

DS-knot 予想について (3)

河野正晴 (北見工業大学)

1 予想と現状

この note は「DS-knot 予想について」([7]), 「DS-knot 予想について (2)」([9]) の続きである。DS-knot 予想とは次であった。

DS-knot 予想

C -既約な DS-diagram の DS-knot は homotopic zero ではない。

DS-knot 予想の結論を「trivial knot でない」に弱めた予想を弱い Version の DS-knot 予想と呼ぶ。[7] では少し強い仮定のもと (強 C -既約) でこの弱い Version の DS-knot 予想の証明を試みた。ここではその続きを考える。多様体はすべて向き付け可能とする。

用語・定義等は [1], [2], [6], [8] を参照のこと。

状況設定は [7], [9] と同様である。即ち反例があるとして議論を進める。

強 C -既約な DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ に trivial な DS-knot k を含むものが存在すると仮定する。 k は trivial なので $M = M(\Sigma)$ 内で k を境界にもつ 2-disk D が存在する。 (Σ, k, D) はこの様なものの中で複雑度 $c(\Sigma, k, D) = (c(\Sigma), c(D))$ が最小なものとする。 $L = f^{-1}(D) \cap S^2$ は 1 個の arc と何個かの loop からなるが、これを [9] では node と呼んだ。以下 node は loop 型のみを扱うので、node と書いたら loop 型を仮定する。

[7] では次を示した。

- (1) $T = D \cap f(S^2)$ は連結である。
- (2) U を境界 ∂D と隣接しない $D - T$ の成分とすると \bar{U} は 2-disk である。
- (3) L の各 node は 1-node, 2-node, 3-node および 4-node ではない。
- (4) 5-node は normal である。

(5) L_1 を 5-node, L_2 を normal node (node が bridge として normal) とすると, L_1 と L_2 がラベル共有することはない。特に 2 つの 5-node がラベル共有することはない。

(6) node の中に 5-node は存在する。

[9] では innermost な 6-node について考察した。

この note では 5-node について考察する。そのために次の節ではいくつかの補題を用意する。

2 いくつかの補題

この節では DS-diagram は複雑度最小の反例ではなく C -既約性のみを仮定する。

補題 2.1 C -既約な DS-diagram Σ に non-trivial 2-bridge が存在すれば $\Sigma \cong \Sigma(p, 1)$ である。

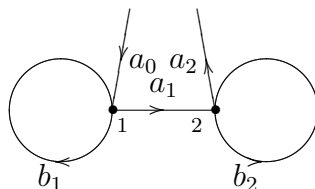
この補題は [6] の命題 5.1 を少し改良したものである。証明は [6] 命題 5.1 の証明の図を見れば分かる ([6] を書いたときこれに気付かなかった不明を恥じています)。ここで $\Sigma(p, q)$ は lens space $L(p, q)$ の横山の標準形 ([11],[12]) である。

補題 2.2 C -既約な DS-diagram に non-trivial 3-bridge が存在すれば, non-trivial 2-bridge が存在するか, bridge と交わる Σ の辺の 1 つは退化辺である。同じラベルの退化辺 3 つは連続しているが, 交わる退化辺は真ん中の辺である。

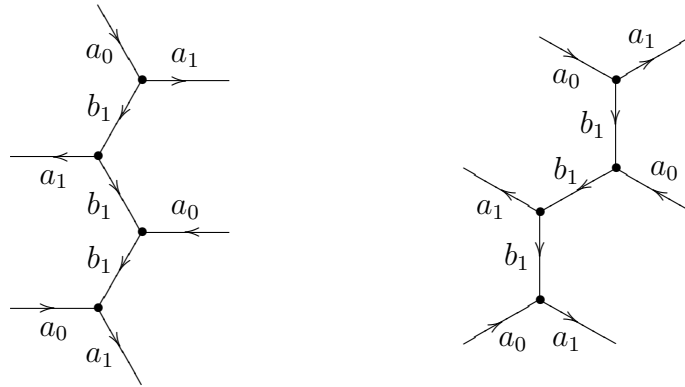
特に C -既約な DS-diagram には非退化 3-gon が存在しない。

この補題は [6] の命題 6.1 の弱い version である。

補題 2.3 C -既約な DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ の $f(G)$ が 1 つの辺で接続する 2 つの退化辺を含めば $\Sigma(5, 1)$, $\Sigma(7, 2)$ または $L(8, 3)$ である。



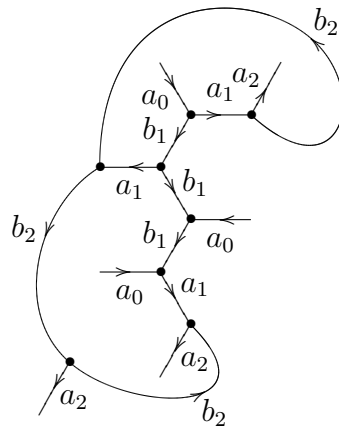
$f(G)$ (の一部) が前図の様になっているとする。 Σ は C -既約なので DS-diagram 上で 4 つのラベル 1 頂点は 3 つのラベル b_1 辺によって結ばれている。すなわち次図の様になっている。



DS-diagram に図右の部分が存在するとき，その部分を図左に変えた DS-diagram も存在する。この変形を switch と呼び，この逆変形も switch と呼ぶ。

図左から得られた DS-diagram を switch すると図右から得られる DS-diagram が出てくる。よって我々は図左で議論をする。

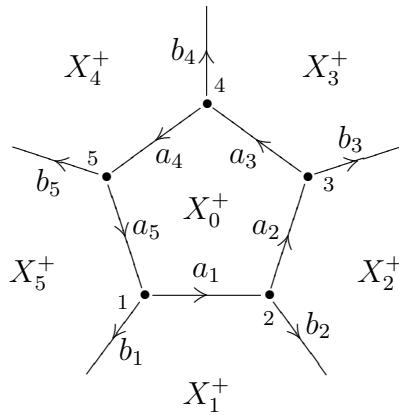
ラベル b_2 辺も退化辺なので 4 つのラベル 2 頂点を結んでいる。ラベル 2 頂点の 3 個はラベル a_1 辺の端点である。ラベル b_2 を図に書き入れる。いくつかの場合があるが 1 つの場合のみ描くと例えば次図の様になっている。



DS-diagram にはラベル a_0 辺およびラベル a_2 辺と交わる 3 つの 2-brige が存在する。 Σ は C -既約なのでこれらの 2-bidge は trivial である。すなわちラベル a_0 辺とラベル a_2 辺は同じ辺であり， Σ の頂点数は 2 である。この図の場合 Σ は非退化 2-gon をふくむので C -既約ではない。

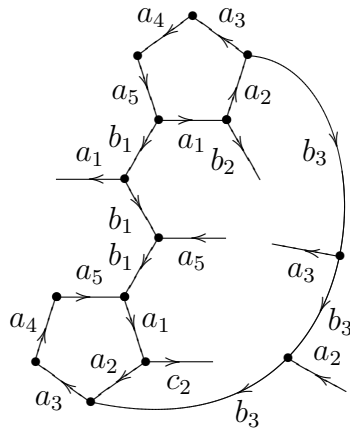
他の場合も同様に頂点数が 2 であることが分かり， $\Sigma(5, 1), \Sigma(7, 2), \Sigma(8, 3)$ のいずれかになる。

補題 2.4 C -既約な Σ に proper 5-gon が存在し，その 5-gon に退化辺が 2 つ隣接しているとき Σ は $K5 - 35, K5 - 36, K5 - 38$ のいずれかである。 $K5 - *$ がどのような DS-diagram であるかは [10] を参照のこと。



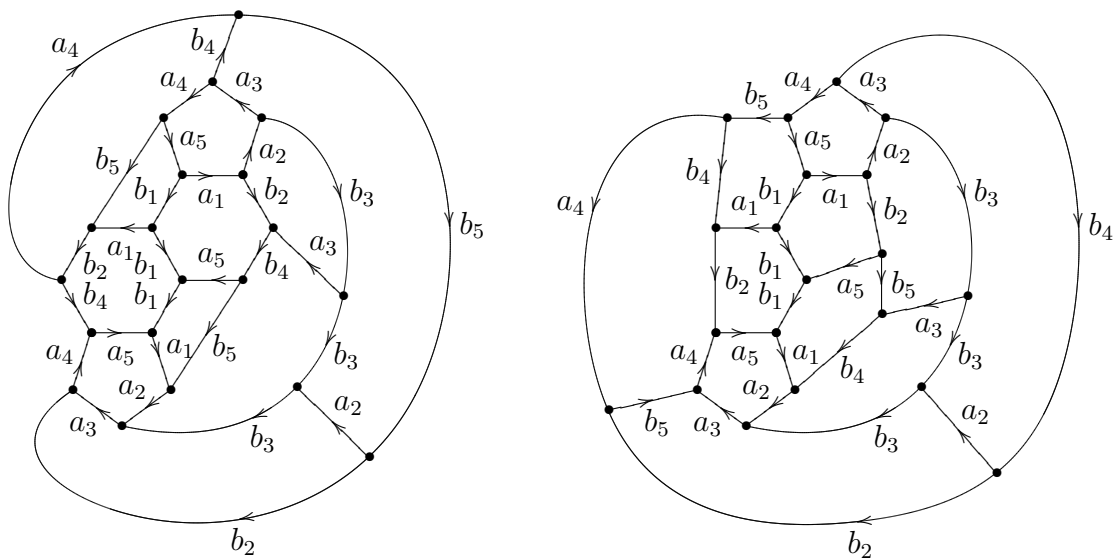
以下 proper な 5-gon を X_0^+ とする。5-gon の頂点のラベルを順に $1, 2, \dots, 5$ としラベル i 頂点を始点とする 5-gon の辺のラベルを a_i とする。ラベル i 頂点を始点とするラベル a_j 辺以外の辺のラベルを b_i とする。 X_0^+ にラベル a_i 辺で隣接する面を X_i^+ とする。

