

H -move について

河野正晴 (北見工業大学)

generalized DS-diagram の G -move とは球面上の closure が disk の面 X^+ と他の球面上にある closure が disk の面 X^- を貼り合わせることで新しい generalized DS-diagram を作り出す操作であった。

この操作を面の closure が disk でない場合にも実行すると、得られる diagram は generalized DS-diagram にはならないが、この diagram を collapsing していくと多くの場合 generalized DS-diagram が得られる。

この操作を H -move と呼ぶが、このノートでは H -move を行ったとき、得られる diagram は例外形でなければ generalized DS-diagram であることを示す。例外形の表現する多様体は S^3 なので、 S^3 以外の場合 generalized DS-diagram になることが分かる。

また「自己隣接つぶし」がこの変形の特殊な場合と見なせることを見る。

1 G' -move の定義

generalized DS-diagram でないものも対象にするので diagram を定義しておく。

定義 1 [diagram] S を (必ずしも連結ではない) 曲面, P を 2-complex とする。写像 $f: S \rightarrow P$ が次を満たすとする。

- (1) S の三角形分割 \mathcal{S} と P の三角形分割 \mathcal{P} が存在して $f: S \rightarrow P$ は simplicial である。
- (2) \mathcal{S} の任意の simplex K に対し $f|_K$ は同相写像である。(simplex は境界を含まない open なものとする。)
- (3) \mathcal{P} の任意の面 (2-simplices) X に対し $f^{-1}(X)$ は \mathcal{S} の 2 個の面である。この 2 つの面を X^+, X^- と書く。
- (4) \mathcal{S} の頂点 (0-simplex) v_1, v_2 が $f(v_1) = f(v_2)$ となるとき、 v_i を端点を持つ \mathcal{S} の辺 (1-simplex) ℓ_i ($i = 1, 2$) が存在して $f(\ell_1) = f(\ell_2)$ となる。

(5) S の辺 l_1, l_2 が $f(l_1) = f(l_2)$ となるとき, l_1 を境界に持つ S の面 X^+ と l_2 を境界にもつ面 X^- とが存在して $f(X^+) = f(X^-)$ となる。

\mathcal{P} の辺 a に対し a の点 x を任意にとる。 $f^{-1}(x)$ が k 点のとき, 辺 a の **重複度** を k と定義する。この定義は点 x の選び方によらない。

\mathcal{P} の頂点 x に対し $f^{-1}(x)$ が k 点のとき, 頂点 x の **重複度** を k と定義する。

重複度 1 の辺を **孤立辺**, 重複度 2 の辺を **除去可能辺**, 重複度 3 の辺を **通常辺** と呼ぶ。

\mathcal{P} の辺で重複度 2 でない辺全体とその頂点から作られるグラフを G とする。

このとき $\Sigma = (S, G, f)$ を **diagram** という。

generalized DS-diagram はここで定義した意味での diagram である。

以下で我々が考える diagram は S が何個かの球面からなるもののみである。 $S = S_1^2 \cup \dots \cup S_p^2$ のとき $\mathcal{B} = B_1^3 \cup \dots \cup B_p^3$ し, $\partial S = \mathcal{B}$ と見る。 f を内部は同相になるように \mathcal{B} まで拡張して, $M(\Sigma) = \mathcal{B}/f$ と定義し, $M(\Sigma)$ を diagram Σ によって表現される空間という。

x を $f(G)$ の頂点または辺とする。 $f^{-1}(x)$ の成分である G の頂点または辺にはラベル x が付けられていると考える。

generalized DS-diagram (S, G, f) を考える。 S の面 X^+ と X^- とが同じ球面上にないときに, これらの面で球面を貼り合わせる。 X の closure が (closed) disk のときこの操作を G -move と呼んだが, closure が disk でない場合も行い, これを G' -move と呼ぶ。ただし面 X 自身は disk と同相だとする。 G' -move は次で定義される。

定義 2 [G' -move] $\Sigma = (S, G, f)$ を generalized DS-diagram とする。 X を disk と同相な $f(S)$ の面とする。ただし X^+ と X^- は異なる球面上にあるとする。

