

重複度の高い DS-diagram

河野 正晴

DS-diagram に対し重複度というものを定義し、それが大きい DS-diagram の特徴に関して考える。

1 用語など

DS-diagram, generalized DS-diagram, move などの定義は [1], [2], [4], [5] を参考にしてください。ただし考える多様体はすべて向き付け可能とします。

generalized DS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $S - G$ 上の involution τ を次で定義する ; p を $S - G$ の任意の点とする。 $f^{-1}(f(p))$ は 2 点からなる集合なので、それを $\{p, p'\}$ とするとき $\tau(p) = p'$ とする。

Σ の面 X^+ に対し $\tau(X^+) = X^-$ と定義する。 X^+ が open 2-disk と同相のとき円板面といい、そうでないとき非円板面という。

X^+ と X^- が隣接するとき、 X^+ は対隣接するという。 $\overline{X^+} - X^+$ の成分に S^1 と同相でないものが存在するとき、 X^+ を自己隣接面という。

$X^+ = X^-$ のとき X^+ を自己同一視面という。自己同一視面は非円板面である。

G に関し general position にある S 上の loop を ℓ とする。 ℓ に関する S -move を $[\ell]$ と表す。 Σ に S -move $[\ell]$ を行って得られる generalized DS-diagram を $\Sigma[\ell]$ と書く。

$\Sigma[\ell]$ の面 Y^+ と $Y^- = \tau(Y^+)$ が $S - \ell$ の別の成分にあるとき Y^+ は ℓ で分離されるという。 $\Sigma[\ell]$ の面 Y^+ を $\overline{Y^+}$ が 2-disk と同相であるとする。 Y^+ が ℓ で分離されているとき $\Sigma[\ell]$ に対し Y^+ で G -move を行うことができる。この 2 つの move を続けて行う move を $[\ell, Y^+]$ と書き、得られる generalized DS-diagram を $\Sigma[\ell, Y^+]$ と書く。

Σ の面 X^+ における頂点ラベルおよび辺ラベルの重複度を定義する。最初に X^+ が円板面のときを考える。 ∂X^+ の辺のラベルを X^+ のある頂点からどちらかの方向へひと回り読んだものを $a_1 a_2 \cdots a_n$ とする。このとき X^+ は n -gon であるという。辺ラベル a_i の始点ラベルを v_i , 終点ラベルを v_{i+1} とする ($v_{n+1} = v_1$ である)。

辺ラベル a に対し X^+ における重複度を

$$\text{ch}(a, X^+) = \#\{i \mid a_i = a \text{ または } a_i = a^{-1}\}$$

と定義する。ただし $\#S$ を有限集合 S の要素の数とする。頂点ラベル v に対し X^+ における重複度を

$$\text{ch}(v, X^+) = \#\{i \mid v_i = v \ (1 \leq i \leq n)\}$$

と定義する。

X^+ が非円板面のときは ∂X^+ の各成分についての重複度を足し合わせたものとして定義する。 n -gon についても各成分について足し合わせたものとする。

$V(X^+)$ を X^+ の頂点集合とし、 $E(X^+)$ を X^+ の向きづけられた辺の集合とする。 X^+ が自己隣接辺を持たないとき頂点のラベル v と向きづけられた辺のラベル a に対し

$$\text{ch}(v, X^+) = \#\{w \in V(X^+) \mid f(w) = v\}$$

$$\text{ch}(a, X^+) = \#\{e \in E(X^+) \mid f(e) = a \text{ または } f(e) = a^{-1}\}$$

となっている。

X^+ の頂点ラベルの重複度が 1 のときそのラベルをもつ頂点を uni-vertex と呼ぶ。重複度が 2 以上のとき multi-vertex, 重複度が 2 のとき twin-vertex, 3 のとき triplet-vertex, 4 のとき quadruplet-vertex と呼ぶ。辺に関しても同様に uni-edge, multi-edge, twin-edge, triplet-edge を定義する。

面 X^+ が n -gon で、 $\#f(V(X^+)) = p$ のとき、

$$\text{ch}(X^+) = \frac{n-p}{n}$$

と定義し、これを面 X^+ の重複度という。また

$$\text{ch}(\Sigma) = \max \{ \text{ch}(X^+) \mid X^+ \text{ は } \Sigma \text{ の面} \}$$

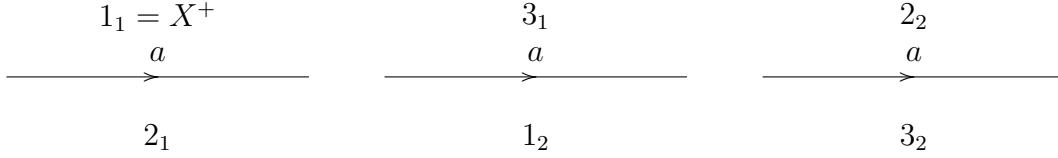
を generalized DS-diagram Σ の重複度と呼ぶ。

最初に面が multi-vertex および multi-edge を持つ場合を整理しておく。ここで $\Sigma(p, q)$ を lens space $L(p, q)$ の DS-diagram としての標準形とする ([8],[9])。

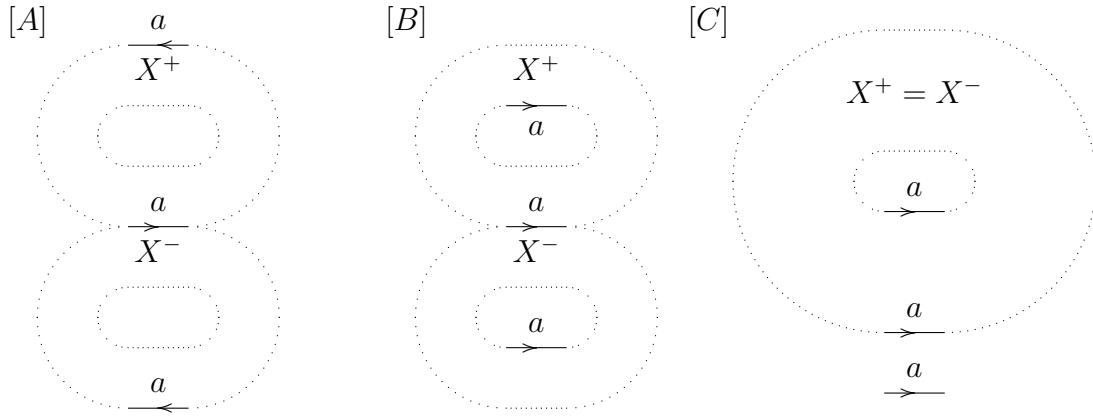
命題 1.1 generalized DS-diagram の面 X^+ に multi-edge が存在するとき、 X^+ が自己同一視面でなければ対隣接するか X^+ または X^- が自己隣接する。 X^+ が円板面のとき multi-edge のラベルを a とすると、 $\partial X^+ = \dots a \dots a^{-1} \dots$ なら自己隣接、 $\partial X^+ = \dots a \dots a \dots$ なら対隣接である。

hoop を持たない C -既約な generalized DS-diagram の面 X^+ は円板面であり、 X^+ が multi-edge を持つとき対隣接する。このとき multi-edge は twin-edge である。また generalized DS-diagram が $\Sigma(4, 1)$ でない場合、対隣接辺の端点是对隣接辺が退化辺のときは triplet-vertex であり、非退化辺のときは twin-vertex である。 $\Sigma(4, 1)$ の頂点は quadruplet-vertex である。面 X^+ の対隣接辺の端点にならない頂点が multi-vertex のときそれは twin-vertex である。

証明 generalized DS-diagram を Σ とする。 Σ の辺ラベル a に対し $\text{ch}(a, X^+) \geq 2$ とする。 3個のラベル a 辺のまわりは次図の様だとしてよい。 ただし、面 i_1 と面 i_2 が同一視されるものとする ($i = 1, 2, 3$)。 $1_1 = X^+$ とする。



- (1) $2_1 = X^+$: このとき X^+ は自己隣接する。 X^+ が円板面であるか非円板面であるかによらず、 ∂X^+ の (ある成分の) ラベルは $\dots a \dots a^{-1} \dots$ となっている。
(2) $3_1 = X^+$: $1_2 = X^-$ なので X^+ は対隣接している。 X^+ が円板面のときは $\partial X^+ = \dots a \dots a \dots$ となっている。 X^+ が非円板面のときは次図 [A] または [B] の様になっている。



- (3) $1_2 = X^+$: このとき $X^+ = X^-$ であり X^+ は自己同一視面である。 このとき X^+ は前図 [C] の様になり、非円板面である。
(4) $2_2 = X^+$: $2_1 = X^-$ であり X^+ は対隣接する。 このときは (2) と同様である。
(5) $3_2 = X^+$: $3_1 = X^-, 1_2 = X^-$ なので X^- が自己隣接する。

以下 generalized DS-diagram は C -既約で hoop を持たないとする。 面 X^+ が円板面であることを示すには次の補題を必要とする ([4] 補題 3.2)。

補題 1.2 G のループ何個かで囲まれた領域 R が「 R 内の任意の面はその同一視される面を R 内に持つ」とき、 R の境界上の任意の辺に対し、 それと同じラベルを持つ異なる辺が R の境界上に存在する。

X^+ を非円板面とする。 このとき ∂X^+ の一つの成分を ∂X_0^+ とする。 ∂X_0^+ と平行な X^+ の loop を ℓ とする。 ∂X_0^+ を境界とする X^+ と交わらない open desk を R とする。 R に含まれる Σ の面 Y^+ で ℓ で分離されるものが存在すると仮定する。

Σ は hoop を持たないので Y^+ に頂点が存在する。このとき $\Sigma[\ell, Y^+]$ の複雑度は Σ の複雑度より小さいので C -既約性に矛盾する。

よって R に含まれる面は R に含まれる面と同一視される。補題 1.2 より ∂X_0^+ の各辺に対しそれと同じラベルをもつ異なる辺が存在する。 ∂X_0^+ のすべての辺が対隣接辺ということはない。対隣接しない辺に関して同じラベルをもつ辺が 4 個存在するので矛盾。よって X^+ は円板面である。

Σ は C -既約なので面 X^+ は自己隣接することはない。

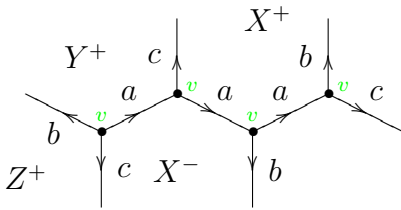
残りの部分の証明には次の補題を必要とする ([6] 補題 2.1)。

補題 1.3 hoop を持たない C -既約な generalized DS-diagram Σ に non-trivial 2-bridge が存在すれば $\Sigma \cong \Sigma(p, 1)$ である。このとき bridge が載る面は 2 つの異なる退化辺で対隣接する。