ラベル b_1 辺が退化辺とする。補題 2.3 よりラベル b_2, b_5 辺は退化辺ではない。対称性よりラベル b_3 辺が退化辺であるとしてよい。このとき DS-diagram は次図またはこの DS-diagram から 1 回または 2 回 switch したものである。

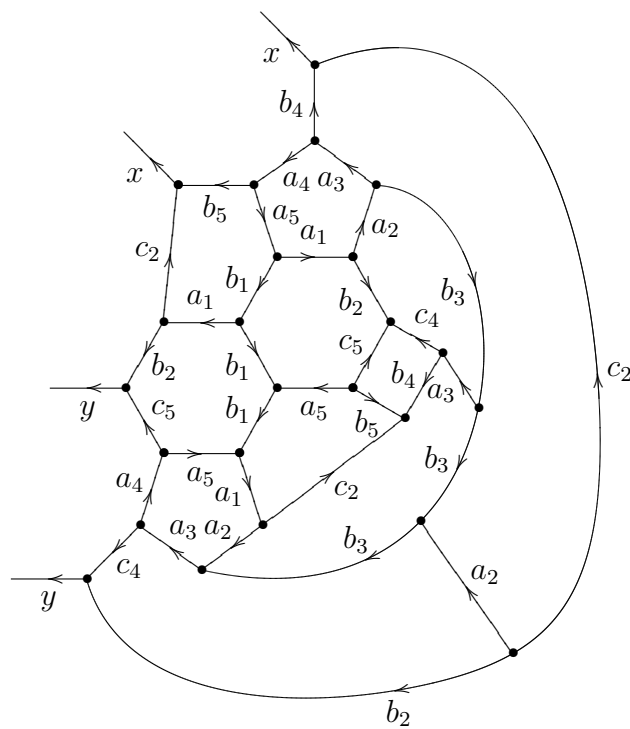


この DS-diagram には 4-bridge が存在するが、この bridge は proper である。

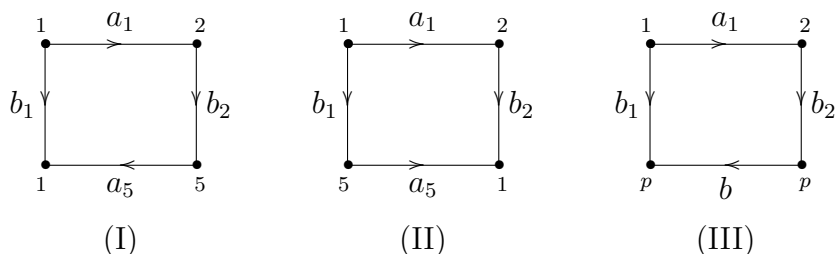
最初にこの bridge が trivial な場合を考える。trivial な 4-bridge の内部には頂点が 0 個または 2 個存在するが、bridge の内部にラベル 5 頂点が存在するので頂点は 2 個である。このとき DS-diagram を完成させると次図のようになる。次図の DS-diagram は $K5 - 35$ および $K5 - 38$ である。



次に 4-bridge が trivial でない場合を考える。4-bridge が normal でない場合は C -既約ではないので 4-bridge は normal である。このとき次図の様になっており，ラベル x 辺で自己隣接する面が存在する。よって DS-diagram は C -既約でない。



以上により得られる DS-diagram は $K5-35, K5-38$ を switch したものに限る。よって DS-diagram は $K5-35, K5-36, K5-38$ である。



上図左またはその対称形 (ラベル b_2 辺が退化辺) をタイプ (I) と呼ぶ。上図中またはその対称形をタイプ (II), 上図右をタイプ (III) と呼ぶ。

補題 2.5 proper 5-gon に隣接する X_1^+ が 4-gon のとき X_1^+ は, proper, タイプ (I), タイプ (II) またはタイプ (III) である。

X_1^+ が proper でないとする。 X_1^+ にラベル 1 頂点およびラベル 2 頂点が 1 個しかないときタイプ (III) である。

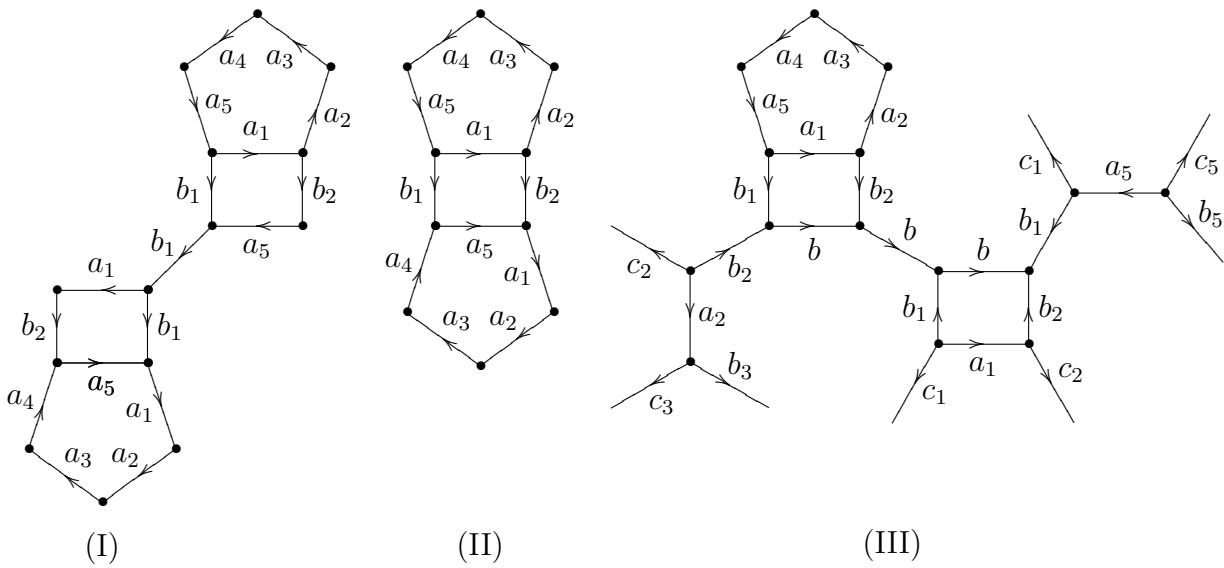
X_1^+ にラベル 1 頂点が 2 個, ラベル 2 頂点が 2 個存在するとき $f(G)$ において a_1, b_1, b_2 は頂点 1 と頂点 2 を結ぶ 3 重辺である。 [3] 補題 3.5 より Σ は C -既約ではない。

ラベル 1 頂点またはラベル 2 頂点が 2 個存在するが, 対称性よりラベル 1 頂点が 2 個存在するとする。

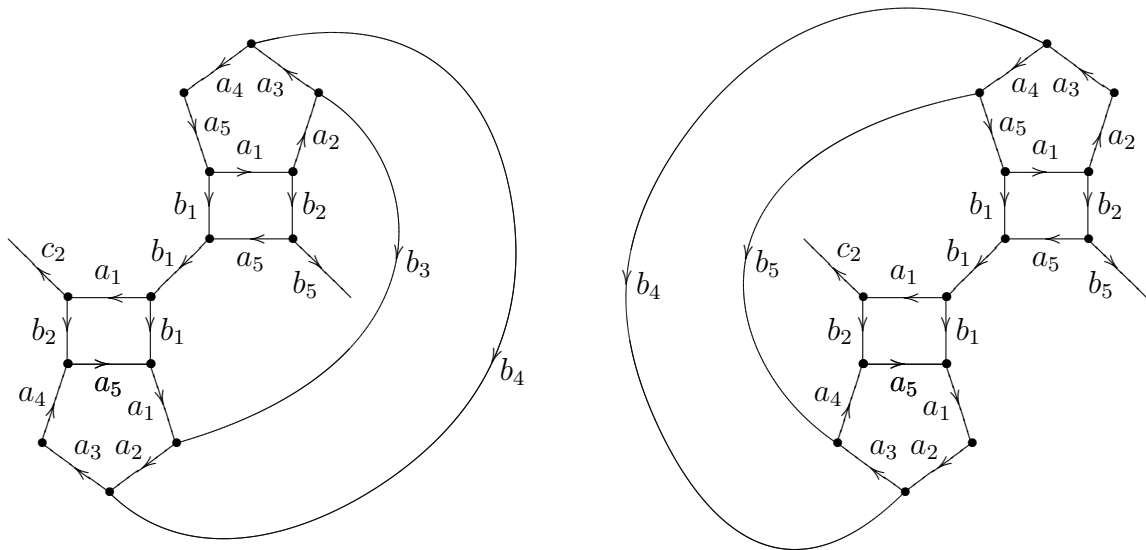
ラベル b_1 辺が退化辺のときは (I) となる。ラベル b_1 辺が退化辺でないときは, ラベル 1 頂点に接続する辺のラベルは a_1, a_5, b_1, b_2 であることから (II) であることが分かる。