X^\pm に退化自己隣接辺が存在するときは, これらのすべての辺のラベルを c_1, \dots, c_t とする。 $\overline{c_i}$ が $f(S)$ で張る 1 辺形を Z_i とし,

$$S_0 = S - (X^+ \cup X^- \cup f^{-1}(Z_1) \cup \dots \cup f^{-1}(Z_t) \cup f^{-1}(c_1) \cup \dots \cup f^{-1}(c_t))$$

とおく。また $S' = S_0/f|_{\partial X^+ \cup \partial X^-}$ とする。 S_0 から S' への自然な写像を π とするとき写像 $f' : S' \rightarrow f(S_0)$ で $f|_{S_0} = f' \circ \pi$ を満たすものが存在する。

$f' : S' \rightarrow f'(S')$ に対し重複度 2 でない辺の逆像全体とその頂点から作られるグラフを G' とおく。

このとき $\Sigma' = (S', G', f')$ とおき, Σ から Σ' を得る操作を G' -move と呼ぶ。

G' -move の定義において $f^{-1}(Z_i)$ 等を除かなければ $M(\Sigma') \cong M(\Sigma)$ は成立せず, $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ と t 個の S^3 の disjoint union になる。

X^+ と X^- は隣接しないので, ∂X^\pm の退化辺がジグザグ型になることはなく, 退化自己隣接辺のラベルの closure $\overline{c_i}$ は $f(S)$ で 1 辺形を張る。即ち c_i に対し $\partial Z_i = c_i$ となる $f(S)$ の 1 辺形 Z_i は必ず存在する。

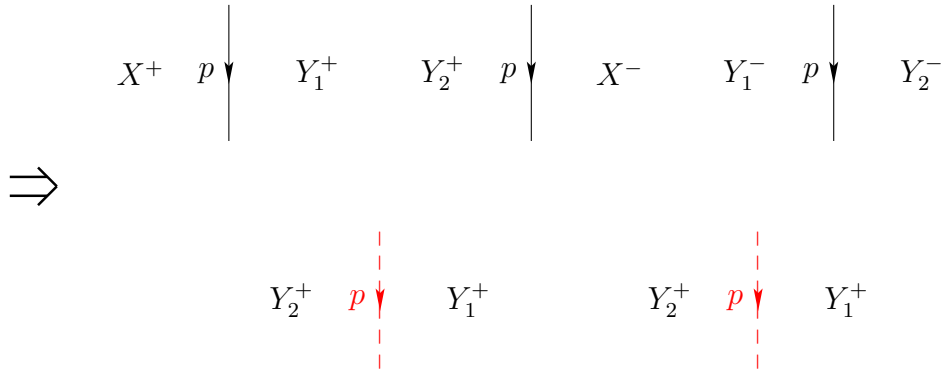
命題 3 generalized DS-diagram Σ から G' -move で得られる $\Sigma' = (S', f', G')$ は diagram であり, S' の各成分は球面である。辺の重複度は 3 以下であり, 頂点の重複度は 4 以下である。

証明 S の三角形分割 \mathcal{S} と $f(S)$ の三角形分割 \mathcal{P} で $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$ が simplicial であるものを考える。このとき \mathcal{S} の 1-skeleton は G を含む。

$\pi(\partial X^+)$ または $\pi(\partial X^-)$ と交わらない simplex に関しては f' は f と同じなので, simplex K に対し $f'|_K$ は同相写像である。辺または頂点が f' で同一視されるとき, f で同一視されているので条件 (4),(5) も満足する。

$\pi(\partial X^+)$ または $\pi(\partial X^-)$ に含まれる simplex に対しても, π での同一視は, 辺上の 1 点が π で同一視されるときその辺上のすべての点が同一視されることから, simplex に制限したものは同相写像であることが分かる。