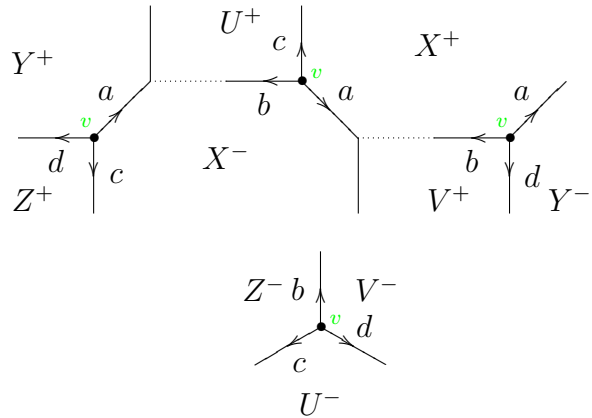
X^+ に $\text{ch}(a, X^+) = 3$ となるラベルが存在するとする。3 重辺 (f で 3 重に移される hoop) は hoop なので存在しない。よってラベル a 辺は 3 重対隣接辺である。辺には端点が存在するので、 Σ は C -可約である。よって $\text{ch}(a, X^+) \leq 2$ が成立する。

次に頂点を考える。対隣接するラベル a 辺のひとつの頂点のラベルを v とする。最初にラベル a 辺が退化辺のときを考える。

[A]



[B]



退化辺のときラベル a 辺のまわりは前図 [A] であり、 X^+ はラベル v 頂点を少なくとも 3 個含んでいる。4 個含むためには $Y^+ = X^+$ または $Z^+ = X^+$ である。 $Y^+ = X^+$ のとき X^+ は自己隣接する。 $Z^+ = X^+$ のとき X^+ は 2 重対隣接する。2 重対隣接するときは 2-bridge が存在するが、この bridge は non-trivial である。補題 1.3 よりラベル c 辺は退化辺になる。このとき Σ の頂点数は 1 であり $\Sigma \cong \Sigma(4, 1)$ であり、 $\text{ch}(v, X^+) = 4$ となる。これ以外は重複度は 3 である。

次にラベル a 辺が非退化辺のときを考える。前図 [B] において X^+ はラベル v 頂点を少なくとも 2 個含んでいる。3 個含むためには、 $X^+ = Y^+, Z^+, U^-, V^-$ のいずれかである必要がある。

$X^+ = U^+, V^+$ のときは X^+ が自己隣接する。 $X^+ = Z^-, U^-$ のときは X^- が自己隣接する。 $X^+ = Z^+, Y^+, V^-$ のときは 2 重対隣接するが、ラベル a 辺は退化辺ではないので補題 1.3 に矛盾。

最後に対隣接辺の端点でない頂点を考える。 v の重複度が k のとき $\partial X^+ \cup \partial X^-$ にラベル v 頂点は $2k$ 個存在する。よって重複度は高々 2 である。以上で命題が示された。■

次に主命題の証明に必要な退化辺を複数持つ DS-diagram に関する命題を証明する。

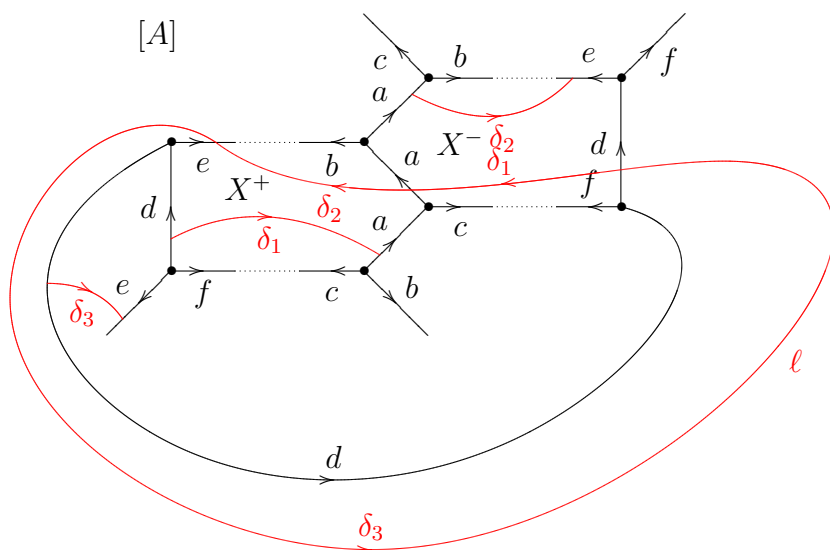
命題 1.4 C -既約な DS-diagram の面を X^+ とする。 X^+ が退化辺で対隣接していて、他にもう一つ退化辺を含めば $\Sigma \cong \Sigma(p, 1)$ または $\Sigma(p, 2)$ である。

もう少し詳しく言うと X^+ が $2k$ -gon のとき 2 つの退化辺で 2 重対隣接し $\Sigma \cong \Sigma(k+2, 1)$ であり、 X^+ が $(2k+1)$ -gon のとき 1 つの対隣接する退化辺と対隣接しない退化辺を含み $\Sigma \cong \Sigma(2k+3, 2)$ である。

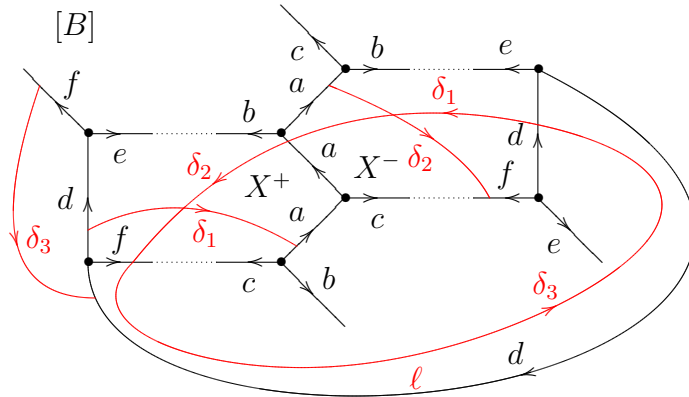
証明 もう一つの退化辺が対隣接辺のときは 2 重対隣接するので補題 1.3 より $\Sigma \cong \Sigma(p, 1)$ である。2 重対隣接する面は偶数辺からなり、 X^+ が $2k$ -gon のとき $\Sigma(k+2, 1)$ になるのは容易に分かる。

残りの証明には次の補題を必要とする ([4] の命題 6.1 の弱い Version である)。

補題 1.5 C -既約な DS-diagram が non-trivial 3-bridge を含めば 4-point であり、退化辺と交わる。



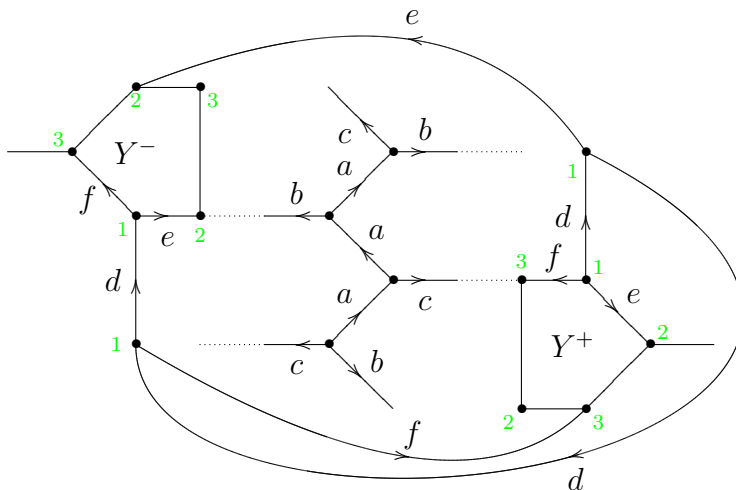
もう一つの退化辺で対隣接しない場合は前図 [A] と次図 [B] に分かれる。図 [A] の場合 3-bridge l は 3-point なので C -可約である。よって [B] の場合を考える。



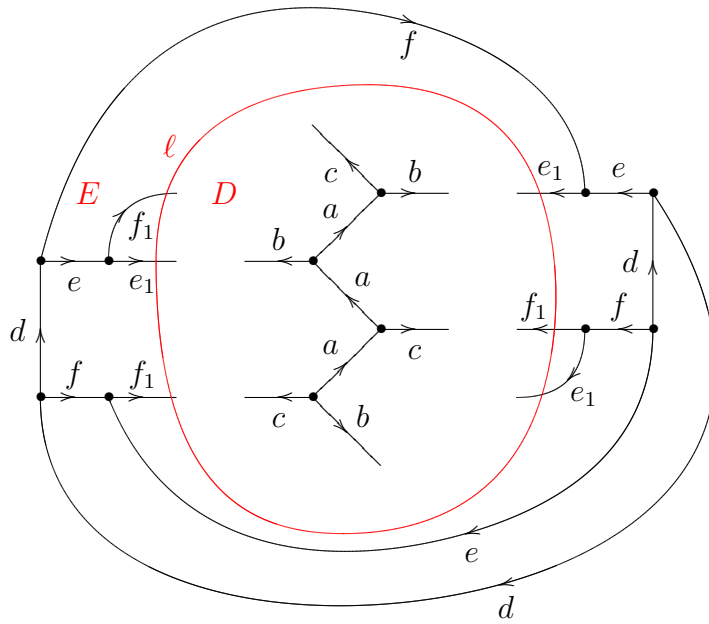
ラベル e, b 辺がなくラベル a 辺とラベル d 辺が隣接しているときは $\Sigma \cong \Sigma(5, 2)$ である。 $c = f^{-1}$ のとき $b = e^{-1}$ であり、 $\Sigma \cong \Sigma(7, 2)$ である。

ラベル d の端点のラベルを 1, ラベル e の 1 でない端点のラベルを 2, ラベル f のそれを 3 とするとき「 $2 = 3$ 」を示す。 $2 \neq 3$ と仮定する。次図の Y^+ が 3-gon のときは Σ は C -可約なので、 Y^+ は 4-gon 以上である。 Y^+ が 4-point 以上のとき $\Sigma[l]$ では Y^+ は 5-point 以上になるので $[l, Y^+]$ が C -move になり矛盾である。よって Y^+ は 3-point である。

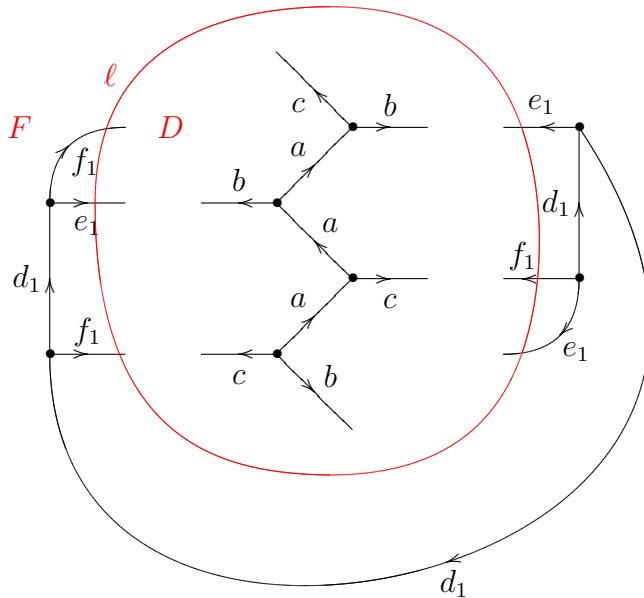
Y^+ と Y^- は $X^+ \cup X^-$ とラベル d 辺で分離されているので退化辺を含まない。よって次図の様になっている。このとき Σ は 1-bridge を含むので矛盾。よって $2 = 3$ である。