補題 2.6 DS-diagram に proper 5-gon が存在し, 2 つ以上の X_i^+ が non proper のとき $K5-35, K5-36, K5-38, K6-105$ のいずれかである。

タイプ (I), (II), (III) のまわりを描くと次図の様である。

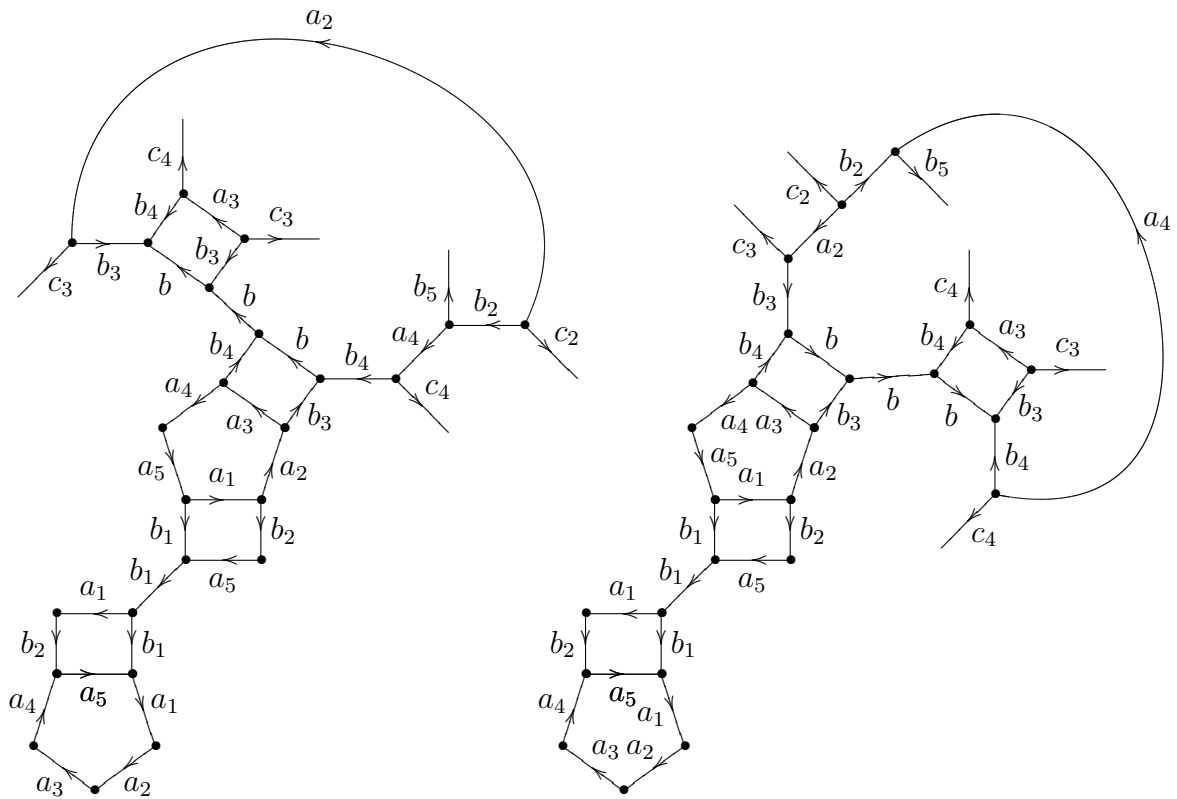


タイプ (I) が2つあるとき補題 2.4 より $K5 - 35, K5 - 36, K5 - 38$ である。
 タイプ (I) が1つのとき 4-gon は X_1^+ で前図の様だとする。
 もう一つのタイプが (II) の場合を考える。 X_2^+ および X_5^+ がタイプ (II) というこ
 とはない。 X_3^+ および X_4^+ がタイプ (II) のときは次図の様になる。ラベル b_5 辺ま
 たはラベル c_2 辺と交わる 1-bridge が存在するので C -既約でない。

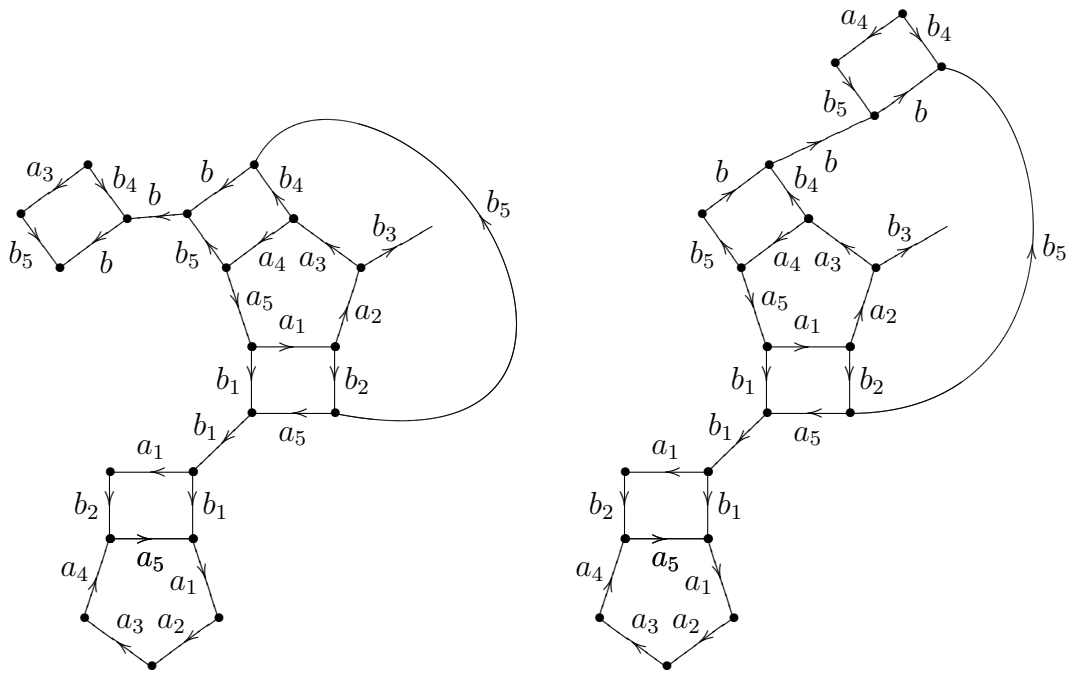


もう一つのタイプが (III) の場合を考える。 X_2^+ および X_5^+ がタイプ (III) ということはない。

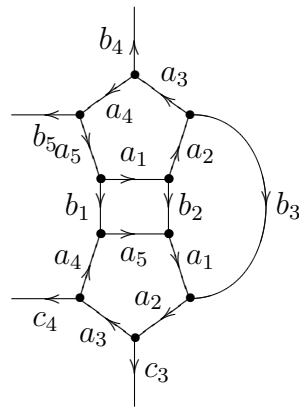
X_3^+ がタイプ (III) のときは次図のようになる。図にある様に DS-diagram には 3-bridge が存在する。この 3-bridge が non-trivial のときは補題 2.2 より矛盾。よって 3-bridge は trivial である。trivial のときラベル a_3 を 1 辺とする非退化 3-gon が存在しやはり C -既約でない。



