), (3) が存在しないとき [図 17 (c)] :

このとき β_1 と β_2 を結ぶ arc で $\tau(\ell)$ と交わらない arc が存在する。 すなわち type (2) の arc は無視でき、 (a) と同様に ℓ' を決めることができる。

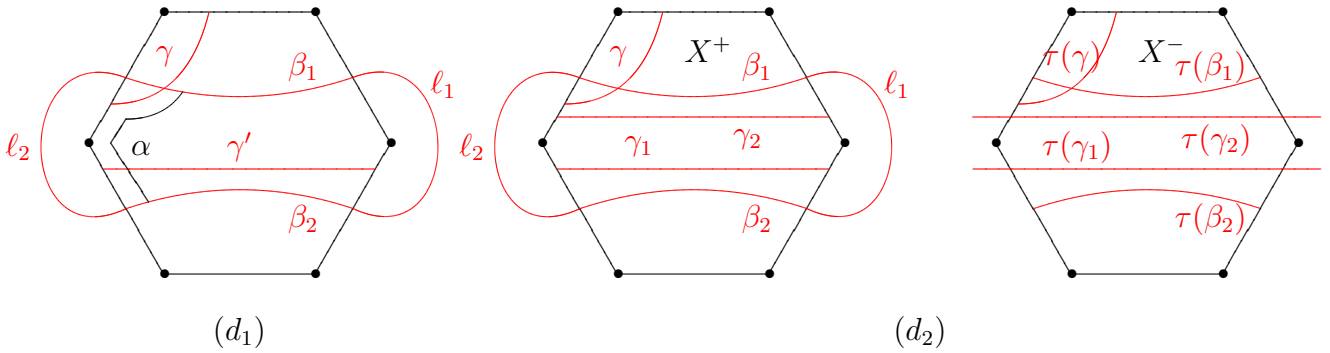


図 18

(d) type (3) が存在するとき [図 17 (d1), (d2)] :

(d1) type (3) が 1 個のときはこのとき β_1 と β_2 を結ぶ arc で $\tau(\ell)$ と 1 点で交じわる arc α が存在する。

(a) と同様に ℓ' を決める。 このとき $c(\ell') \leq c(\ell) - 2$ が成立する。

(d2) type (3) が 2 個以上のときは X^+ と X^- のラベルを入れ替えると (a) に帰着できる。

(a)(b)(c)(d) いずれの場合も Y^+ を含む $\Sigma[\ell']$ の面を Y'^+ とする。 $Y'^+ = Y^+$ のとき $[\ell', Y'^+]$ は C -move である。 $Y^+ \subsetneq Y'^+$ となるのは $\gamma \subset \tau(\ell)$ かつ $\gamma \subsetneq \tau(\ell')$ となる arc γ を $\partial Y'^+$ が含むときである。 このとき $c(Y'^+) \leq c(Y^+)$ となる可能性はあるが、 その分は $\tau(\ell) \cap \ell$ から $\tau(\ell') \cap \ell'$ への減少分で補填されるのでこのときも $[\ell', Y'^+]$ は C -move である。

次に [2] の場合を考える。 $A \cap Y^+ = \emptyset$ となる outermost でない A が存在する場合は [1] と同様にできる。 よって $Y^+ \subset A$ を仮定する。

(a) $A \cap \tau(\ell) = \emptyset$ のとき [1]-(a) の $l_1 \cup \alpha$ を L_1 , $l_2 \cup \alpha$ を L_2 とおく。 Y^+ は α により 2 つに分けられる。 これを Y_1^+, Y_2^+ とする。 ただし $l_i \cap \bar{Y}_i^+ \neq \emptyset$ となる様を選ぶ。

$$\begin{aligned} c(Y_1^+) + c(Y_2^+) &\geq c(Y^+) \\ c(L_1) + c(L_2) &\leq c(\ell) \end{aligned}$$