X^+ のラベル b 辺とラベル e 辺の間にある頂点の個数 k に関する帰納法で示す。示す命題は「 $\Sigma \cong \Sigma(2k + 5, 2)$ 」である。 $k = 0, 1$ では成立している。



$n < k$ のとき $\Sigma \cong \Sigma(2n + 5, 2)$ の成立を仮定する。「 $2 = 3$ 」なので Σ は前図の様になっている。



Σ は loop l で D と E に分かれている。即ち $\Sigma = D \cup_l E$ と torus sum になっ

ている。 E の部分を前図の F に変えて $\Sigma' = D \cup_{\ell} F$ とすると、帰納法の仮定より $\Sigma' = \Sigma(2(k-1) + 5, 2)$ である。よって $\Sigma \cong \Sigma(2k + 5, 2)$ が得られる。 ■

2 いくつかの命題

この節では重複度の高い DS-diagram に関する命題を紹介する。最初の命題を除き証明は次の節で行う。

命題 2.1 DS-diagram Σ が C -既約だとする。 n -gon X^+ を Σ の重複度最大の面とする。 n が偶数のとき $n = 2k$, n が奇数のとき $n = 2k + 1$ とすると

$$\text{ch}(\Sigma) \leq \frac{k+1}{n}$$

である。

証明 X^+ は p -point であるとする。 $\Sigma \cong \Sigma(4, 1)$ のときは $\text{ch}(\Sigma) = \frac{4-1}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$ なので条件を満たしている。 $\Sigma \not\cong \Sigma(4, 1)$ とすると命題 1.1 より triplet-vertex は高々2組、他の頂点は高々twin-vertex である。よって n が偶数の時 $3 \cdot 2 + 2(p-2) = 2p + 2 \geq 2k$ より $p \geq k - 1$ である。

$$\text{ch}(X^+) = \frac{n-p}{n} \leq \frac{2k - (k-1)}{2k} = \frac{k+1}{2k}$$

が成立する。

n が奇数のときは triplet-vertex が2組あるとき、uni-vertex が1個は存在する。 triplet-vertex が1組のとき、他の頂点は高々twin-vertex である。 $3 \cdot 2 + 2(p-3) + 1 \geq n$ または $3 \cdot 1 + 2(p-1) \geq n$ より $p \geq k$ である。

$$\text{ch}(X^+) = \frac{n-p}{n} \leq \frac{2k+1-k}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$$

が成立し命題が示される。 ■

重複度の高い DS-diagram として以下の様なものがある。

$$\text{ch}(\Sigma(k+2, 1)) = \frac{k+1}{2k} \quad (k \geq 2)$$

$$\text{ch}(\Sigma(2k+3, 2)) = \frac{k+1}{2k+1} \quad (k \geq 1)$$

$$\text{ch}(\Sigma(4k, 2k-1)) = \text{ch}(\Sigma(3k+1, 3)) = \text{ch}(\Sigma(3k+2, 3)) = \frac{k}{2k} \quad (k \geq 2)$$

$$\text{ch}(\Sigma(6k-1, 3k)) = \text{ch}(\Sigma(6k+1, 3k+2)) = \frac{k}{2k+1} \quad (k \geq 2)$$

$$\text{ch}(\Sigma(9k - 12, 3k - 5)) = \text{ch}(\Sigma(9k - 9, 3k - 4)) = \text{ch}(9k - 6, 3k - 1) = \frac{k - 1}{2k} \quad (k \geq 3)$$

$\Sigma(Q_{4k})$ を quatanion space の DS-diagram の標準形とすると

$$\text{ch}(\Sigma(Q_{4k})) = \frac{k}{2k} \quad (k \geq 2)$$

が成立する。

重複度が上限に近いときは逆が成立する。即ち次が成立する。

命題 2.2 C -既約な DS-diagram Σ の重複度最大の面を X^+ とする。 X^+ が n -gon のとき n が偶数なら $n = 2k$, 奇数なら $n = 2k + 1$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Sigma) = \frac{k + 1}{2k} &\implies \Sigma \cong \Sigma(k + 3, 1) \\ \text{ch}(\Sigma) = \frac{k + 1}{2k + 1} &\implies \Sigma \cong \Sigma(2k + 3, 2) \end{aligned}$$

が成立する。

重複度が命題 2.2 より少し小さいとき, 必要十分にはならないが次が成立する。

命題 2.3 C -既約な Σ が n の重複度最大の面 X^+ が n -gon のとき n が偶数なら $n = 2k$, 奇数なら $n = 2k + 1$ とおく。

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Sigma) = \frac{k}{2k} &\implies \Sigma \cong \Sigma(4k, 2k - 1), \Sigma(Q_{4k}), \text{ または } \Sigma \text{ は } T_k^{(1)}(k \geq 2) \text{ を含む} \\ \text{ch}(\Sigma) = \frac{k}{2k + 1} &\implies \Sigma \text{ は } E_1, E_2, T_k^{(2)}(k \geq 2) \text{ または } T_k^{(3)}(k \geq 2) \text{ を含む} \end{aligned}$$

$T_k^{(1)}, T_k^{(2)}, T_k^{(3)}, E_1, E_2$ の定義は証明中に行う。

3 命題の証明

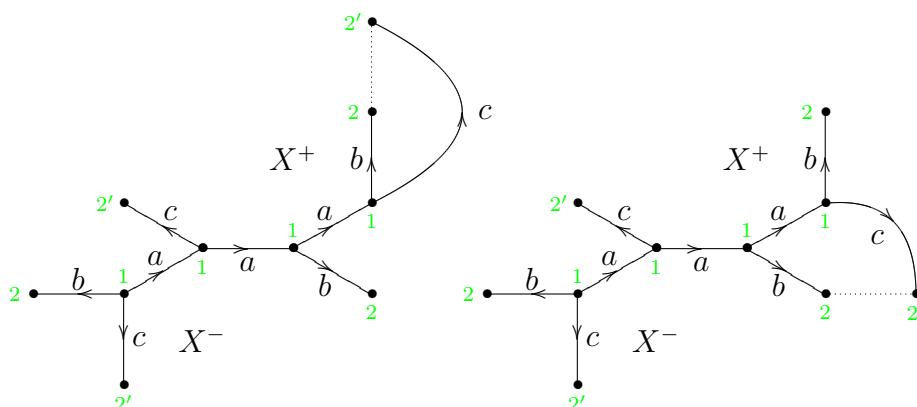
命題 2.2, 2.3 の証明を始めよう。 X^+ を Σ の重複度最大の面とする。 X^+ は n -gon で p -point とする。以下退化辺が存在するとき, そのラベルは a とし, その頂点のラベルを 1 とする。ラベル 1 頂点と接続する辺のラベルを b, c としその終点のラベルを $2, 2'$ とする。

[1] $\text{ch}(X^+) = \frac{k + 1}{2k}$ のとき ; $n = 2k, p = k - 1$ なので, X^+ は triplet-vertex を 2 組は含む。triplet-vertex は退化辺の端点であり, この退化辺のどれかで対隣接している。このとき 2 重対隣接するので $\Sigma \cong \Sigma(k + 3, 1)$ である。

[2] $\text{ch}(X^+) = \frac{k+1}{2k+1}$ のとき ; $n = 2k+1, p = k$ なので, X^+ は triplet-vertex を 1 組は含む。この頂点は退化辺の端点である。

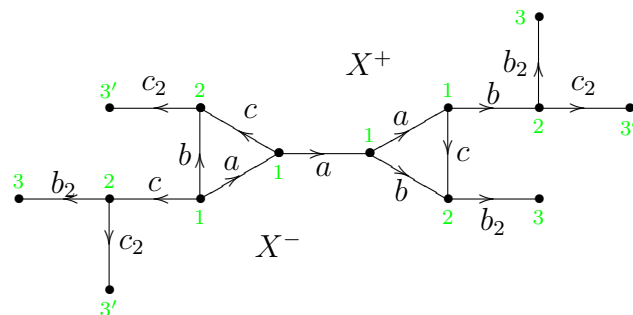
X^+ がこれ以外に退化辺を含む場合はこの退化辺で対隣接することはない。命題 1.4 より $\Sigma \cong \Sigma(2k+3, 2)$ である。

よって X^+ は他の退化辺を含まないとする。退化辺以外で対隣接すると 2 重対隣接するので, 他の辺で対隣接はしない。また退化辺の端点以外の X^+ の頂点は twin-vertex である。よって ∂X^+ 上に端点を持つ X^+ の辺になっていない辺の端点は ∂X^+ 上または ∂X^- 上にある。



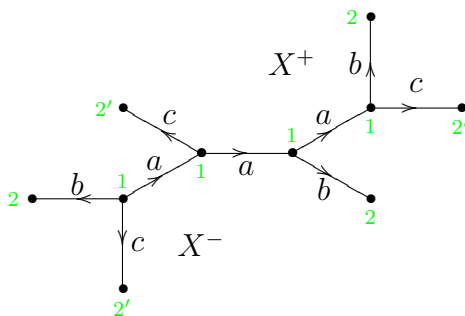
$2 \neq 2'$ のとき前図の様になりいずれも non-trivial 2-bridge が存在するので矛盾。よって $2 = 2'$ であり, 次図の様になっている。

ラベル 2 頂点と接続する ∂X^+ 上の辺のラベルを b_2, c_2 とし, その終点のラベルを 3 および $3'$ とすると同様に $3 = 3'$ が成立する。ラベル 3 頂点と接続する ∂X^+ 上の辺のラベルを b_3, c_3 とし, その終点のラベルを $4, 4'$ とすると同様に $4 = 4'$ が示される。この操作を続けていくと最後には退化辺でてくるので矛盾。よってこの場合は起こらない。

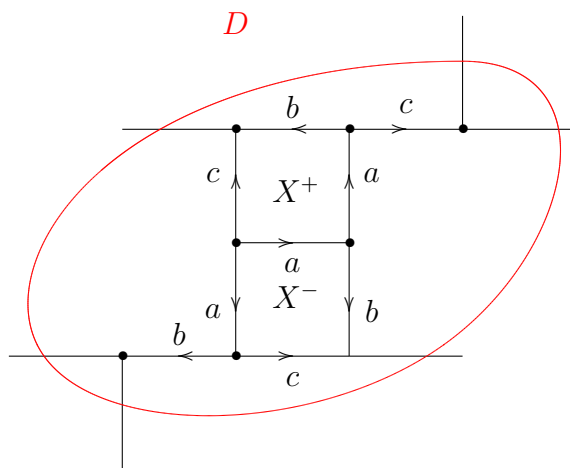


[3] $\text{ch}(X^+) = \frac{k}{2k}$ のとき ; X^+ に (A) triplet-vertex が存在するとき, (B) 対隣接しない退化辺が存在するとき, (C) 退化辺が存在しないが対隣接するとき, (D) 退化辺が存在せず対隣接しないとき, の 4 つの場合に分ける。