(A) 非自己隣接辺



(B) 自己隣接辺

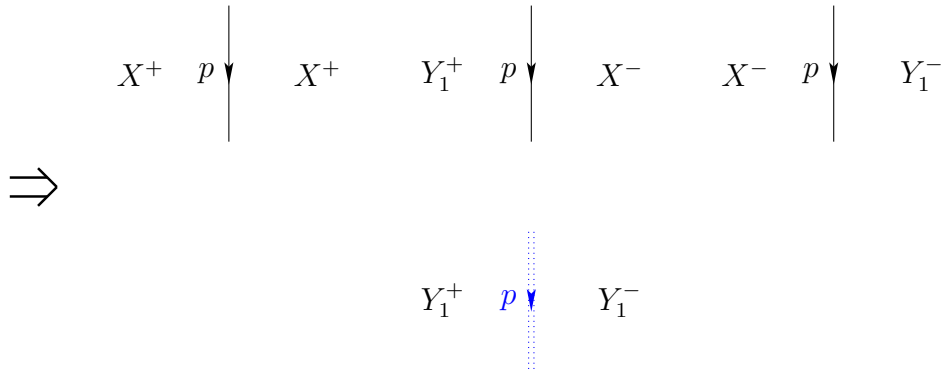


図 1

条件 (4) の成立は明らかなので, 条件 (5) を見る。 S' の辺 l_1, l_2 が $f'(l_1) = f'(l_2)$ となるとする。 l_i を境界とする面が X^\pm, Y_i^\pm 意外に共に存在するときは成立する。

この様な X^\pm, Y_i^\pm が存在しないのは辺が自己隣接辺の場合のみである。 l_i が退化辺でなければ、 $\pi^{-1}(l_i)$ の中に境界に X^\pm, Y_i^\pm 以外の境界になっているものが存在する。 l_i が退化辺の場合自己隣接退化辺なので、 S' からすでに除かれているはずである。よって条件 (5) も成立する。

$f'(S')$ の面は $f(S)$ の面から X, Z_1, \dots, Z_t を除いたものなので、 $f'(S)$ の面 X に対し $f'^{-1}(X)$ は S' の 2 個の面からなる。

f' での同一視は、 π で同一視し f' で同一視したものが、 f での同一視なので、あたらな同一視は行っていない。よって各頂点および各辺の重複度は f の重複度以下である。

S' が曲面であることを見るには、 S' の各点の近傍が open disk であることを見ればよい。 v を S の点とし、 $\pi(v)$ の近傍の様子を見る。 $v \in S - (\partial X^+ \cup \partial X^-)$ のときは $\pi(v)$ の近傍は S における v の近傍と同じであり open disk である。

v が $\partial X^+ \cup \partial X^-$ の辺上の点のときは図 1 の様になっている。破線は除去可能辺、2 重点線は孤立辺を表す。 v が属している辺が ∂X^+ および ∂X^+ の自己隣接辺でない辺の π による像のときは (A)、自己隣接辺のときは (B) の様になっておりいずれも近傍は open disk である。