X_4^+ がタイプ (III) のときは次図のようになる。図にある様に DS-diagram には 1-bridge が存在するので C -既約ではない。

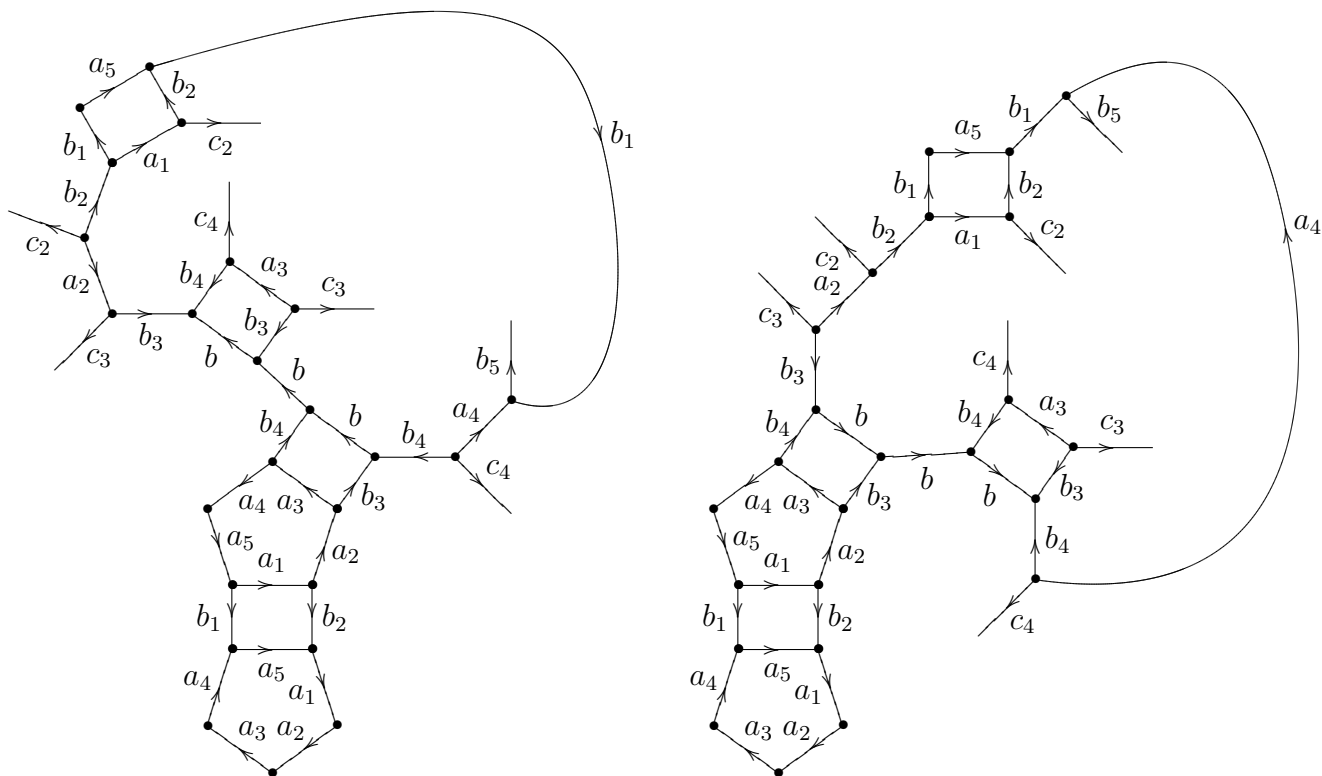


タイプ (II) が2つ存在するときを考える。1つが X_1^+ とする。 X_3^+ がタイプ (II) のとき X_2^+ がタイプ (II) である。 X_4^+ がタイプ (II) のとき X_5^+ がタイプ (II) である。対称性より X_2^+ がタイプ (II) とする。このとき次図の様に 3-bridge が存在するので補題 2.2 より DS-diagram は C -既約でない。

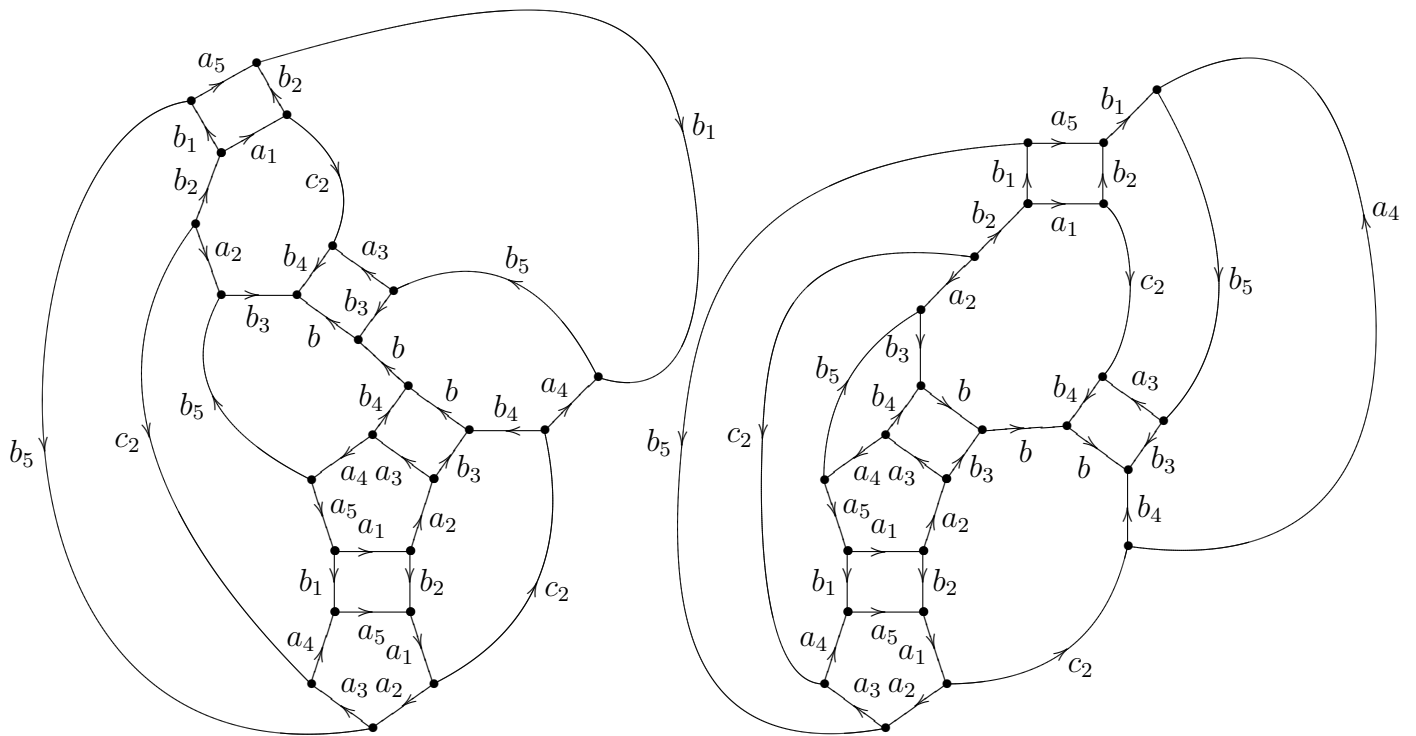


タイプ (II) とタイプ (III) が存在するときを考える。 X_1^+ がタイプ (II) とする。 X_2^+ と X_5^+ はタイプ (III) にはならない。最初に X_3^+ がタイプ (III) のときを考える。このとき次図の様になっている。いずれの場合も DS-diagram には 4-bridge が存在する。この 4-bridge は proper である。

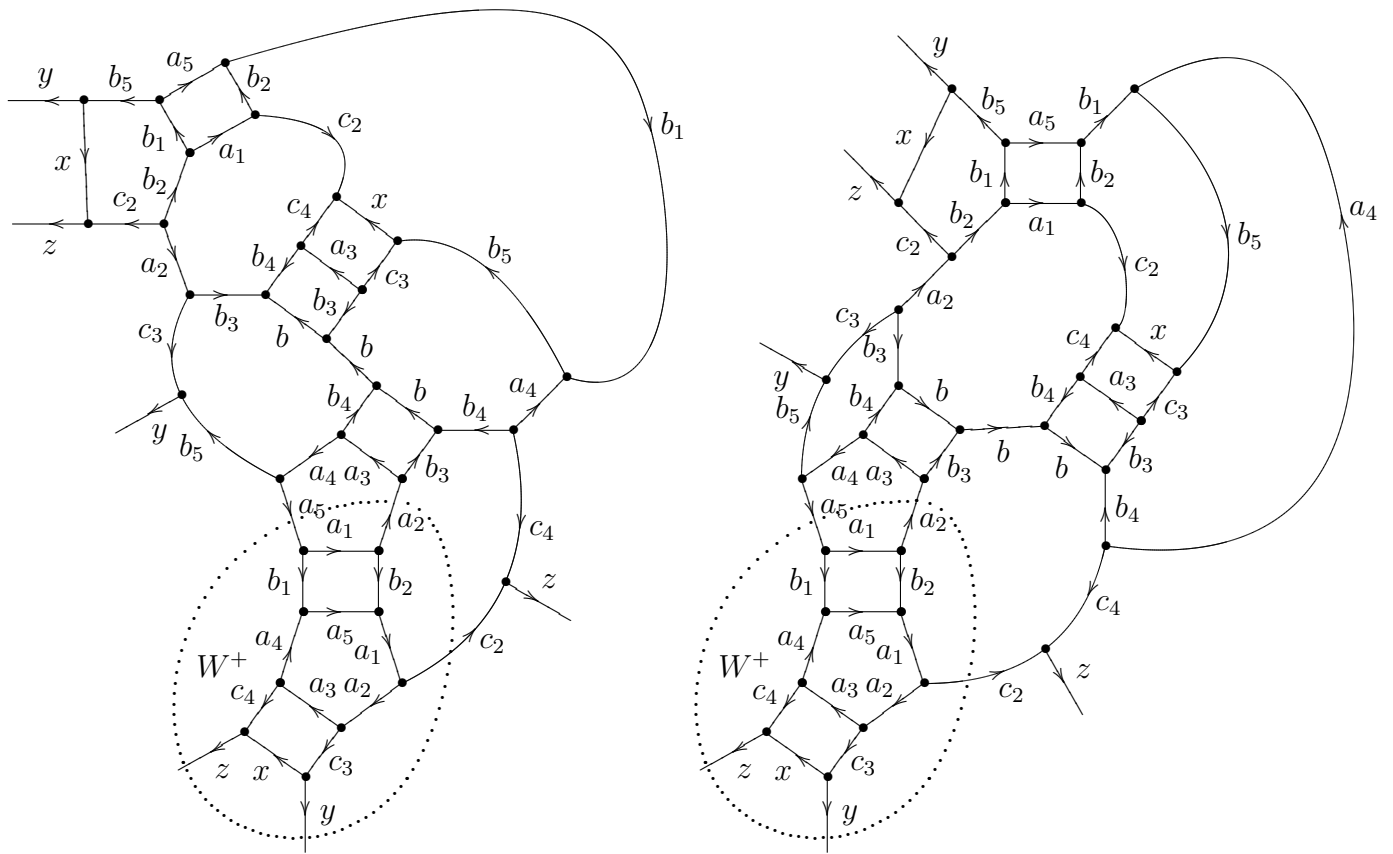
4-bridge が non-trivial なとき 4-bridge で S -move して得られる DS-diagram には 4-bridge で分離される 5-point 以上の面が存在するよって DS-diagram は C -既約でない。