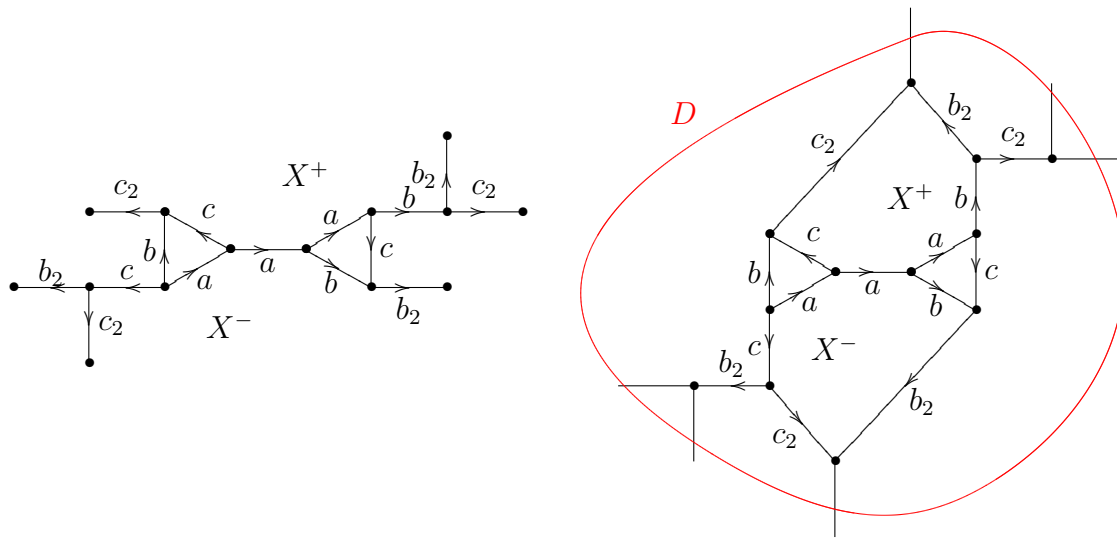
(A) triplet-vertex が存在するとき : uni-vertex は 1 個で残りは twin-vertex である。退化辺のまわりを次図の様だとする。 $2 \neq 2'$ とするとラベル 2 頂点またはラベル $2'$ 頂点は multi-vertex である。このとき前の議論と同様に non-trivial 2-bridge が存在し矛盾。よって $2 = 2'$ である。



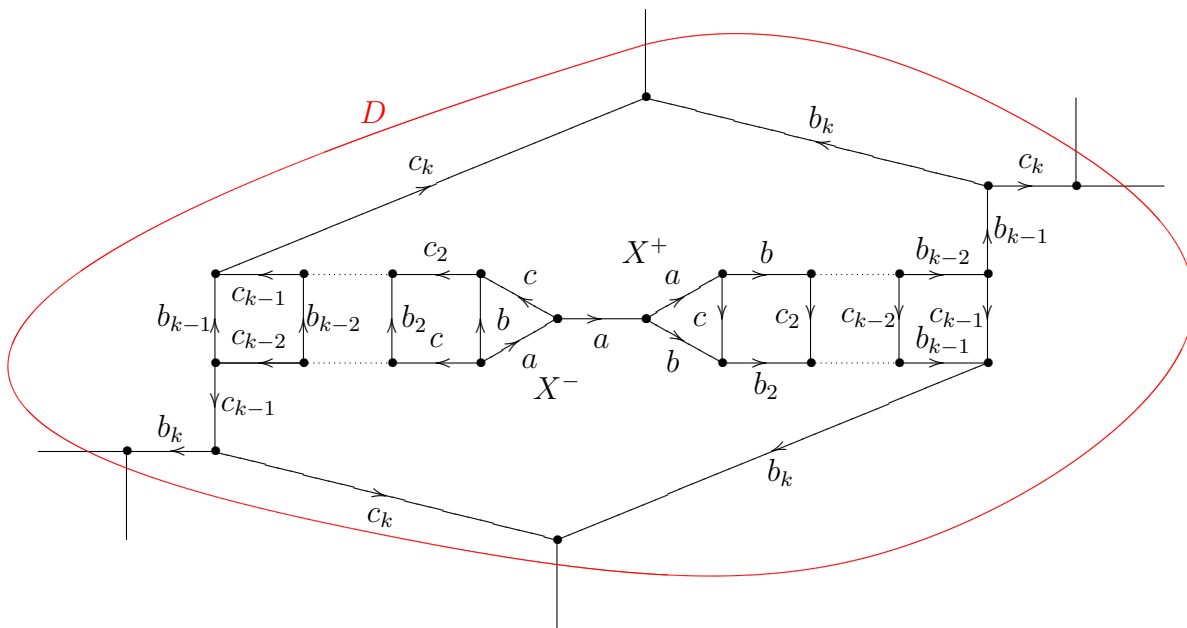
$k = 2$ のとき Σ (の一部) は次図の様になっている。loop で囲まれた (境界付き) DS-diagram を $T_2^{(1)}$ とする。loop の外部を D とすると $\Sigma = T_2^{(1)} \cup D$ との形の torus sum になっている。



$k > 2$ のときは次図左の様である。 $k = 3$ のとき Σ (の一部) は次図右の様になっている。loop で囲まれた (境界付き) DS-diagram を $T_3^{(1)}$ とする。loop の外部を D とすると $\Sigma = T_3^{(1)} \cup D$ と torus sum の形になっている。

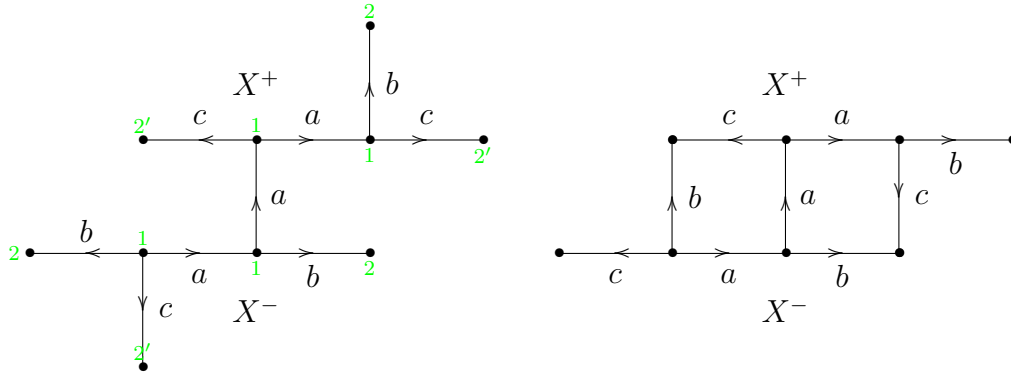


$k > 3$ のときも同様の議論をすることにより次図の様になっていることが分る。この (境界付き) DS-diagram を $T_k^{(1)}$ とすると $\Sigma = T_k^{(1)} \cup D$ と torus sum の形に書けることが分る。



(B) 対隣接しない退化辺が存在するとき：退化辺のまわりは次図左の様になっている。triplet-vertex は存在しないので頂点はすべて multi-vertex である。 $2 \neq 2'$ のとき前の議論と同様に C -既約に矛盾するので $2 = 2'$ である。このとき次図右の様になっている。

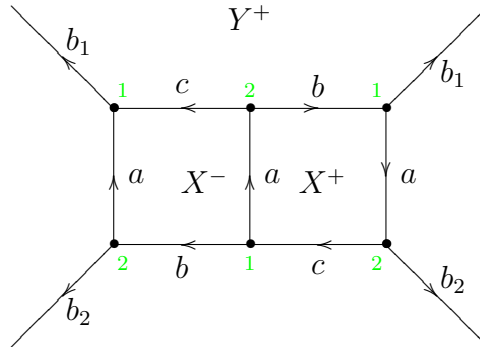
$k = 2$ のとき残りの辺はラベル 2 頂点をつなぐ退化辺なので Σ は $\Sigma(8, 3)$ である。



$k > 2$ のときラベル 2 頂点と隣接する頂点のラベルを $3, 3'$ とすると同様に $3 = 3'$ が分る。 $k = 3$ のときは $\Sigma \cong \Sigma(12, 5)$ となる。以下同様に議論が進み $\Sigma \cong \Sigma(4k, 2k-1)$ となる。

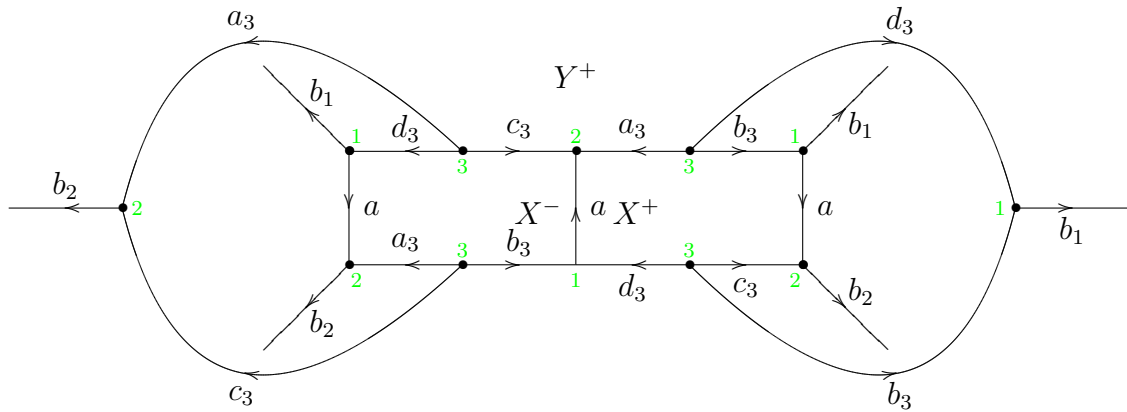
(C) 退化辺が存在しないが対隣接するとき：対隣接辺の端点も含めてすべての頂点が twin-vertex である。対隣接辺のラベルを a ，その端点のラベルを $1, 2$ とする。

$k = 2$ のときは X^+ のまわりは次図の様になる。このとき Y^- は自己隣接するので C -可約である。



$k = 3$ のとき，ラベル $1, 2$ 以外の頂点のラベルを 3 とし， 3 を始点とする 4 個の辺ラベルを a_3, b_3, c_3, d_3 とする。 ∂X^+ 上にこれらのラベル辺が存在するので，終点のラベルは $1, 2, 3$ のいずれかである。ラベル 3 頂点が終点のときは退化辺になるので，終点のラベルは $1, 2$ のいずれかである。

∂X^+ および ∂X^- 上にないラベル 1 頂点は 1 個であり，ラベル 2 頂点も同様である。よってこのとき Σ は次図の様であるか，次図で ∂X^\pm 上にないラベル a_3, b_3, c_3, d_3 辺をそれぞれラベル b_3, a_3, d_3, c_3 辺に入れ替えたものになる。 Σ には non-trivial 2-bridge が存在するので矛盾。この場合は起こらない。