が成立している。

$[\ell, Y^+]$ が C -move のとき $[L_1, Y_1^+]$ または $[L_2, Y_2^+]$ は C -move である。 C -move になる方を $[\ell', Y'^+]$ とする。

$[\ell, Y^+]$ が B -move のとき $[L_1, Y_1^+]$ または $[L_2, Y_2^+]$ は C -move であるかともに B -move である。 C -move が存在するときは C -move になる方を $[\ell', Y'^+]$ とする。

ともに B -move になるときは

$$\begin{aligned} c(Y_1^+) + c(Y_2^+) &= c(Y^+) \\ c(L_1) + c(L_2) &= c(\ell) \end{aligned}$$

が成立している。 このとき Y_1^+ の頂点のラベルと Y_2 の頂点のラベルで同じものはなく、

$$\tau(L_1) \cap L_2 = \emptyset, \quad \tau(L_2) \cap L_1 = \emptyset$$

が成立している。 よってこのとき

$$\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[L_1, Y_1^+, L_2, Y_2^+]$$

が成立する。

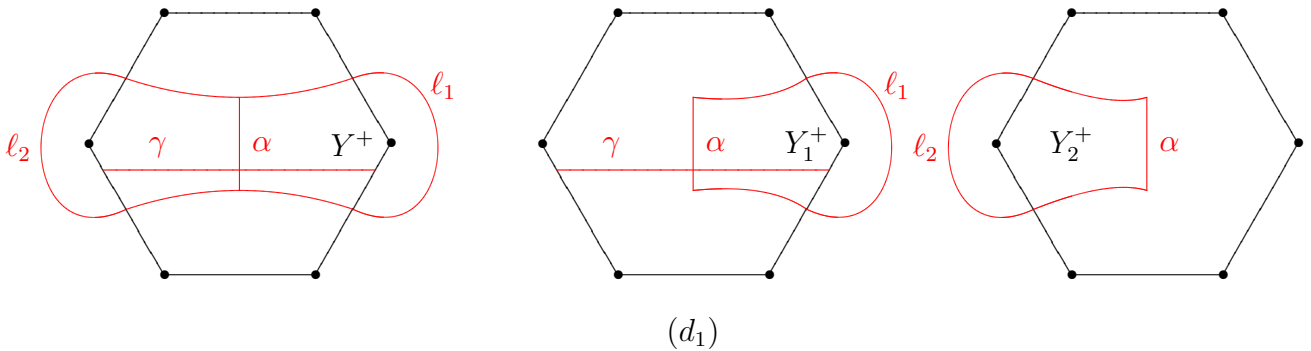


図 19

(b) および (c) のときは (a) と同様なので (d₁) のときを考える。このとき図 19 左の様になっている。(a) のときと同様に L_1, L_2 を決めると Y_1^+, Y_2^+ は図 19 中右の様になっている。ただし A 内の $\tau(\ell)$ の成分 γ が $\tau(L_1)$ に含まれているとする。 Y_1^+ には新たに頂点が発生するが、それに対応して $\tau(L_1) \cap L_1$ にも頂点が発生する。よって (a) と同様の結論が得られる。■

bridge ℓ が edge connection も corner connection も持たず同じ面を 2 回通らないとき **normal** と呼ぶ。SG-move $[\ell, Y^+]$ の ℓ が normal なとき move を **normal** と呼ぶ。補題 4, 5 より次が成立する。

命題 6 自己隣接面を持たない GS-diagram Σ に C -move が存在するとき normal な C -move が存在する。

B -move $[\ell, Y^+]$ が存在するとき, C -move が存在するかまたは, normal な B -move $[\ell_1, Y_1^+], \dots, [\ell_k, Y_k^+]$ が存在して