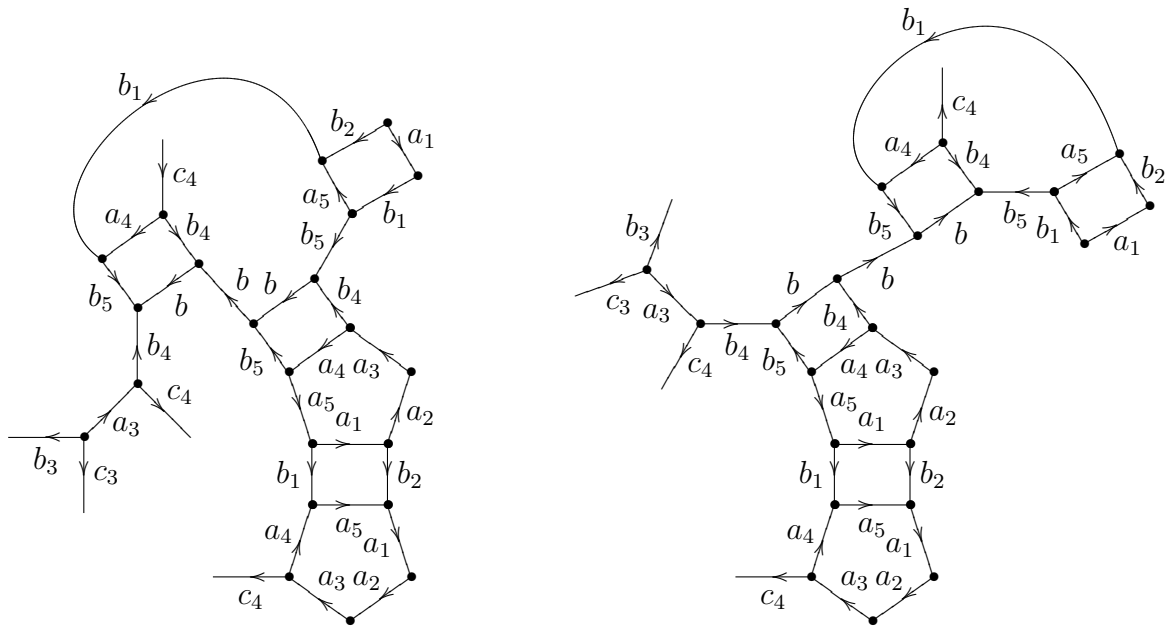
4-bridge が trivial な場合 bridge の内部に存在する頂点は 0 個または 2 個である。内部に頂点がない場合 DS-diagram は次図の様になる。左の DS-diagram は $K6 - 105$ で C -既約である。右は $K6 - 098$ であり, C -既約ではなく $K5 - 46$ に reduce できる。



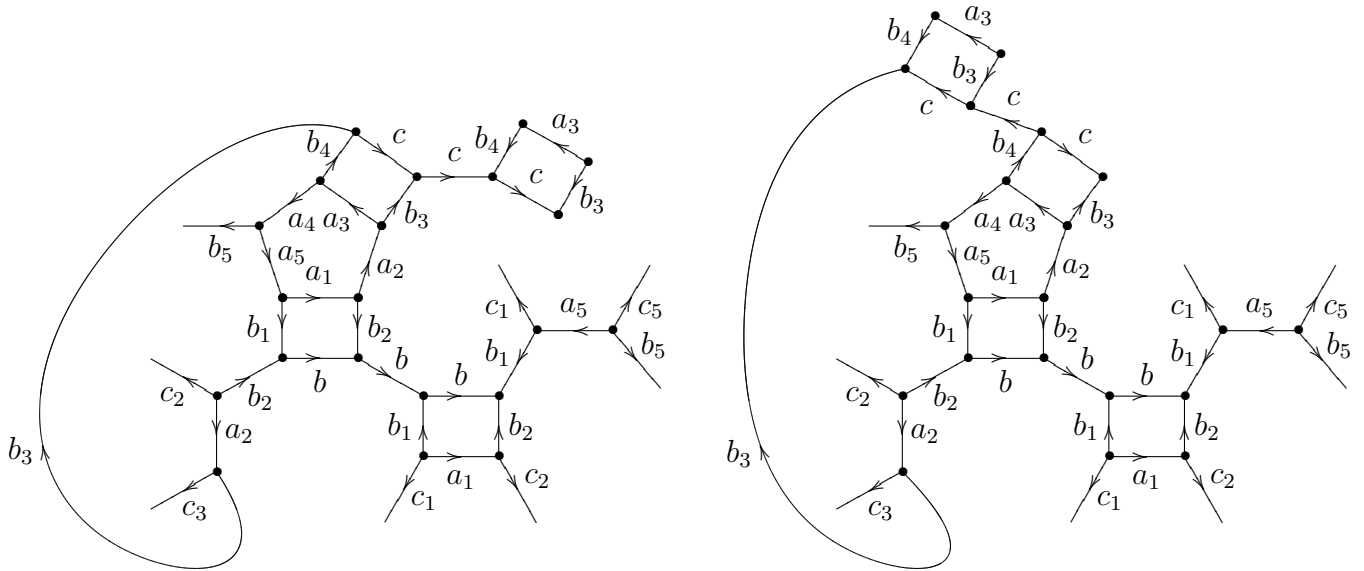
4-bridge 内に頂点が 2 個存在する場合次図の様になる。proper な 5-bridge が存在する (点線で描いてあるもの)。 W^+ は 5-bridge により分離され 6-point なので C -既約でない。



X_4^+ がタイプ (III) の場合は次図の様に 1-bridge が存在するので C -既約でない。



最後にタイプ (III) が2つの場合を考える。 X_1^+ がタイプ (III) であるとする。 X_2^+ および X_5^+ はタイプ (III) にはならない。 次図は X_3^+ がタイプ (III) の DS-diagram である。 いずれも 3-bridge が存在する。 この 3-bridge は proper なので非退化 3-gon が存在する。 よって DS-diagram は C -既約でない。 X_4^+ がタイプ (III) の場合も同様に 3-bridge が存在するので命題が示された。

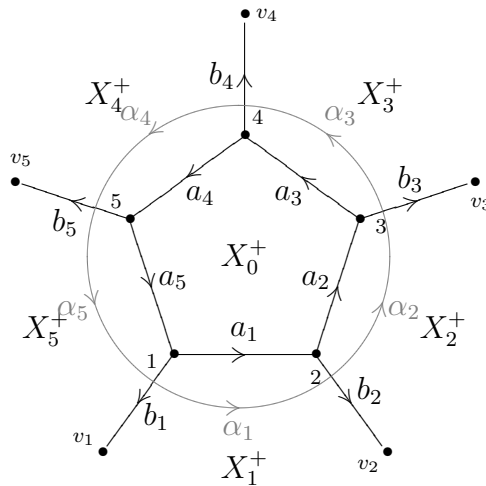


3 5-node と 4-gon

この節では Σ は強 C -既約な DS-diagram で複雑度最小の反例とする。 前節でてきた DS-diagram $\Sigma(p, q)$, $K5 - *$, $K6 - *$ は予想の反例にならないことが知られている。

5-node は normal bridge なので node のまわりは次図の様になっている。 5-node を L_0 とする。 node の各辺のラベルを $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ とする。 ラベル b_i 辺の終点のラベルを v_i とする。 X_0^+ の貼りあう相手 X_0^- のラベル i 頂点を始点とするラベル a_i 辺でない辺のラベルを c_i とし、 ラベル c_i 辺の終点のラベルを w_i とする。 L_0 とラベル a_i 辺をラベル共有する node を L_i とする。 L_i のラベル α_i 辺の α_i の向きに次の辺のラベルを β_i とする。