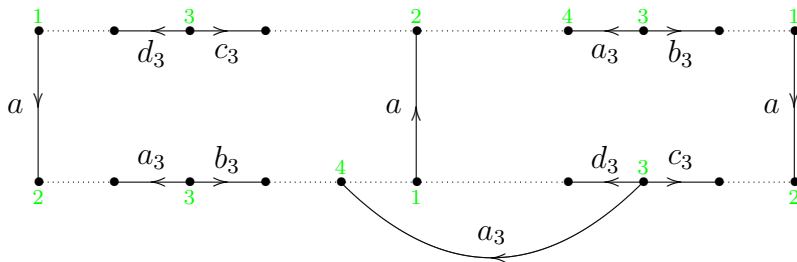


$k > 3$ の場合を考える。

前と同様に対隣接辺のラベルを a とし、その端点を 1, 2 とする。 ∂X^+ の頂点のラベルで 1, 2 以外のものを 1 つ固定して 3 とする。ラベル 3 頂点を始点とする辺ラベルを a_3, b_3, c_3, d_3 とする。

$\text{ch}(a_3, X^+) = 2$ なら X^+ はラベル a_3 辺で対隣接し、2 重対隣接する。よって $\text{ch}(a_3, X^+) = 1$ である。 b_3, c_3, d_3 も同様なので、 X^+ にはラベル a_3, b_3, c_3, d_3 辺が存在する。

この中に終点のラベルが 1, 2, 3 以外であるものが存在する。この頂点ラベルを 4 とし、4 頂点を終点とする辺ラベルを a_3 とする。 ∂X^+ の頂点はすべて twin-vertex なので、ラベル 4 頂点はすべて ∂X^+ または ∂X^- 上にある。



X^+ はラベル a_3 辺で対隣接しないので、ラベル a_3 辺の中に ∂X^+ にも ∂X^- 上にもない辺が存在する。両端点は $\partial X^+ \cup \partial X^-$ 上にある。両端点が共に ∂X^+ にあるときは non-trivial 2-bridge が存在する。両端点が X^- のときも同様である。このとき Σ は C -可約である。

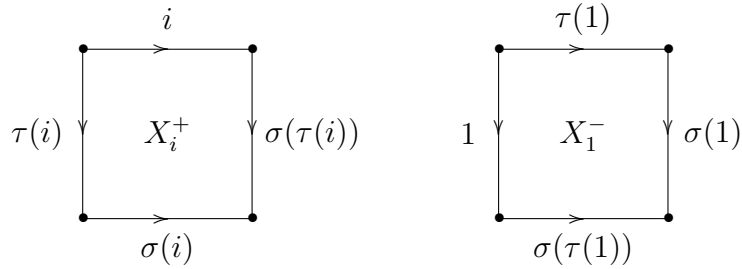
1 つの端点が ∂X^+ 上に、他の端点が ∂X^- 上にあるときは non-trivial 3-bridge が存在する。この 3-bridge は退化辺と交わらない。補題 1.5 より Σ は C -可約になる。これは矛盾。よって対隣接する DS-diagram は存在しない。

(D) 退化辺が存在せず対隣接しないとき：このときすべての頂点は twin-vertex であり、 X^+ の頂点のラベルと同じラベルをもつ頂点はすべて ∂X^+ 上か ∂X^- 上に

ある。よって X^+ の任意の頂点はある辺で X^- の頂点と結ばれている。即ち X^+ と X^- の間はすべて 4-gon である。

この形のグラフを持つ DS-diagram については [3] で論じたがここではグラフに関し制限をつけていた。ここでは制限をつけずに議論する。結論は Σ が C -既約のとき $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4k})$ である。

∂X^+ の辺のラベルを順に $1, 2, \dots, 2k$ とし等号は $\text{mod } 2k$ で考える。向きは次図左で左から右へついているものとする。 ∂X^+ の頂点と ∂X^- の頂点をつなぐ辺の向きはそろっているので、すべて ∂X^+ から ∂X^- への向きだとする。



∂X^+ とラベル i 辺を共有する 4-gon を X_i^+ とする。4-gon の辺のラベルは前図左の様だとしてよい。ここで σ, τ は S_{2k} ($2k$ 次の対称群) の元で、ある自然数 i_0 を用いて $\sigma(i) = i + i_0$ となっている。また $\tau(1) = j_0$ とおくと、 $\tau(i) = \sigma^{i-1}(j_0)$ である。

$i_0 = 1, j_0 = k + 1$ のとき $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4k})$ である。 $i = 2k - 1, j_0 = 2k$ のとき $\Sigma \cong \Sigma(4k, 2k - 1)$ である。 $\Sigma(Q_{4k}), \Sigma(4k, 2k - 1)$ 以外で DS-diagram のリスト ([7]) に最初に出てくる DS-diagram は K6-141 で $k = 6, i_0 = 5, j_0 = 3$ である。

j_0 はラベル 1 の選び方に依存し、ラベル 2 辺をラベル 1 辺に変更すると j_0 は $j_0 + i_0 - 1$ に変わる。 $\delta(i) = i + i_0 - 1$ とおく。

X_1^- はある X_i^+ と等しいので、 $i = \tau(1), \tau(i) = 1$ が成立する。 $\tau(1) = j_0$ より $i = j_0$ である。

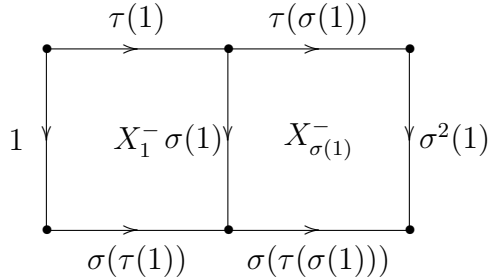
$$1 = \tau(j_0) = \sigma^{j_0-1}(j_0) = j_0 + (j_0 - 1)i_0$$

より $(j_0 - 1)(i_0 + 1) = 0$ すなわち $(j_0 - 1)(i_0 + 1)$ は $2k$ で割り切れる。

X_1^- と $X_{\sigma(1)}^-$ は隣接しているので $\tau(1) + 1 = \tau(\sigma(1))$ が成立する。

$$\tau(\sigma(1)) = \tau(i_0 + 1) = \sigma^{i_0}(j_0) = j_0 + i_0^2$$

より $i_0^2 = 1$ を得る。 $2k$ は偶数なので i_0 は奇数である。



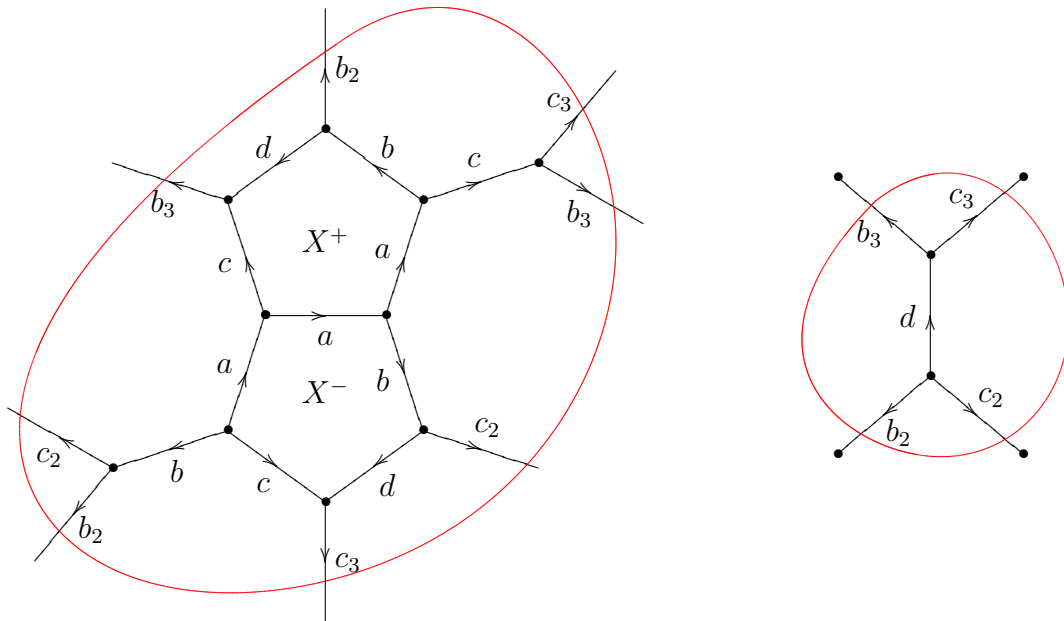
$j_0 = 1$ のとき X_1^+ には同じ始点をもつ 2 つのラベル 1 辺が存在するので矛盾。よって $j_0 \neq 1$ である。またラベル 1 の移動を考えると $\delta^i(j_0) = 1$ となる i も存在しない。

$i_0 = 1$ のとき、先ほど示した式より $2(j_0 - 1)$ が $2k$ で割り切れる。よって $j_0 = k + 1$ である。このとき $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4k})$ となる。

$i_0 = 2k - 1$ のとき $\delta(i) = i - 2$ である。 j_0 が奇数のとき $\delta^i(j_0) = 1$ となる i が存在するので矛盾。 j_0 が偶数のときは $j_0 = 0$ となる様に 1 の位置を選ぶことができる。このとき $\Sigma \cong \Sigma(4k, 2k - 1)$ となりラベル 0 辺は退化辺となるのでこの場合不適である。

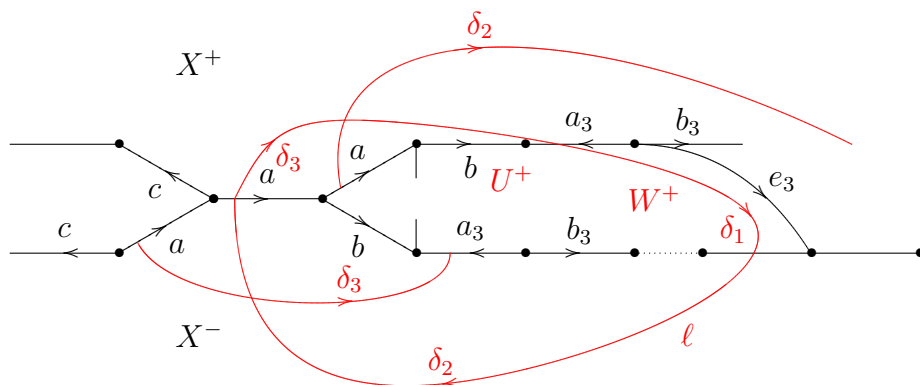
i_0 は奇数なので $2 < i_0 < 2k - 2$ が成立している。このとき連続する 2 つの 4-gon を含む 4-bridge は proper (今の場合 4-point) である。よって 4-bridge に含まれる X^+ の 3 つの頂点のラベルがすべて異なれば Σ は C -可約である。 X^+ にある 4-bridge 内の頂点に同じものがあるとすると、退化辺は存在しないので端の 2 つの頂点のラベルが同じである。すべての 4-bridge について端の 2 つの頂点のラベルが同じだと、 ∂X^+ は高々 2 種類のラベルしか含まないので $k \leq 2$ である。 $2 < i_0 < 2k - 2 \leq 2$ よりこの様な i_0 は存在しない。