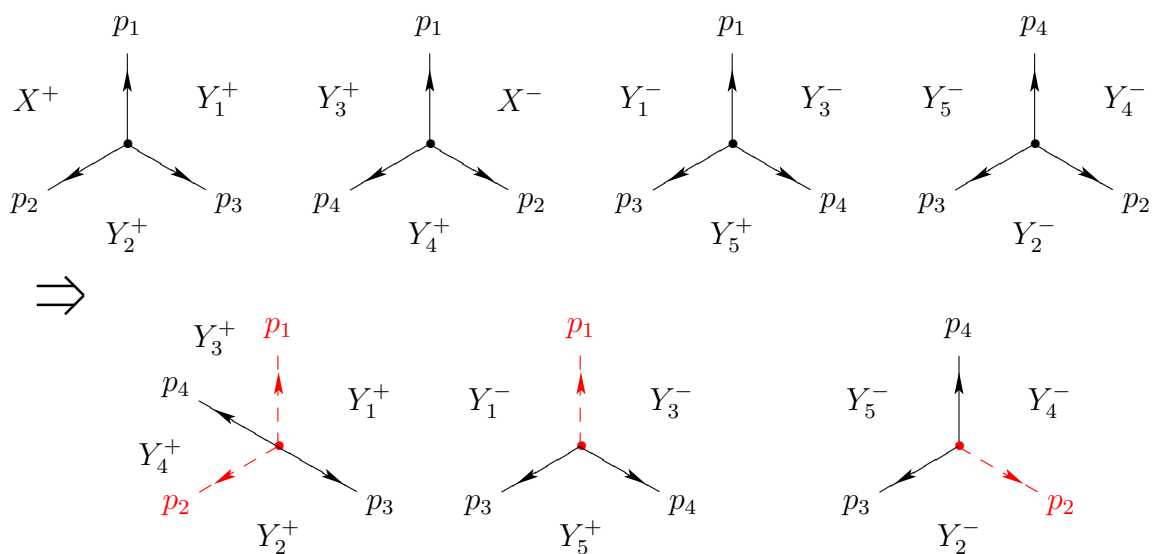


図 2

v が $\partial X^+ \cup \partial X^-$ の頂点の場合を考える。 v が $\partial X^+ \cup \partial X^-$ の自己隣接辺の端点でない場合は図 2 の様になっている。破線は重複度 2 の辺 (除去可能辺) を表す。 $\pi(v)$ の近傍は open disk である。このとき $\pi(v)$ は G' の頂点ではない。

v が ∂X^+ の自己隣接辺の端点の場合を考える。最初に非退化な自己隣接辺の端点を考える。 v に隣接する ∂X^+ の自己隣接辺の個数は 1 個または 3 個である。3 個の場合、 v に隣接する 3 個の辺はすべて自己隣接であり、 ∂X^- の自己隣接辺の頂点 w で $f(w) = f(v)$ となるものは存在しない。

v を端点にする ∂X^+ の自己隣接辺が 1 個の場合、 ∂X^- の自己隣接辺の頂点 w で $f(w) = f(v)$ となるものが存在する場合と存在しない場合がある。

存在しない場合は図 3 の様になっている。この点 $\pi(v)$ は G' の頂点である。この頂点のタイプを (1_1) と呼ぶ。除去可能辺は三角形分割のために存在しているようなものなのでタイプを考えると考慮にいれない。タイプ (1_1) は同じラベルを持つ 1 組の通常辺と孤立辺 1 個の端点になっている頂点である。