この note では X_i^+ に 4-gon になるものが存在する場合を考える。 ここでの議論ではすべての node は 6 以下であることを仮定する。



次がこの note の main の結果である。

命題 3.1 X_i^+ が 4-gon のときタイプ (III) である。

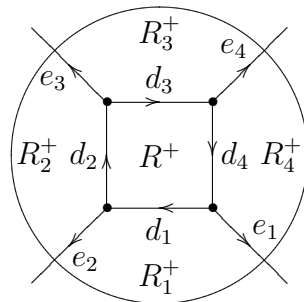
ここで 2 つの move (normal node の移動, proper 4-gon の移動) について復習しておく。

bridge l で S -move を行い, 得られた DS-diagram の面 W^+ で G -move を続けて行う変形を $[l, W^+]$ と書くことにする。

5-node L_0 にごく近い平行な loop で外側にあるものを l とする。 $[l, X_0^+]$ を **normal bridge の移動** と呼ぶ。この変形は B -move (頂点数を変えない変形) であり, DS-diagram 自身は変えないが, X_0^+ のまわりにあった bridge L_0 を X_0^- のまわりに移動する。この変形を $[L_0, X_0^+]$ と書くことにする。この move の副作用として L_i のラベル α_i 辺が隣接面に移動する。

以下 node に平行な bridge で S -move するとき簡単のために node で S -move する様な記述をする。切り取られる面も l で切り取られた面と L_0 で切り取られた面は異なるが, これも混同して書く。

l で S -move する変形を $[l]$ と書く。 $[l], [l, X^+]$ などの変形を行って得られる DS-diagram をこれも混同を許して $[l], [l, X^+]$ などと書く。



R^+ を proper 4-gon とする。4-gon の境界と平行で少し外側にある loop を l とする。4-gon と隣接する面から l が切り取る 4-gon の境界に隣接する面は 4 つあるがこれを R_i とする。 $[l, R_i^+]$ を行うとこの場所の 4-gon がなくなり (R_2^+, R_4^+ の場合は 4-gon が横につぶれ, R_1^+, R_3^+ の場合は 4-gon が縦につぶれた形になる), 別の場所が発生する。この変形を **proper 4-gon の移動** と呼ぶ。この変形は B -move である。変形 $[l, R_1^+]$ と変形 $[l, R_3^+]$ は同じ変形であり変形 $[l, R_2^+]$ と変形 $[l, R_4^+]$ は同じ変形である。

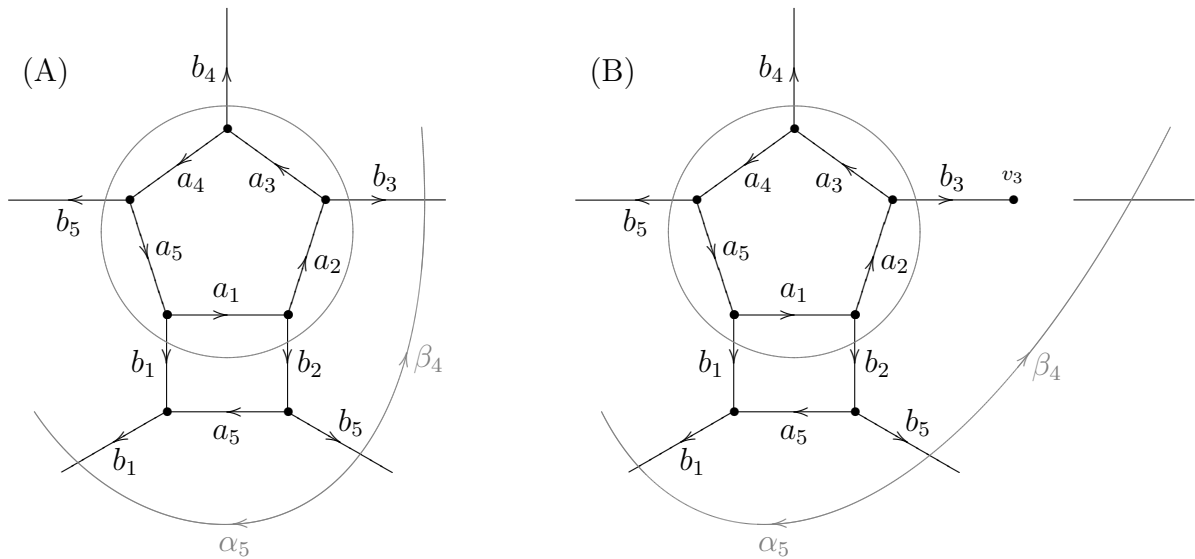
l と L が $2p$ 個の点で, ∂X^+ と L が $2q$ 個の点で交わっているとき, 変形 $[l, X^+]$ をおこなったとき D の複雑度 $c(D)$ は $2(p - q)$ だけ変化する。 l が node の場合は L とは交わらないので $p = 0$ である。即ち bridge が node ときは面が L と交わっていれば D の複雑度 $c(D)$ は下がる。proper 4-gon の移動の場合 4-gon の対辺を L が通っている場合 L と交わる R_i^+ での変形の場合 $c(D)$ は変わらないが, L と交わらない R_i^+ での変形の場合 $c(D)$ は 2 つ増える。

以下 X_1^+ が 4-gon だとする。

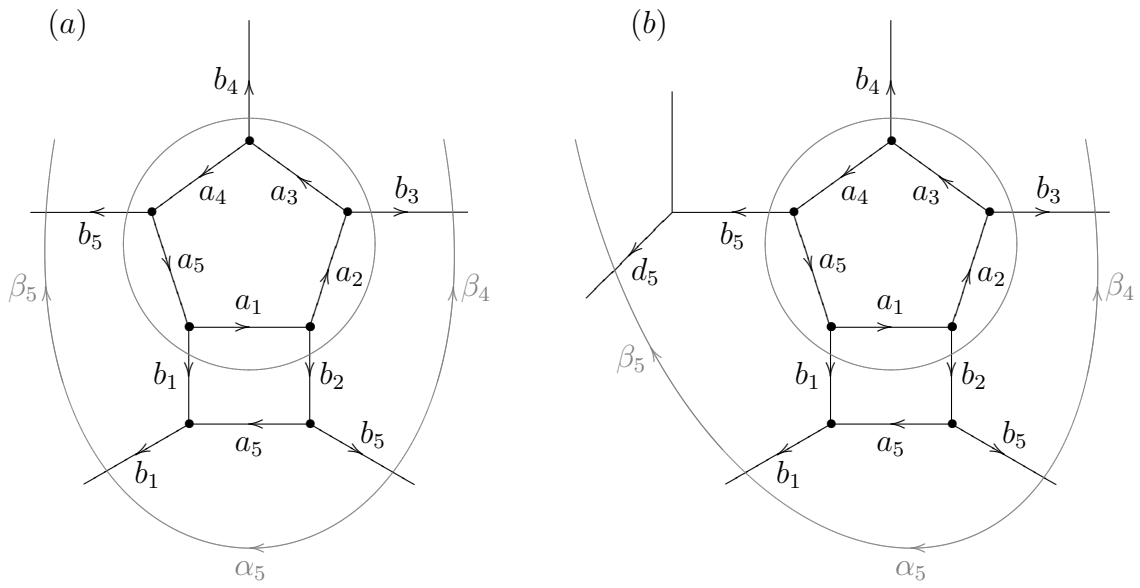
X_1^+ が proper のとき proper 4-gon の移動を行うと 4-gon がなくなり L_0 は 4-node になる。よって Σ は強 C -既約でない。

最初に X_1^+ がタイプ (I) の場合を考える。

L_5 の X_2^+ におけるラベル β_4 辺が (A) ラベル b_3 辺と交わる場合と, (B) 交わらない場合に分ける。

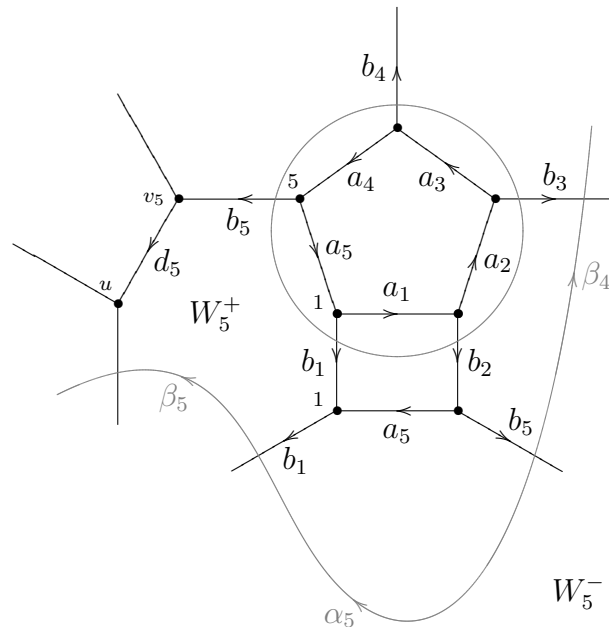


case (A) が起こらないことを示す。case (A) が起こっているとす。



最初に (a) ラベル β_5 辺がラベル b_5 辺と交わる, または (b) ラベル β_5 辺がラベル d_5 辺と交わる, の2つの場合しかないことを示す。