$$\Sigma[\ell, Y^+] \cong \Sigma[\ell_1, Y_1^+, \dots, \ell_k, Y_k^+]$$

が成立する。

3 K6-137 は C -既約かつ可約

この節では次の命題を証明する。

命題 7 DS-diagram K6-137 は C -既約だが既約でない。

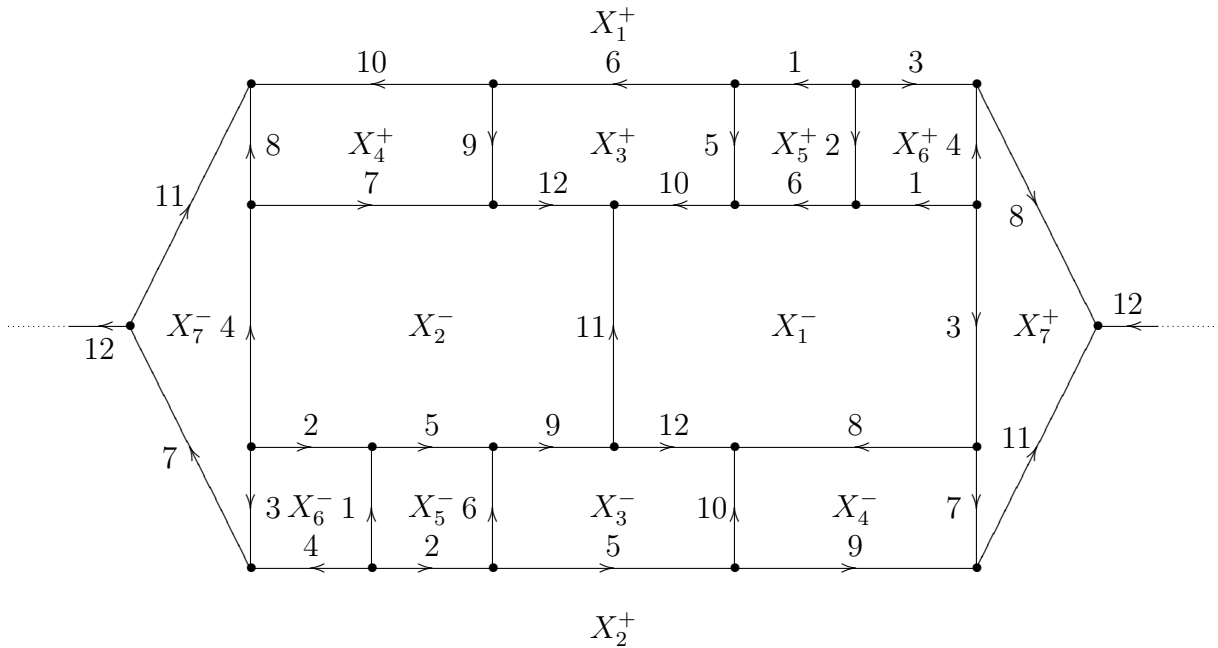


図 20

DS-diagram の一覧表は [1] にあるが K-137 は図 20 の様な DS-diagram である。
 K-137 の 4-gon X_4^+ で 4-move を行う。ただし 4-move で G -move をする面は S -move をする loop が X_2^- または X_1^+ から切り取る面である。
 move の結果は図 21 で K6-151 である。図 21 の隣接する 4-gon X_3^- と X_7^+ のまわりの 4^2 -move を行うと頂点数が下がり K5-50 が得られる。K5-50 は Poincare homology 3-sphere の頂点数最小の DS-diagram である。
 よって K6-137 は既約ではない。