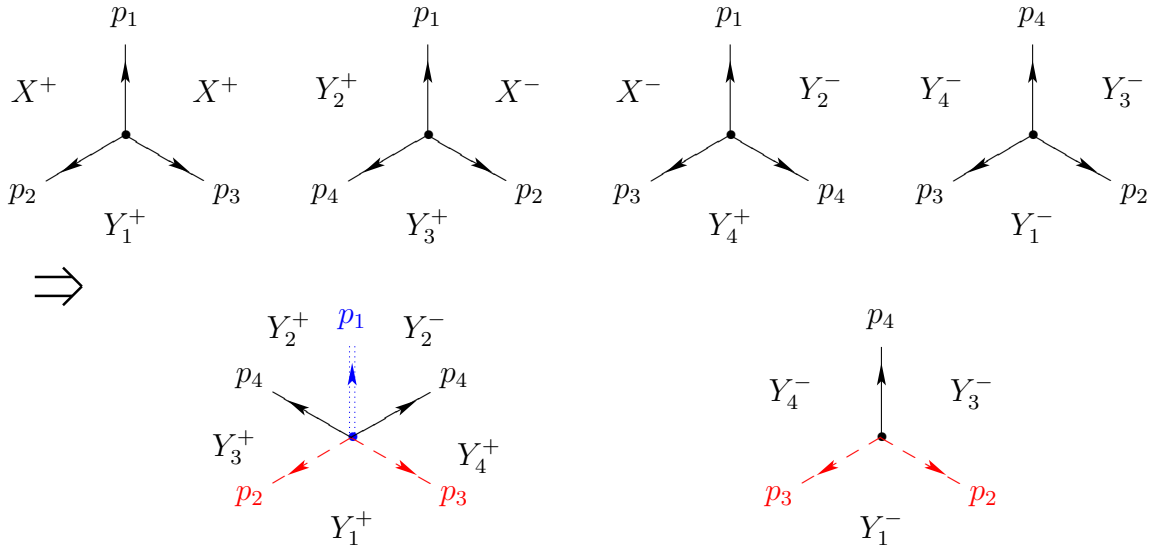


図 3

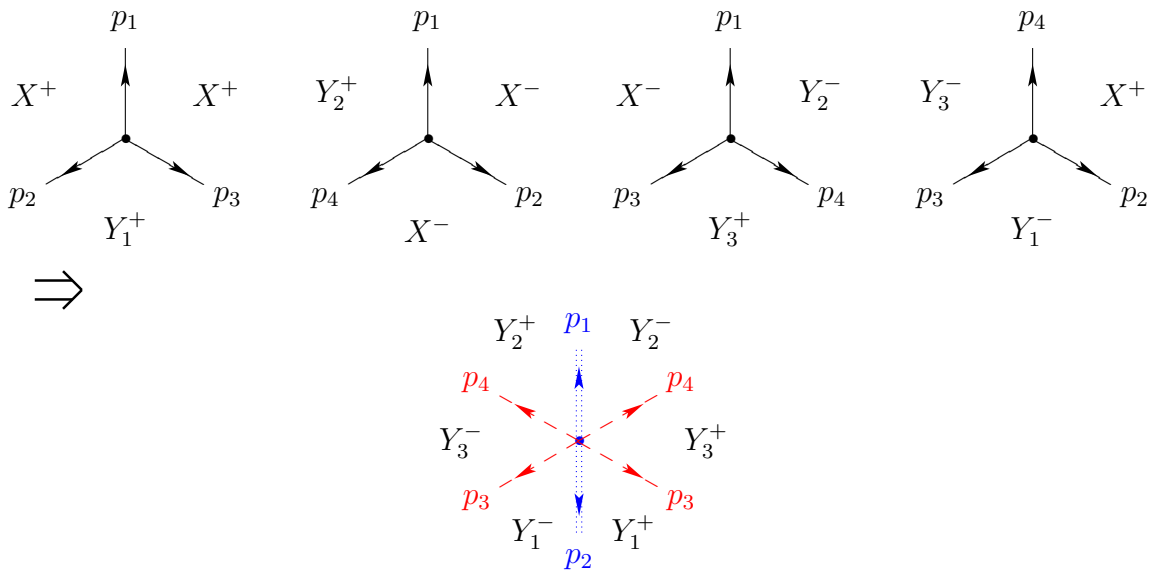


図 4

$f(w) = f(v)$ となる頂点で w で ∂X^- の端点になるものが存在する場合は図 4 の様になっている。

$\pi(v)$ は孤立边上の点であるが、 G' の頂点ではない。 G' の頂点にならない点のタイプを $(*)$ と呼ぶことにする。

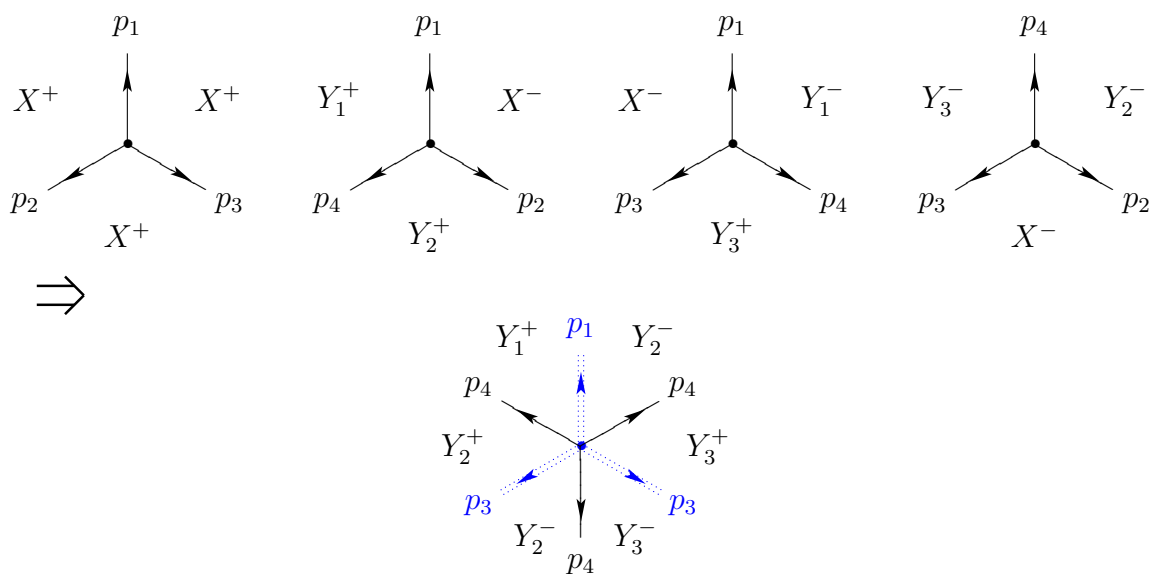


図 5

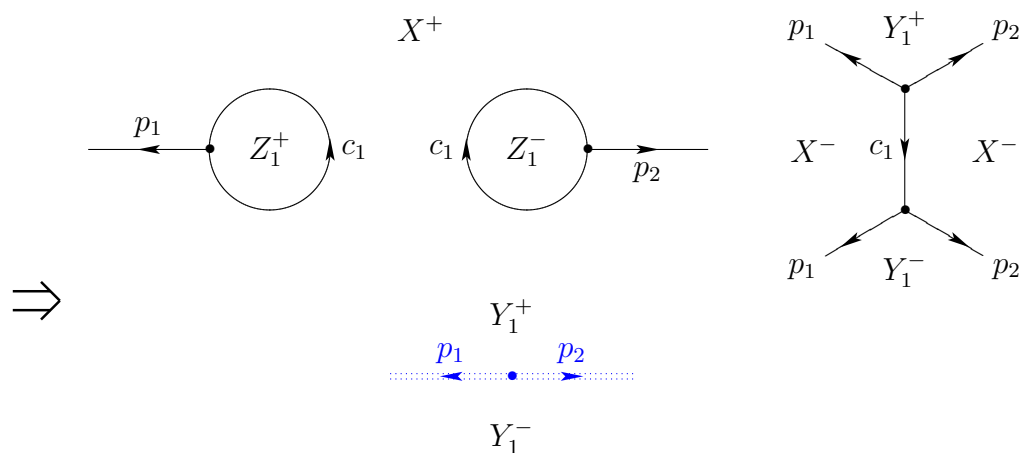


図 6

v が ∂X^+ の3個の自己隣接辺の端点になっているとき、図5の様になっている。この点は G' の頂点であるが、この頂点のタイプを (3_1) と呼ぶ。同じラベルを持つ1組の通常辺と3個の孤立辺の端点になっている頂点である。

退化自己隣接辺の端点になっている場合、最初の注意より退化辺を境界にもつ面 Z_i^\pm が存在する。 G' -moveの定義から Z_i^\pm およびラベル c_i 辺を除くので図6の様になる。点のタイプは $(*)$ である。

以上により S' は曲面である。残っているのは S' の連結成分が球面であることである。 $S = S_1^2 \cup \dots \cup S_s^2$ とし、 $X^+ \subset S_1^2, X^- \subset S_2^2$ とする。

最初に退化自己隣接辺がない場合を考える。 $\partial X^+, \partial X^-$ ともに自己隣接辺をもたないときは $S_1^2 - X^+, S_2^2 - X^-$ ともにdiskなのでこのときは $\pi(S_1^2 - X^+ \cup S_2^2 - X^-)$ は球面である。