そのために L_5 のラベル β_5 辺がラベル b_5 辺およびそれと隣接するラベル d_5 辺と交わらないと仮定する。 L_5 およびその辺とラベル共有する辺が X_5^+ から切り取る面を W_5^+ とする。 W_5^+ は 7-gon 以上である。



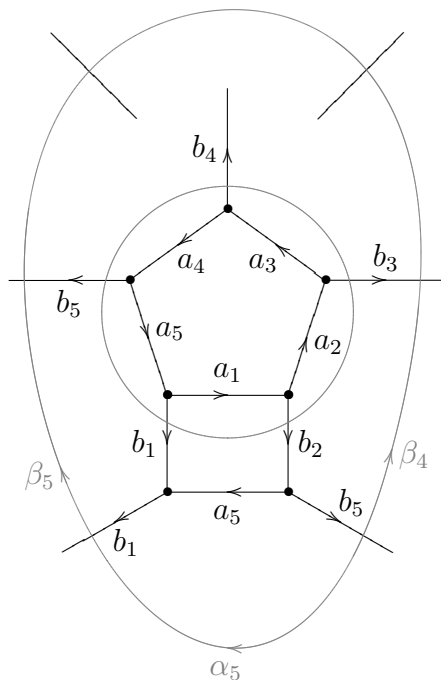
$v_5 = 5$ のとき proper 5-gon に隣接する退化辺が 2 つ存在する。これは前節で処理済みである。また $v_5 = 1$ とはなれない。同様に $u = 1$ とはなれない。 $u = 5$ のと

き X_5^+ にラベル 5 頂点が 2 つ X_5^- にもラベル 5 頂点が 2 つ, X_0^- にラベル 5 頂点が 1 つある。これらのなかのどれかは同じ頂点ということから C -既約でないことが分かる。

$u = v_5$ のとき d_5 は退化辺となる。このときいくつかの場合があるがいずれも 3-bridge が存在し, この bridge が trivial なことから, ある X_i^+ が 3-gon になり C -既約でない。

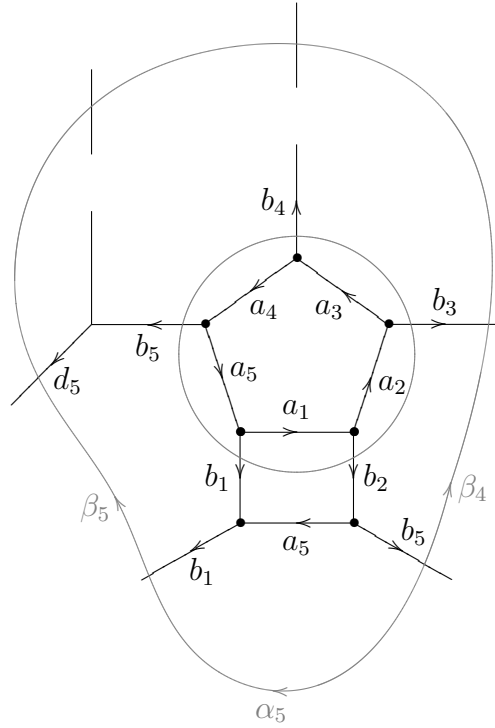
よって W_5^+ は 6-point 以上であり L_5 によって分離される。6-point のとき変形 $[L_5, W_5^+]$ は C -move か B -move である。 W_5^+ (カットする bridge は L_5 と平行なもの) は L の成分 (ずらす方向によりラベル α_5 辺またはラベル β_5 辺) を含むので $c(D)$ が下がる。よって場合は (a) または (b) のみである。

case (a) を考える。 L_5 の辺 $L_5 \cap X_4^+$ がラベル b_4 辺と交わると 1-bridge が存在するのでラベル b_4 辺とは交わらない。このとき 3-bridge が存在する。



3-bridge が trivial のとき L_5 が X_4^+ から切り取る面を W_4^+ とする。 $v_4 \neq 4, 5$ なので L_5 で S -move した DS-diagram で W_4^+ は 6-point で L の成分を含むので $[L_5, W_4^+]$ の複雑度は小さくなる。

3-bridge が non-trivial のとき 3-bridge は 4-point であり, 3-bridge で分離される 5-point 以上の面が存在する。以上により (a) は起こらない。



case (b) のとき 4-bridge が存在する。

4-bridge が trivial の場合を考える。

内部に頂点がないとき L_5 が X_4^+ から切り取る面を W_4^+ とする。 $v_5 \neq 4, 5$ なので L_5 で S -move した DS-diagram で W_4^+ で 6-point であり L の成分を含む。 $[L_5, W_4^+]$ は複雑度が小さくなる。

内部に頂点が 2 つあるとき X_4^+ は 5-gon である。頂点の中に同じラベルの頂点があれば矛盾が生じるので X_4^+ は 5-point である。 L_5 で S -move した DS-diagram では X_4^+ は 6-point であり L の成分を含む。 $[L_5, X_4^+]$ は複雑度が小さくなる。

次に 4-bridge が non-trivial のときを考える。

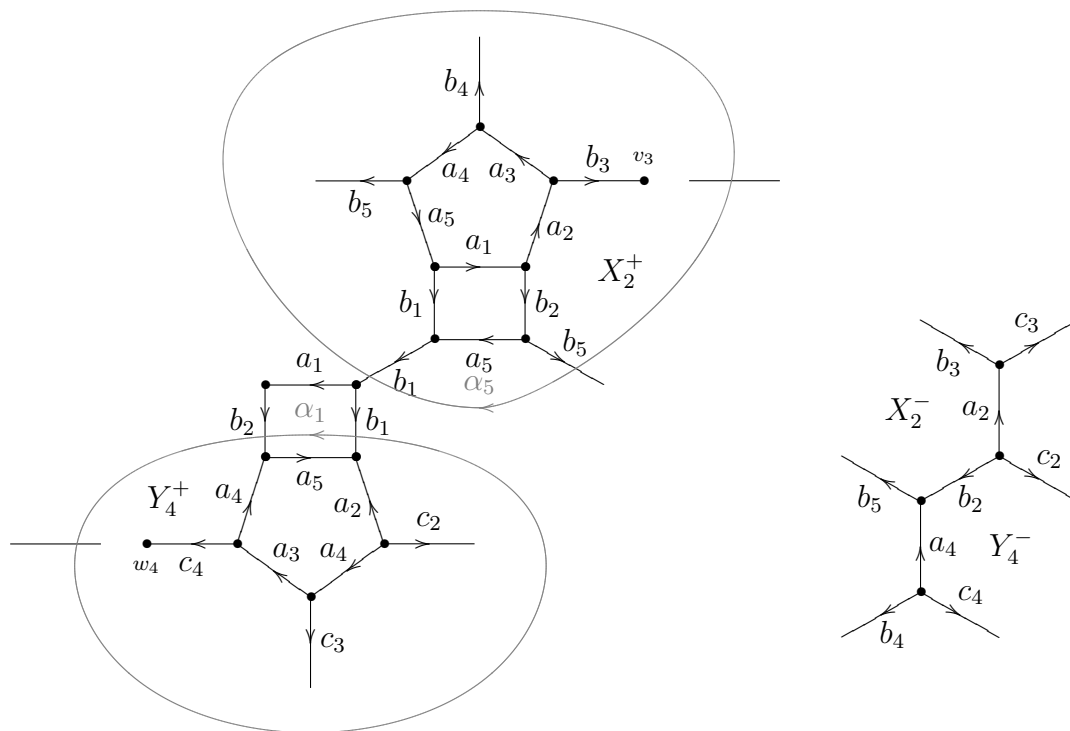
4-bridge が proper のとき、 X_4^- が 4-bridge の内部にあれば、 X_4^+ から 4-bridge によって切り取られる面 W_4^+ は 4-bridge によって分離され、 4-bridge の外部にあれば X_4^+ は L_5 によって分離される。このとき $[4\text{-bridge}, W_4^+]$ または $[L_5, X_4^+]$ は複雑度が小さくなる。

4-bridge が proper でないとき 5-point である。いくつかの場合があるが、 L_5 が X_2^+, X_5^+ から切り取る面は L_5 とラベル共有する辺を含めると、 $[L_5]$ では 6-point である。また 4-bridge を l とすると l が X_2^+, X_5^+ から切り取る面は l とラベル共有する辺を含めると、 $[l]$ では 6-point である。 X_2^-, X_5^- が l の内部にあれば l によって分離され、 l の外部にあれば L_5 によって分離される。前と同様に複雑度が小さくなる。以上により (A) は起こらない。