[4] $\text{ch}(X^+) = \frac{k}{2k+1}$ のとき ; X^+ に (A) triplet-vertex が存在するとき, (B) 対隣接しない退化辺が存在するとき, (C) 退化辺が存在しないが対隣接するとき, (D) 退化辺が存在せず対隣接しないとき, の 4 つの場合に分ける。

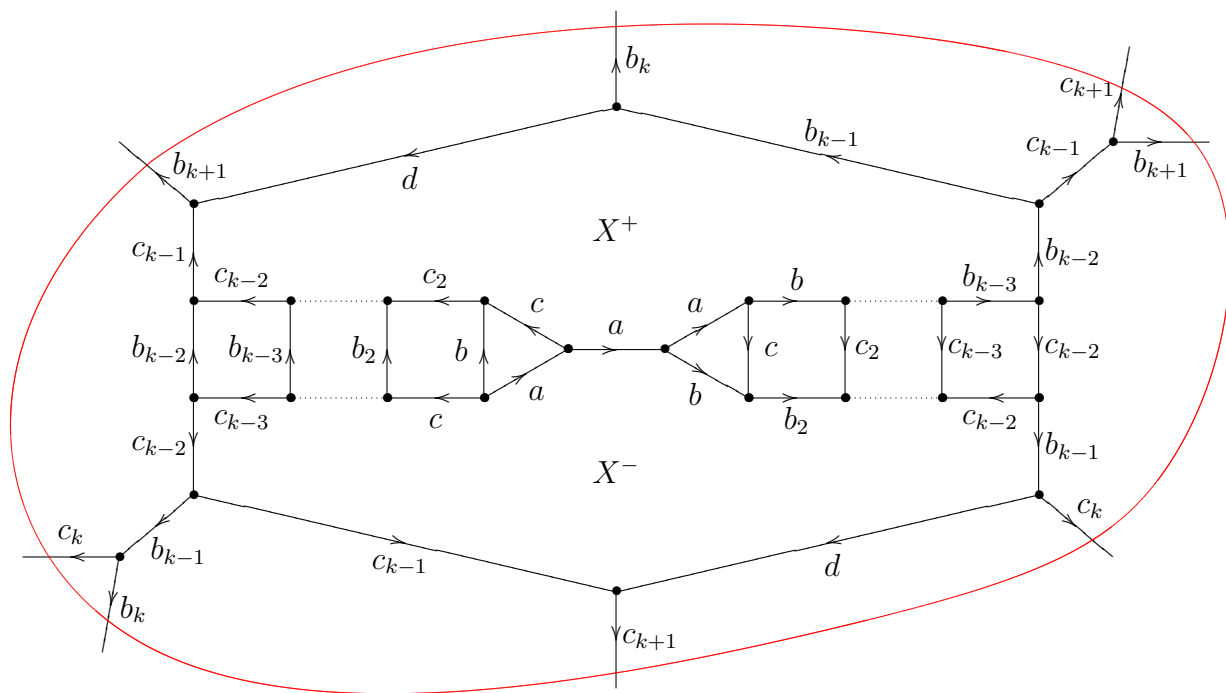


(A) triplet-vertex が存在するとき : triplet-vertex は 3 個 1 組なので $k > 1$ である。他に退化辺が存在すると矛盾なので、 $k = 2$ の時は前図の様な部分を含む。これを $T_2^{(2)}$ とすると、 $\Sigma \cong T_2^{(2)} \cup D$ と torus sum になっている。

$k > 2$ とする。退化辺のラベルを a , 退化辺の端点のラベルを 1 とする。ラベル 1 頂点に接続する辺のラベルを b, c とし, ラベル b, c 辺の端点を $2, 2'$ とする。このとき $2 = 2'$ が成立することを示す。



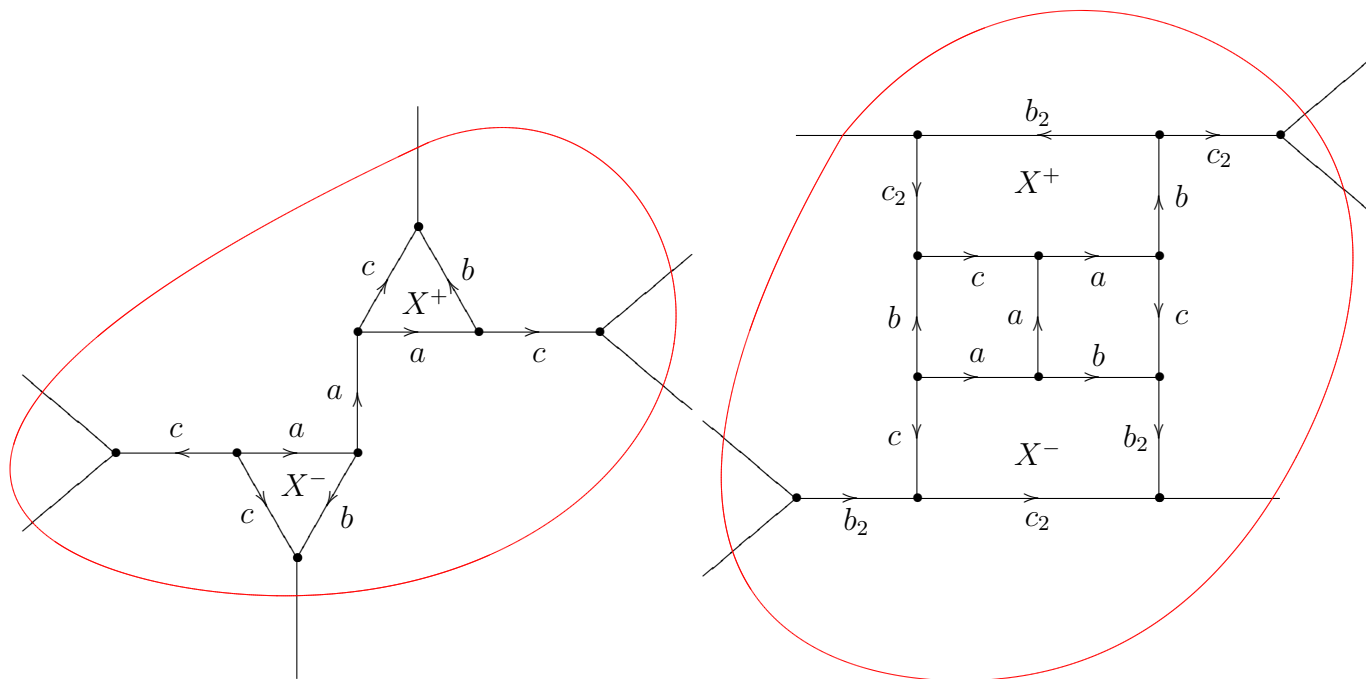
$2 \neq 2'$ とする。ラベル 2 頂点とラベル $2'$ 頂点の一方が multi-vertex のとき前の議論と同様に矛盾なのでともに uni-vertex である。 X^+ の uni-vertex は 2 つなので他の頂点は multi-vertex である。 ∂X^+ 上でラベル 2 頂点と隣接する頂点のラベルを 3 とする。ラベル 3 頂点を端点とする辺ラベルを a_3, b_3, c_3, d_3 とすると前図の様になっている。図でラベル e_3 と書いてあるラベルは c_3 または d_3 である。すなわち ∂X^+ 上のラベル 3 頂点を ∂X^- 上の頂点につなぐ辺が存在する。



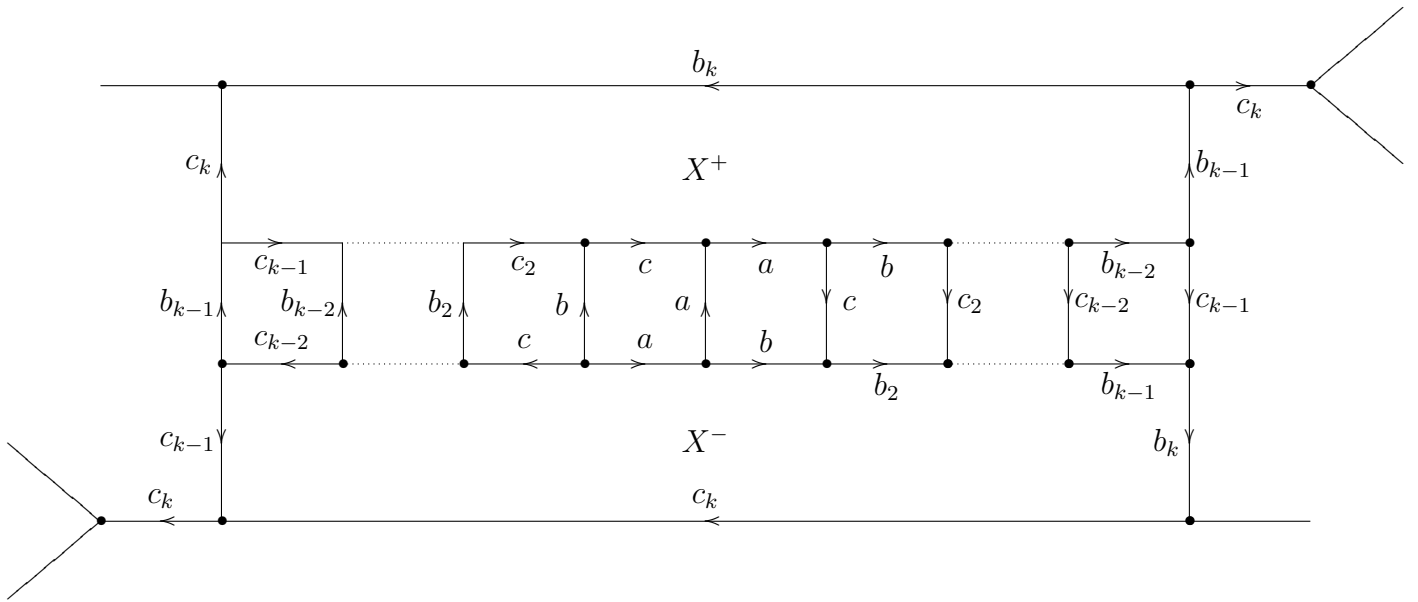
よって 4-point 3-bridge l が存在する。 W^+ は l で分離されるので 4-point である。 よって ∂X^+ のラベル 2 頂点から ∂X^- の頂点をつなぐ辺が存在する。 このとき U^+ は 5-point 以上で l で分離される。 Σ が C -既約になるので矛盾であり $2 = 2'$ となる。 この議論は $3, 4, \dots$ と続けていけるので一般の k について前図のようになっている。 これを $T_k^{(2)}$ と名付けると $\Sigma = T_k^{(2)} \cup D$ と torus sum に表される。

(B) 対隣接しない退化辺が存在するとき: $k = 1$ のときは次図左の様になっている。 これを $T_1^{(3)}$ とすると $\Sigma = T_1^{(3)} \cup D$ と torus sum で表される。