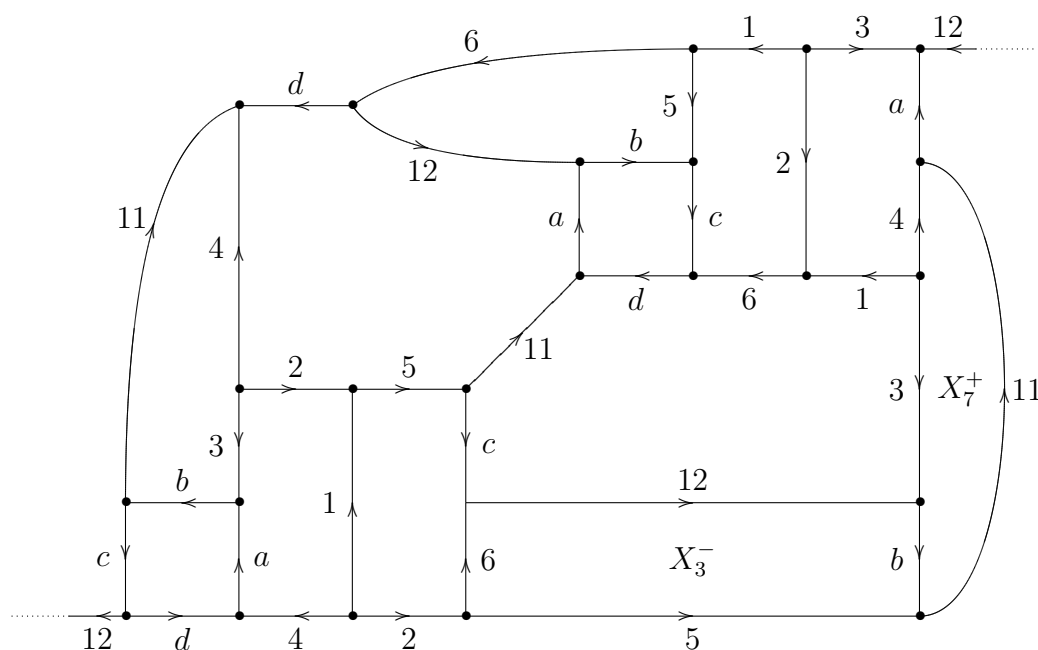


図 21

以下では K6-137 が C -既約であることを示す。DS-diagram が C -既約であることを示す簡単な方法は今のところない。命題 6 より normal な loop ℓ をすべてリストアップし、それらに対し分離される $\Sigma[\ell]$ の面 X^+ で $c(X^+) - c(\ell) > 0$ となるものを探す。この様な組 ℓ, X^+ が見つければ K6-137 は C -可約であり、見つからなければ C -既約である。

ここで move についていくつか述べておく。

SG -move $[\ell, Y^+]$ で $\Sigma \cong \Sigma[\ell, Y^+]$ となる変形を **unchanged move** と呼ぶ。定義より B -move である。

面 X_1^+, \dots, X_n^+ が隣接していて $\overline{X_1^+} \cup \dots \cup \overline{X_n^+}$ が 2-disk と同相であるとする。 $\partial(\overline{X_1^+} \cup \dots \cup \overline{X_n^+})$ に平行で $\overline{X_1^+} \cup \dots \cup \overline{X_n^+}$ の少し外側を 1 周する loop を $\ell(X_1, \dots, X_n)$ とする。

面 X^+ に対し $\ell(X^+)$ を X^+ の **face bridge** と呼ぶ。 X^+ が proper, 対隣接, 退化辺を持つまたは持たない等色々場合はあるがいずれの場合も $[\ell(X^+), X^+]$ は

unchanged move である。これを **face move** と呼ぶ。図 22 は退化辺を持ち対隣接する場合の図である。ただし G -move で貼り付けた面以外のラベルは省略してある。