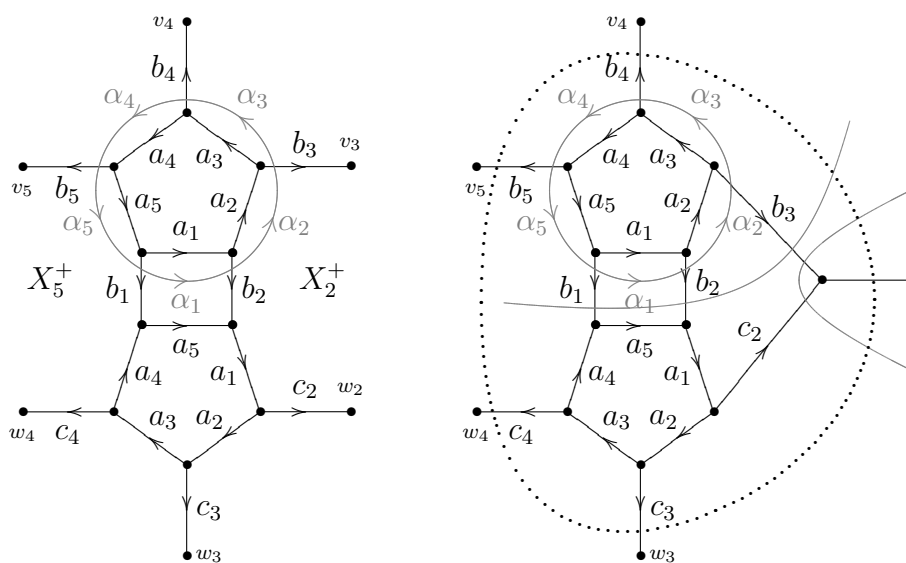
次に case (B) を考える。 $v_3 \neq 3, 2, 5$ なので L_5 が X_2^+ から切り取る面を W_2^+ とすると、 W_2^- が L_5 の外側にあるとき $[L_5, W_2^+]$ は複雑度が減少している。

よって X_2^+ が L_5 の内側にあるとする。このとき normal bridge の移動を行い、 X_0^+ で議論したことを X_0^- で行うとこのときも case (B) しか起きない。よって Σ は次図の様になっている。 X_2^- が L_5 の内側にあるとき Y_4^- も L_5 の内側にある。

normal bridge の移動を行った DS-diagram で考える。 L_1 が Y_4^+ から切り取る面を V_4^+ とすると V_4^+ は L_1 によって分離される。 $[L_1, V_4^+]$ は複雑度が小さくなる。以上で (I) が起きないことが分かる。



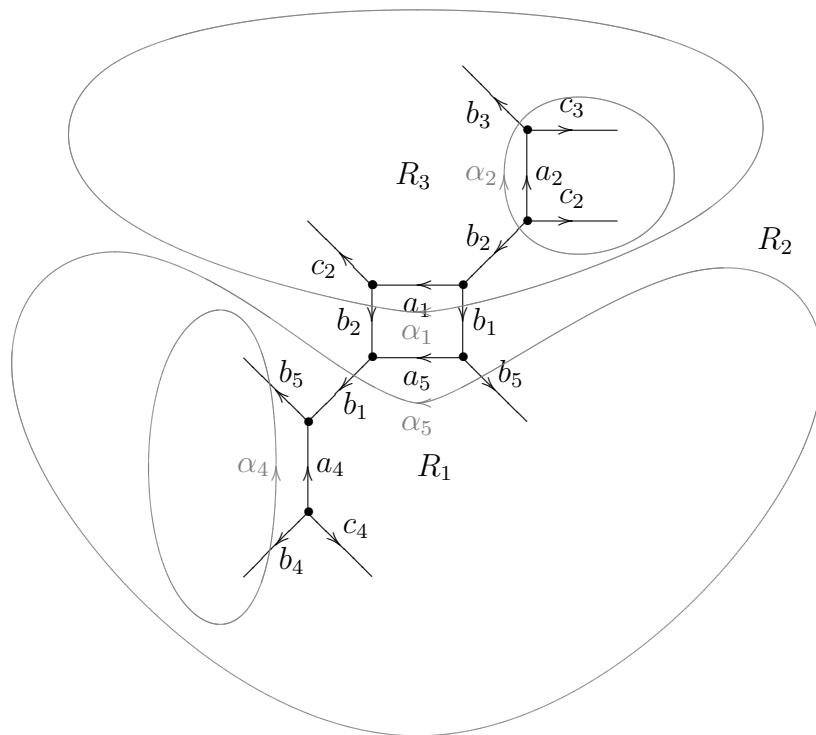
(II) の場合を考える。 X_2^+ が 5-gon のとき次図右の様になっており、5-bridge が存在するのでこれを l とする。



5-bridge ℓ が X_2^+ から切り取る面を W_2^+ とする。 ℓ が L と交わらなければ $[\ell, W_2^+]$ は複雑度が小さい。

ℓ と L が交わりがある場合、 L の X_1^+ と交わらない成分は isotopy で ℓ との交わりを消すことができる。このとき L_0 は変化しない。 X_0^+ と交わる L_0 以外の L の成分は W_2^+ とも交わる。また W_2^+ はそれ以外に L_0 とも交わる。 $[\ell]$ を行ったとき $c(D)$ は $\#(\ell \cap L)$ が増えるが W_2^+ で G -move すると $\#(\ell \cap L) + 2$ 減る。ここで $\#X$ は X の個数である。よって X_2^+ は 5-gon でない。

X_2^+ を 6-gon 以上とする。 $v_3 = w_2$ のとき X_2^+ に退化辺が存在し 1-bridge が存在するので $v_3 \neq w_2$ である。 X_2^+ は 5-point であり $[L_1]$ では 6-point である。 X_1^- のまわりは次図の様である。 L_1, L_5 で分けられる領域を R_1, R_2, R_3 とする



X_0^+ が R_1, R_2 にあるとき $[L_1, X_2^+]$ は複雑度が小さくなる。

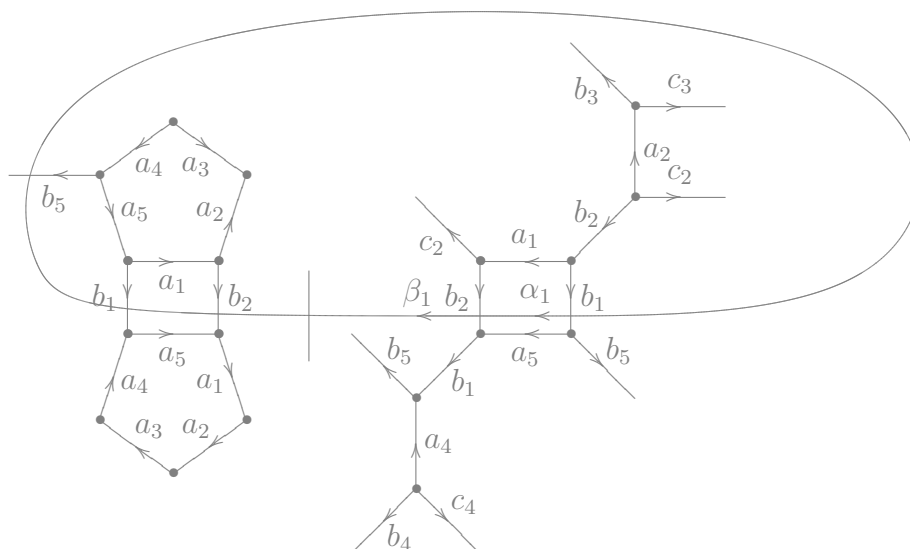
対称性より X_5^+ も 5-point 以上であり $[L_1]$ では 6-point である。 X_0^+ が R_3 にあるとき $[L_1, X_5^+]$ は複雑度が小さくなる。よって $X_1^+ \cap L_1 = \emptyset$ のときは示された。

次に $X_1^+ \cap \neq \emptyset$ のとき考える。 L_1 は X_5^+ を通る。 L_1 が X_5^+ から切り取る面を W_5^+ とする。

L_1 が X_5^+ のラベル b_5 辺を通らないとき、 W_5^+ は $[L_1]$ で 6-point なのでラベル b_5 辺を通るとしてよい。

L_1 のラベル β_1 辺が X_2^+ を通るときは X_2^+ は向きが逆のラベル b_2 辺を 2 つ含むので X_2^- が自己隣接する。

よってラベル β_1 辺はラベル b_2 辺と異なる辺と交わる。 L_1 は 6-node なので交わる辺はすべてでてきている。 X_4^+ において L_1 はラベル B_5 辺とラベル b_1 辺を結んでいる。これとラベル共有している辺は端点が L_4 の内側と外側にあるので結べない。これは矛盾である。よって (II) は起きない。



参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [4] Kouno, M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [5] Kouno, M, DS-diagram の generator, 箱根セミナー 2008 記録
- [6] Kouno, M, generalized DS-diagram の C -変形とリフトについて, 箱根セミナー 2009 記録
- [7] Kouno, M, DS-knot 予想について, 箱根セミナー 2010 記録
- [8] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math., Vol 34, No 1, pp. 165-183 (2011)
- [9] Kouno, M, DS-knot 予想について (2), 箱根セミナー 2013 記録

- [10] <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/DS-diagram/DS-diagram0-6.html>
(<http://hakone-seminar.com/>から辿れる)。
- [11] Yokoyama, K, Lens space の DS-diagram について, 数理解析研究所考究録
563 (1985)
- [12] Yokoyama, K, On DS-diagram of lens space, Topology and Computer Science,
紀伊国屋書店, 171–192 (1987)