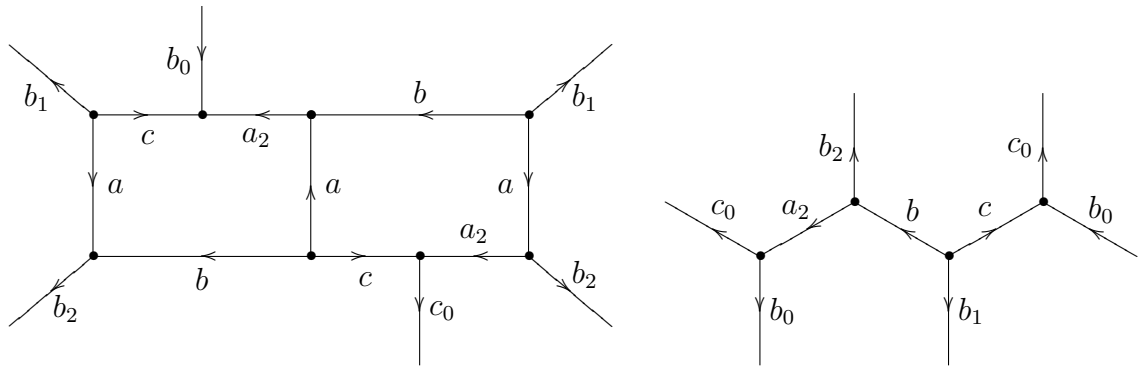
$k = 2$ のとき $2 \neq 2'$ とすると退化辺がもうひとつ存在するので矛盾。 よって $2 = 2'$ であり、次図右の様である。 これを $T_2^{(3)}$ とすると $\Sigma = T_2^{(3)} \cup D$ と torus sum で表される。



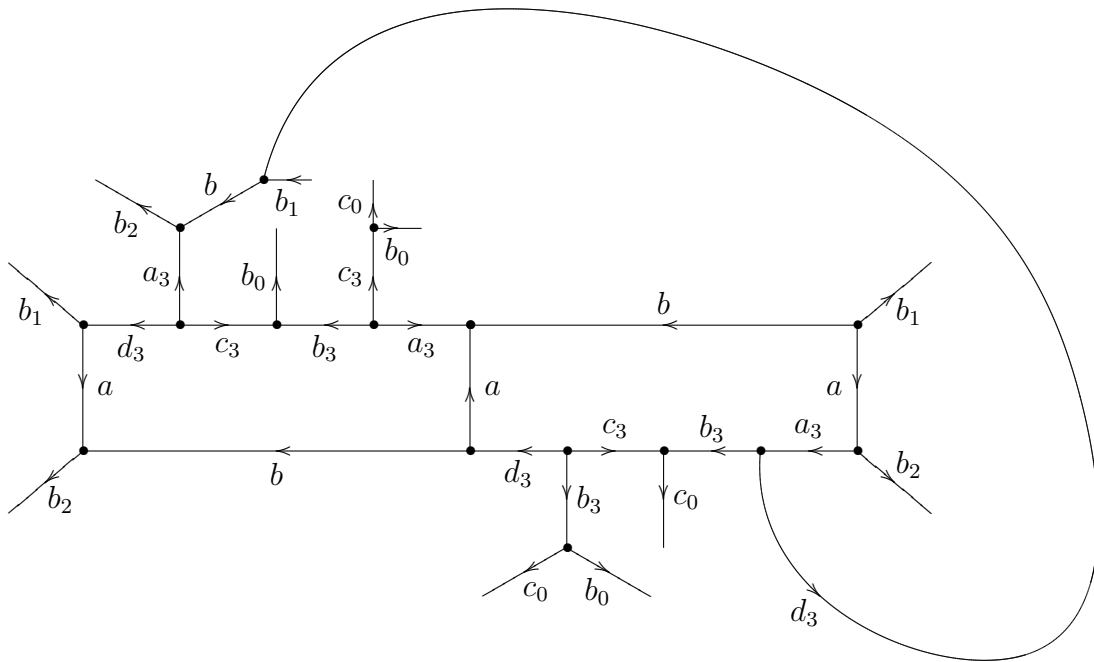
$k > 2$ の場合も前の議論と同様に $2 = 2'$ が示される。 $3, 4, \dots$ も同様に示されるので、一般の k については次図を $T_k^{(3)}$ とすると $\Sigma = T_k^{(3)} \cup D$ と torus sum で表される。



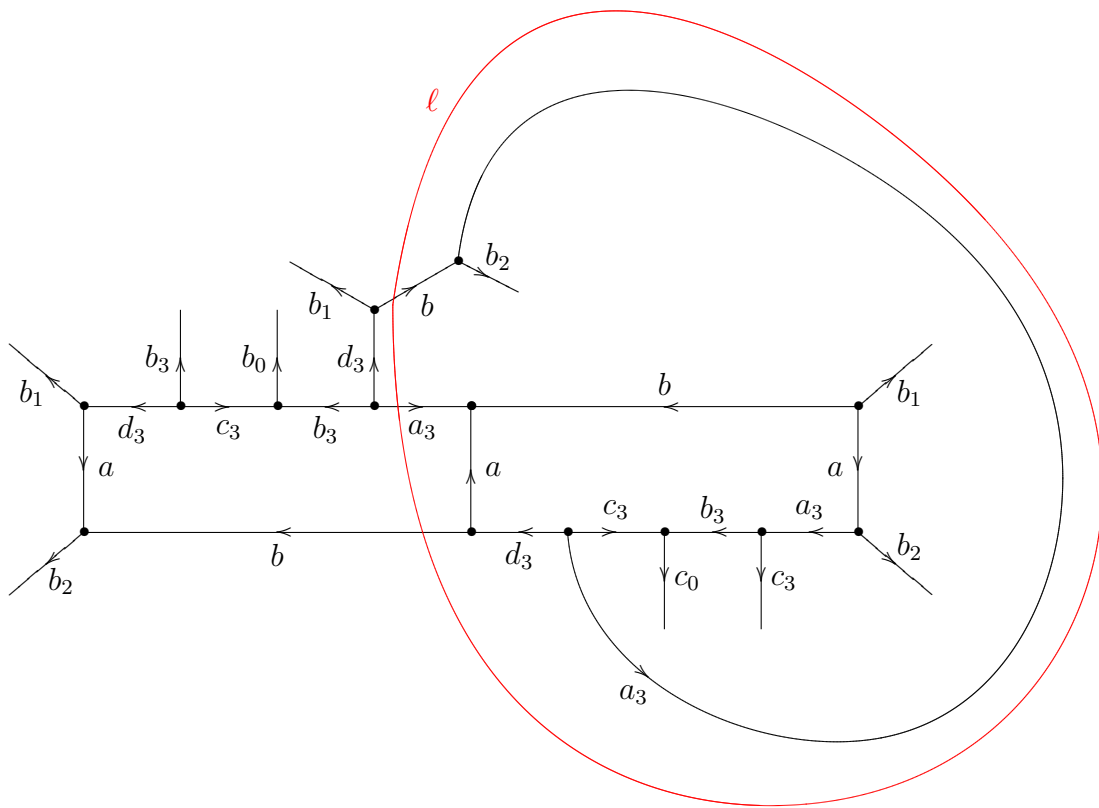
(C) 退化辺が存在しないが対隣接するとき : $k = 1$ のときは退化辺が存在するので $k > 1$ である。 $k = 2$ のときは次図を E_1 とおくと $\Sigma \cong E_1 \cup D$ の形の torus sum になっている。



$k = 3$ のとき次図の diagram を E_2 とおく。 E_2 以外は C -可約であることを示す。

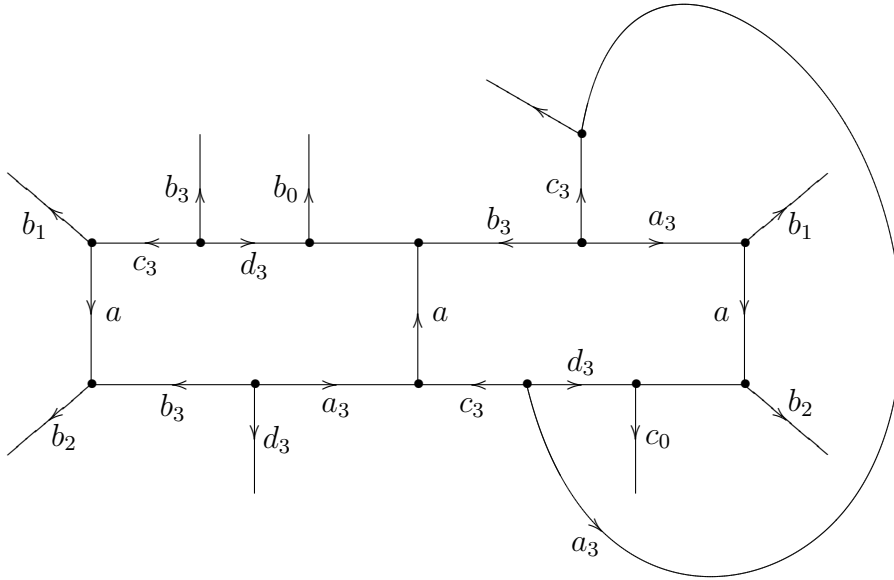


X^+ の境界の辺ラベル, 頂点ラベルが E_2 と同じで, ∂X^+ から出る辺のラベルが異なるときは non-trivial 3-bridge ℓ が存在する。この bridge は退化辺と交わらないので Σ は C -可約である。