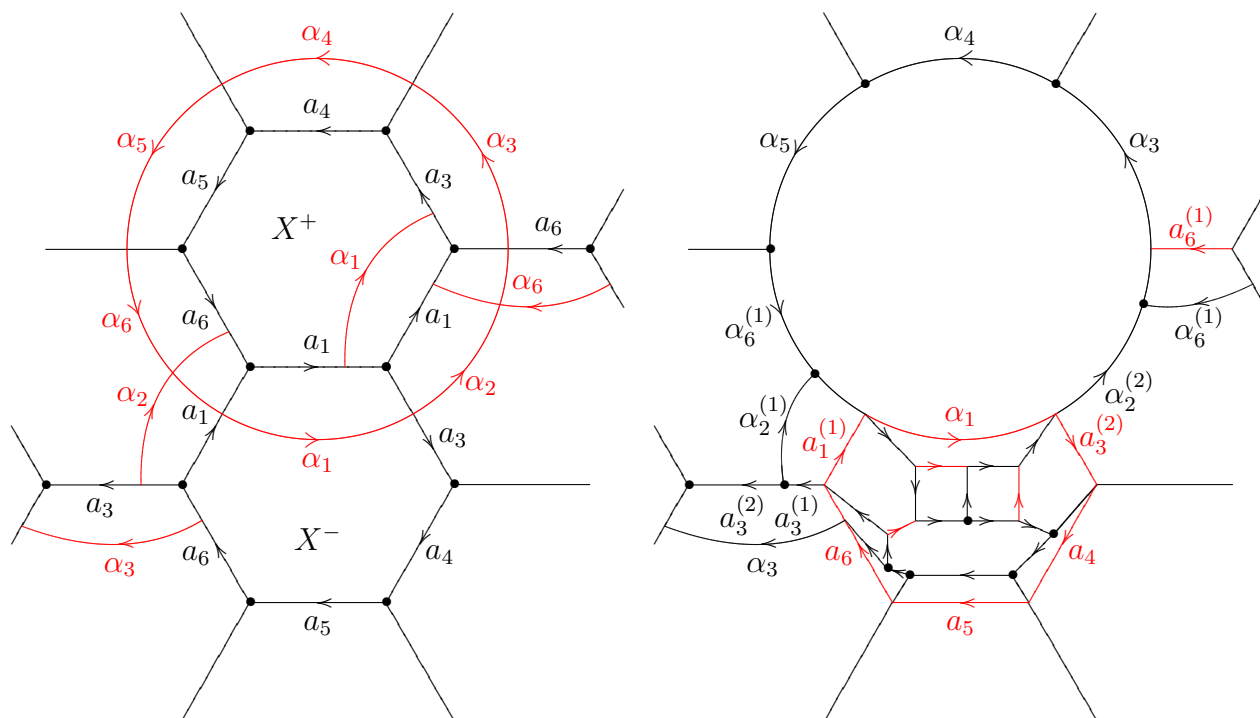


図 22

面 X^+ と退化 3-gon Y^+ が非退化辺で隣接しているとする。 $[\ell(X^+, Y^+), X^+]$ は unchanged move である。

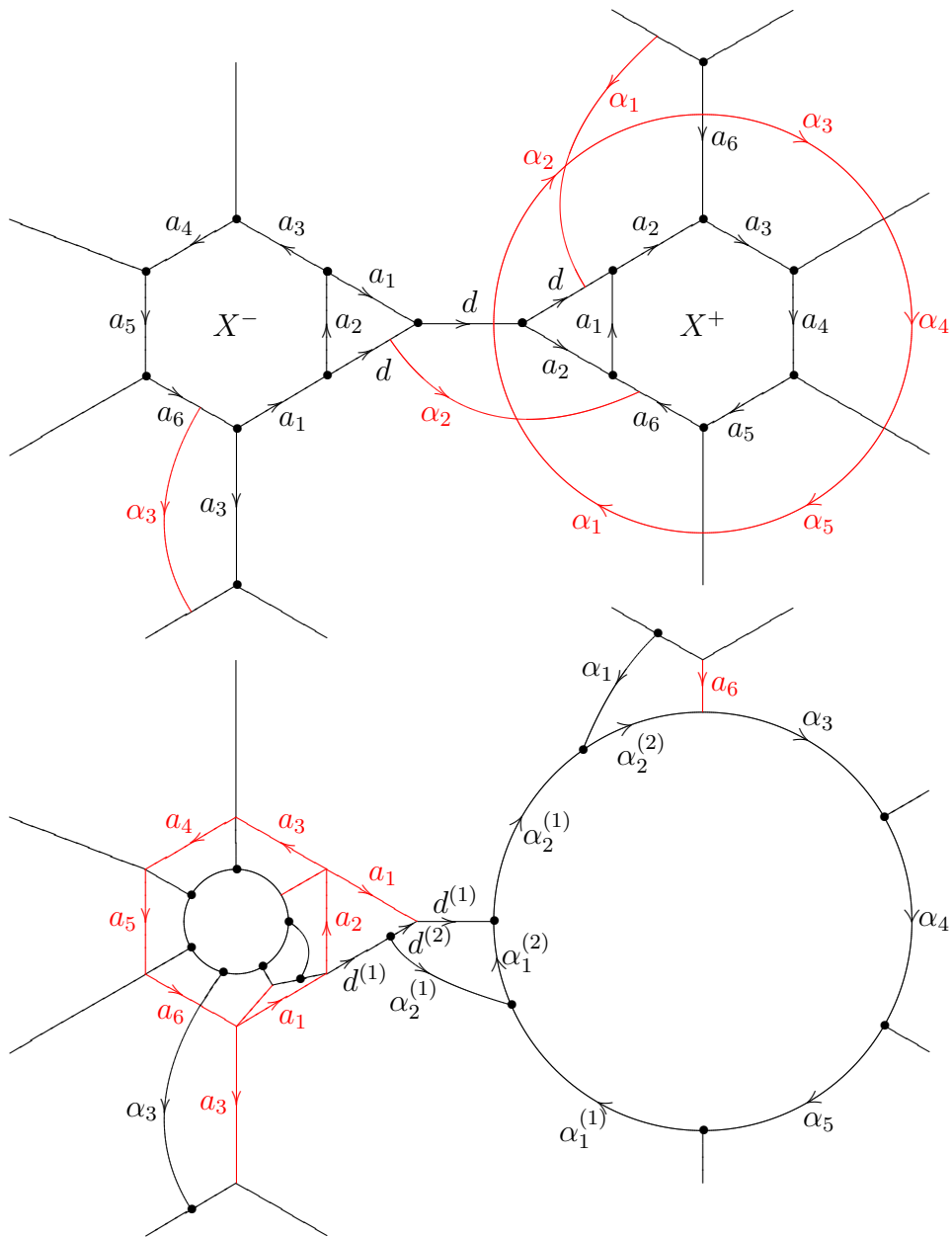


図 23

面 X^+ と退化 4-gon Y^+ が非退化辺で隣接していて、退化辺の 1 つの頂点は X 上にあるとする。このとき $[\ell(X^+, Y^+), X^+]$ は X^+ に関する face move と同値な unchanged move である。

面 X^+ と proper 4-gon Y^+ が隣接しているとき $[\ell(X^+, Y^+), Y^+]$ は Y^+ に関する 4-move と同値である。

次の表は K6-137 の normal な loop の一覧である。loop をそれが通る面の列で表している。 $c(\ell)$ は loop の複雑度である。ただし loop は面内の isotopy で $\ell \cap \tau(\ell)$ が

最小になる様に選んでいるものとする。

表の X^+ は X^+ に関する face move を意味する。 $p4 + X^+$ は proper 4-gon と面 X^+ からなる 4-move と同値な move を表す。「 B -move」は C -move は存在しないが B -move が存在すること, 「not BC」は B -move も C -move も存在しないことを表す。