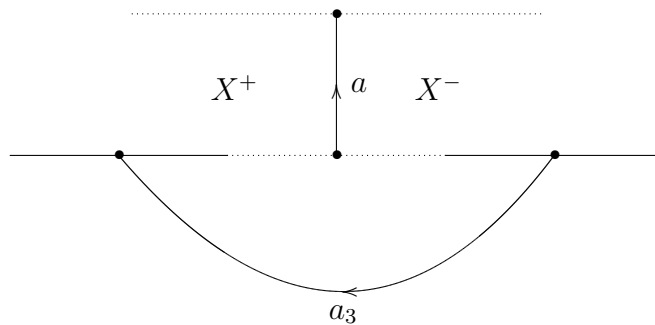


X^+ の境界の辺ラベル, 頂点ラベルの配置が異なる場合は次図の境界の様な配置
または対称移動させた配置になっている。

境界から出る辺のラベルが次図と異なるものも含めていずれの場合も退化辺と
交わらない non-trivial 2-bridge が存在するので C -可約である。

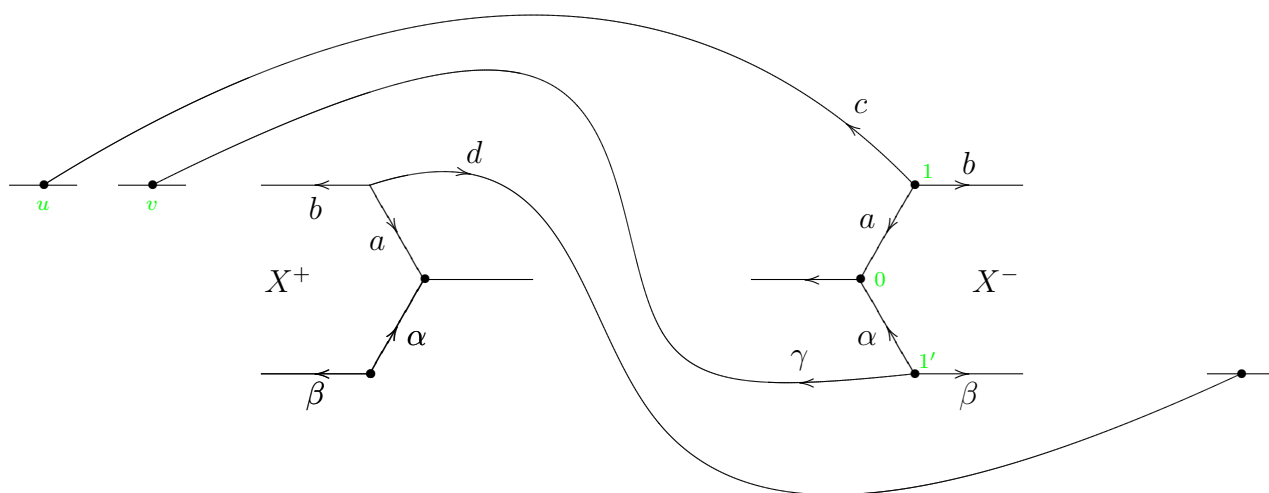


$k > 3$ とする。ラベルが 1, 2 以外の multi-vertex はすべて $\partial X^+ \cup \partial X^-$ 上にある。
よって境界上の辺で端点が共に対隣接辺の端点以外の multi-vertex であるものが存
在する。この辺のラベルを a_3 とし, 端点のラベルを 3, 4 とすると ∂X^+ と ∂X^+ また
は ∂X^- をつなぐラベル a_3 辺が存在する。このとき退化辺と交わらない non-trivial
2-bridge または non-trivial 3-bridge が存在するので Σ は C -可約である。

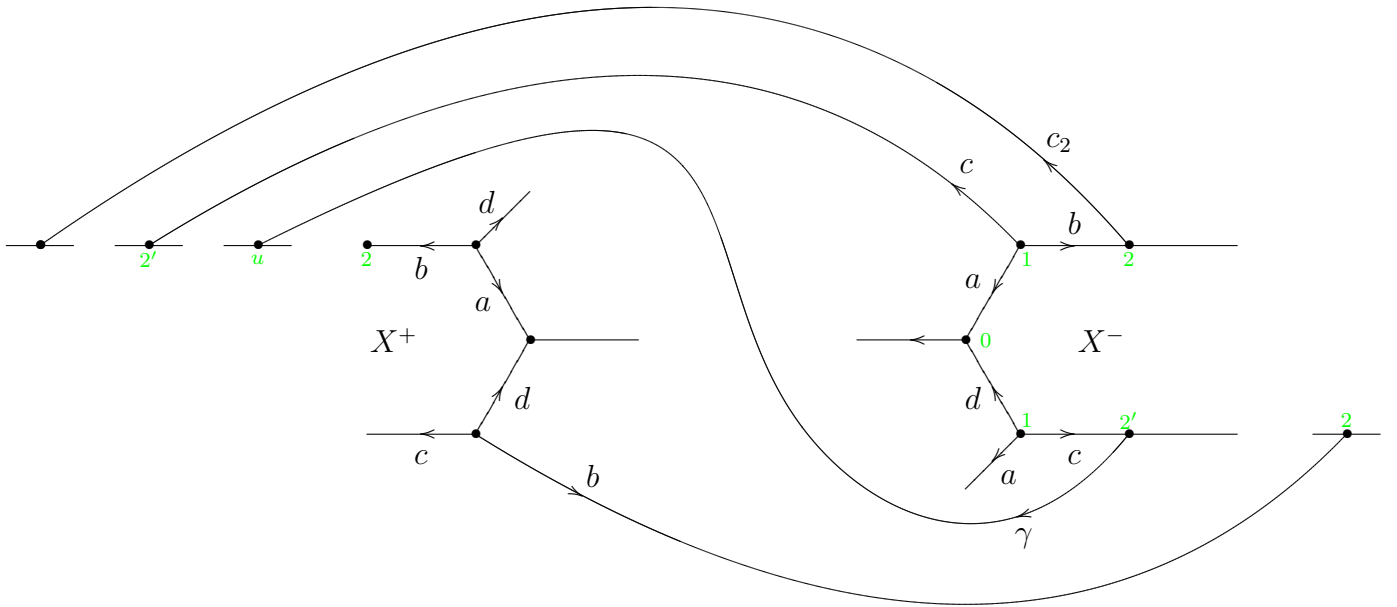


(D) 退化辺が存在せず対隣接しないとき : $k = 1$ のときは退化辺が存在するので
 $k > 1$ とする。 X^+ の uni-vertex のラベルを 0 とし, ラベル 0 頂点と隣接する 2 つ
の頂点のラベルをそれぞれ 1, 1' とする。 $1 = 1'$ を示すため $1 \neq 1'$ を仮定する。

1を始点とする辺ラベルを a, b, c, d , $1'$ を始点とする辺ラベルを $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。ただし a, α は端点が0となるラベルとし, ∂X^+ 上でラベル a 辺とラベル b 辺, ラベル α 辺とラベル β 辺が隣接しているとする。



ラベル c 辺の終点のラベルを u , ラベル γ 辺の終点のラベルを v とする。ラベル $1, 1'$ を端点のラベルとして持たない ∂X^+ の辺の端点は multi-vertex で, ∂X^+ 上にも ∂X^- 上もないラベル辺は ∂X^+ と ∂X^- をつないでいる。よって ∂X^+ のラベル u 頂点とラベル v 頂点の間に頂点があったとしても, それはラベル 1 頂点かラベル $1'$ 頂点である。よってラベル u 頂点とラベル v 頂点の間にある頂点は高々2個である。2個ある場合は non-trivial 3-bridge が, 1個の場合は non-trivial 2-bridge が, 0個の場合は 1-bridge が存在する。3-bridge の場合 bridge と交わる辺の端点のラベルは0なので退化辺ではない。よって C -可約になり矛盾。 $1 = 1'$ が成立する。



終点のラベルが0である a 以外のラベル d とし、ラベル b 辺の終点のラベルを 2 、ラベル c 辺の終点のラベルを $2'$ とする。 $2 \neq 2'$ と仮定する。

このとき前図の様である。 X^- のラベル $2'$ 頂点から出る辺のラベルを γ とし、その終点のラベルを u とする。 ∂X^+ のラベル $2'$ 頂点とラベル u 頂点の間には頂点は存在しない。このとき 2-bridge が存在し C -可約になる。よって $2 = 2'$ である。

3, 4, ... と同様の議論をしていくと最後に退化辺がでてくるので矛盾。この場合も起こらない。

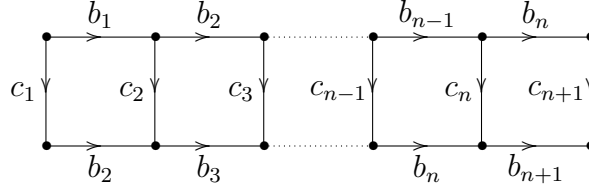
以上で命題の証明が終わる。 ■

4 重複度が $1/2$ に近い場合

p を自然数とし、 $\text{ch}(\Sigma) = \frac{k-p}{2k}$ または $\text{ch}(\Sigma) = \frac{k-p}{2k+1}$ の場合を考える。 p を大きくすると k が小さいとき、前節でてきた E_1, E_2 の様な例外型が多く出てくるなどして分類は一般に複雑で困難である。

そこで k が十分大きいとき、すなわち重複度が $\frac{1}{2}$ に十分近い場合を考察する。

下図または対称移動して得られる diagram を連続する 1-slip 4-gon と呼び、 n をその長さという。このとき次の命題が成立する。



命題 4.1 自然数 p を一つ固定したとき, 十分大きな自然数 k を取ると次が成立する。 C -既約な DS-diagram Σ の重複度が $\text{ch}(\Sigma) = \frac{k-p}{2k}$ または $\text{ch}(\Sigma) = \frac{k-p}{2k+1}$ のとき, 重複度最大の面 X^+ に対し X^+ と X^- の間に十分長い連続する 1-slip 4-gon が存在する。

証明 ∂X^+ 上で隣接する頂点がすべて対隣接辺の端点でない twin-vertex である様な twin-vertex を pure twin-vertex と呼ぶ。 triplet-vertex は高々1組であり, uni-vertex に隣接する vertex は高々 $4(p+1)$ 個なので, k を十分大きくとると, ∂X^+ 上に十分長く連続的に隣接する pure twin-vertex が存在する。 pure twin-vertex を始点とする ∂X^+ 上にない辺の終点は ∂X^- 上にあるので, 連続する pure vertex のまわりはラベルを無視すると連続する 4-gon になっている。

∂X^+ のラベルを b_1, b_1, \dots, b_{n+1} とする。 $i = 1, \dots, n$ に対し b_i をラベルにもつ 4-gon を X_i^+ とし, 辺 $X_i^+ \cap \partial X^-$ のラベルを d_i , ∂X^+ とから ∂X^- を結ぶ辺のラベルを c_i, c_{i+1} とする。

$d_i = b_j$ となる i, j が存在しないときは, 連続する 4-gon 2 個を含む 4-bridge が proper になるので $\Sigma(Q_{4k})$ のところで議論したのと同様の議論ができ, Σ は C -可約になる。

よって $d_i = b_j$ となる i, j が存在する。 よってある整数 i_0 が存在して, 4-gon のラベルは $d_i = b_{i+i_0}$ となっている。

$|i_0| > 2$ のときは $\Sigma(Q_{4k})$ の議論と同様に C -可約が示される。

$i_0 = 1$ または $i_0 = -1$ のときは $X_1^+, X_2^+ \dots, X_n^+$ は連続する 1-slip 4-gon である。

$i_0 = 2$ のとき X_i^- と X_{i+2}^- は隣接している。 $\beta_i = c_{2i-1}$ とおき, β_i を b_i に置き換えて議論することができる。 このとき i_0 に対応する整数 i_0 が存在するとき $|i_0| > 2$ であることが分る。 $i_0 = -2$ のときも同様に議論ができる。 よって命題は示された。 ■

参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録

- [4] Kouno, M, generalized DS-diagram の C -変形とリフトについて, 箱根セミナー 2009 記録
- [5] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math. 34 (2011) 165–183
- [6] Kouno, M, DS-knot 予想について, 箱根セミナー 2017 記録
- [7] <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/DS-diagram/DS-diagram.html>
- [8] Yokoyama, K, Lens space の DS-diagram について, 数理解析研究所考究録 563 (1985)
- [9] Yokoyama, K, On DS-diagram of lens space, Topology and Computer Science, 紀伊國屋書店, 171 192 (1987)