この表の中に C -move を与える loop は存在しないので K6-137 は C -既約である。

[1] の 6 頂点以下のリストでは他はすべて C -既約なものは既約である。

										$c(\ell)$	type
1	X_1^+	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_4^+	X_1^+				6	X_7^+
2	X_1^+	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_3^+	X_1^+				5	$p4 + X_7^+$
3	X_1^+	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+			6	B -move
4	X_1^+	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+			7	B -move
5	X_1^+	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_4^+	X_1^+				6	not BC
6	X_1^+	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_3^+	X_1^+				5	B -move
7	X_1^+	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+			7	B -move
8	X_1^+	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+			6	B -move
9	X_1^+	X_2^+	X_3^-	X_2^-	X_4^+	X_1^+				6	not BC
10	X_1^+	X_2^+	X_3^-	X_2^-	X_3^+	X_1^+				6	not BC
11	X_1^+	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_3^+	X_1^+				6	not BC
12	X_1^+	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+				5	B -move
13	X_1^+	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+				5	B -move
14	X_1^+	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_2^-	X_4^+	X_1^+			8	not BC
15	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_3^+	X_1^+					4	X_4^+
16	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+				5	$p4 + X_3^+$
17	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+				5	B -move
18	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+				7	not BC
19	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_3^-	X_4^-	X_7^+	X_1^+			7	B -move
20	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_3^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_3^+	X_1^+	11	not BC
21	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_3^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_5^+	X_1^+	10	not BC
22	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_3^+	X_1^+	10	not BC
23	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+	11	not BC
24	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	10	not BC
25	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_3^+	X_1^+	10	not BC
26	X_1^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_5^+	X_1^+	11	not BC
27	X_1^+	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_1^-	X_3^+	X_1^+		8	$p4 + X_2^-$
28	X_1^+	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+		8	B -move
29	X_1^+	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+		8	B -move
30	X_1^+	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+		8	B -move

										$c(\ell)$	type
31	X_1^+	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_4^-	X_7^+	X_1^+		8	X_2^+
32	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+				6	X_3^+
33	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+				6	not BC
34	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+				6	not BC
35	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_3^-	X_4^+	X_7^+	X_1^+			6	not BC
36	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_3^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_5^+	X_1^+	10	not BC
37	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+	12	not BC
38	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	11	not BC
39	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_5^+	X_1^+	11	not BC
40	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+	10	not BC
41	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	11	not BC
42	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+	10	not BC
43	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_5^+	X_1^+	11	not BC
44	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	12	not BC
45	X_1^+	X_4^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_7^+	X_1^-	X_5^+	X_1^+	10	not BC
46	X_1^+	X_3^+	X_1^-	X_6^+	X_1^+					5	X_5^+
47	X_1^+	X_3^+	X_1^-	X_7^+	X_1^+					5	not BC
48	X_1^+	X_3^+	X_1^-	X_4^-	X_2^+	X_1^+				6	not BC
49	X_1^+	X_3^+	X_1^-	X_3^-	X_2^+	X_1^+				6	not BC
50	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_3^-	X_4^-	X_7^+	X_1^+			7	B -move
51	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_5^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	10	not BC
52	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	11	not BC
53	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+	10	not BC
54	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_6^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	11	not BC
55	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_7^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	10	not BC
56	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_7^-	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_7^+	X_1^+	11	not BC
57	X_1^+	X_3^+	X_2^-	X_7^-	X_2^+	X_4^-	X_1^-	X_6^+	X_1^+	10	not BC
58	X_1^+	X_5^+	X_1^-	X_7^+	X_1^+					5	X_6^+
59	X_1^+	X_5^+	X_1^-	X_4^-	X_2^+					6	not BC
60	X_2^+	X_7^-	X_2^-	X_5^-	X_2^+					5	X_6^-
61	X_2^+	X_7^-	X_2^-	X_3^-	X_2^+					5	not BC
62	X_2^+	X_7^-	X_2^-	X_1^-	X_4^+	X_2^+				6	not BC
63	X_2^+	X_7^-	X_2^-	X_1^-	X_7^+	X_2^+				6	not BC
64	X_2^+	X_7^-	X_2^-	X_3^+	X_5^+	X_6^+	X_7^+	X_2^+		8	B -move
65	X_2^+	X_7^-	X_4^+	X_3^+	X_1^-	X_3^-	X_2^+			7	B -move
66	X_2^+	X_7^-	X_4^+	X_3^+	X_1^-	X_4^-	X_2^+			6	not BC
67	X_2^+	X_7^-	X_4^+	X_3^+	X_1^-	X_7^-	X_2^+			7	B -move
68	X_2^+	X_7^-	X_4^+	X_3^+	X_5^+	X_6^+	X_7^+	X_2^+		8	X_1^+

										$c(\ell)$	type		
69	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_3^-	X_2^+					5	X_5^+		
70	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_1^-	X_4^-	X_2^+				6	not BC		
71	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_1^-	X_7^+	X_2^+				5	B -move		
72	X_2^+	X_6^-	X_2^-	X_3^+	X_5^+	X_6^+	X_7^+	X_2^+		8	B -move		
73	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_1^-	X_4^-	X_2^+				6	X_3^-		
74	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_1^-	X_7^+	X_2^+				5	$p4 + X_3^-$		
75	X_2^+	X_5^-	X_2^-	X_3^+	X_5^+	X_6^+	X_7^+	X_2^+		7	B -move		
76	X_2^+	X_3^-	X_2^-	X_3^+	X_5^+	X_6^+	X_7^+	X_2^+		8	$p4 + X_1^-$		
77	X_2^+	X_3^-	X_1^-	X_7^+	X_2^+					4	X_4^-		
78	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_1^-	X_3^+	X_4^+	X_7^+		8	X_2^-		
79	X_7^-	X_6^-	X_5^-	X_3^-	X_4^-	X_7^+	X_6^+	X_5^+	X_3^+	X_4^+	X_7^-	20	not BC
80	X_2^-	X_3^-	X_4^-	X_7^+	X_6^+	X_5^+	X_3^+	X_7^+		8	X_1^-		

最後に少し内輪話を。当初の候補は3個あってそれは K5-35, K6-063, K6-137 でした。C-既約かどうかを順に調べていって K5-35 と K6-063 はリストの順番で割と早い所で C-move が見つかりました。K6-137 もやっぱり存在するのかな、石井さんに「候補はある」と言った手前頂点数7を調べなくちゃいけないかな、などと思って調べていたので、最後までやって見つからなかったときはうれしかったです。まあ反例があるのを喜ぶべきかどうかは分かりませんが...

K5-35, K6-063 でそのときまで C-move を見つけれなかった言い訳をしておくと、どちらの bridge もあるラベル辺に3回ぶつかる bridge でざっと見て $\ell \cap \tau(\ell)$ が発生する様に誤解して実際に詳しく調べていませんでした。教訓は実際に変形してみなくては分からないということでしょうか。

参考文献

- [1] M Kouno. DS-diagram のリスト. <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/DS-diagram/DS-diagram.html>.
- [2] M Kouno. 一般化された DS-diagram について. 箱根セミナー 2001 記録, pp. 35–56, 2001.
- [3] M Kouno. GS 変形について. 箱根セミナー 2002 記録, pp. 57–70, 2002.
- [4] M Kouno. DS-diagram のいくつかの例. 箱根セミナー 2006 記録, pp. 49–75, 2006.
- [5] M Kouno. geraldized DS-diagram の C-変形とリフトについて. 箱根セミナー 2009 記録, pp. 39–68, 2009.

- [6] M Kouno. On gernalized ds-diagram and moves. *Tokyo J. of Math.*, Vol. 34, pp. 165–183, 2011.
- [7] M Kouno. H-move について. 箱根セミナー 2016 記録, pp. 49–76, 2016.
- [8] M Kouno. 重複度の高い DS-diagram. 箱根セミナー 2018 記録, pp. 71–96, 2018.
- [9] M Yamashita. DS-変形の生成元について. 箱根セミナー 1998 記録, pp. 15–24, 1998.
- [10] K Yokoyama. Lens space の DS-diagram について. 数理解析研究所考究録 563.
- [11] K Yokoyama. On DS-diagram of lens space. *Topology and Computer Science*, pp. 171–192, 1987.