よって自己隣接辺が存在するとする。 ∂X^+ の自己隣接辺のすべてのラベルを a_1, \dots, a_m , ∂X^- の自己隣接辺のすべてのラベルを b_1, \dots, b_n とする。

$S_1^2 - X^+$ は何個かのdisk E_i をラベル a_j 辺でつないだものである。すべての E_i の和集合を E とする。

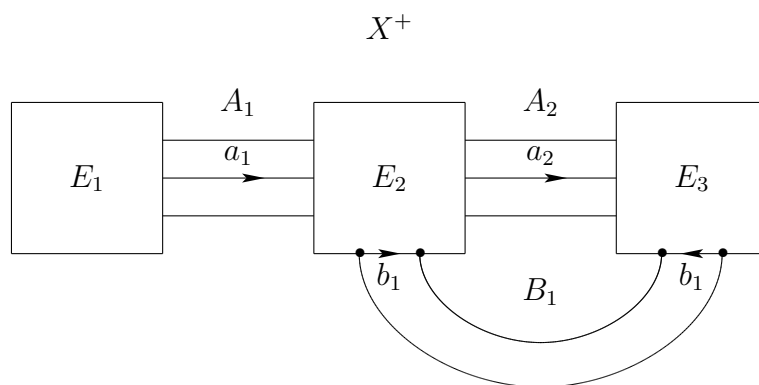


図7

(A) : X において a_i 同士, b_i 同士および a_i と b_j が隣接していない場合を考える。 S_1^2 において考える。ラベル a_i 辺 l_i の近傍 $A_i = l_i \times [-1, 1]$ を考える。ただし $A_i \cap E = \partial l_i \times [-1, 1]$ をみたすものとする。 $l_i \times \{0\}$ は ∂X^+ のラベル a_i 辺と考える。 $\overline{X^+}$ 内に長方形領域 $B_i = l_i \times [-1, 1]$ を考える。ただし、 $l_i \times \{-1, 1\}$ は ∂X^+ の2つのラベル b_i 辺であるとする。 X^- のラベル b_i 辺は自己隣接辺なので、このラベル b_i 辺と1点で交わる X^- 内のloop α_i で $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ ($i \neq j$)となるものがとれる。このことから $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$)ととれることが分かる。

すべての $l_i \times \{0\}$ の和集合を a , すべての $l_i \times \{-1, 1\}$ の和集合を b とする。すべての A_i の和集合を A , すべての B_i の和集合を B とする。

このとき $S_1^2 - X^+ = E \cup a$ であるが、 π はラベル b_i 辺を同一視する写像なので $\pi(S_1^2 - X^+) \cong E \cup a \cup B$ と考えられる。

∂X^+ のラベルと同じで b_i が自己隣接辺になるので $E \cup A \cup B - b \cong X^-$ と考えることができる。よって $S_2^2 - X^- \cong S_1^2 - (E \cup A \cup B - b) = S_1^2 - (E \cup A \cup B) \cup b$ となる。これを π で移すことは A のなかで $l_i \times \{-1\}$ と $l_i \times \{1\}$ を貼り付けることなので、 $\pi(S_2^2 - X^-) \cong S_1^2 - (E \cup B) \cup a \cup b$ となる。よって退化自己隣接辺を含まない場合は球面になる。

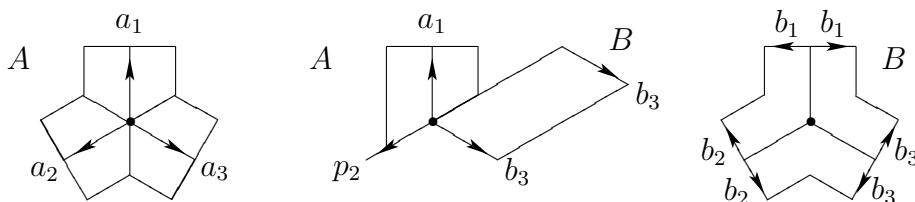


図 8

(B) : X^+ においてラベル a_i 辺同士が隣接している場合、1つの頂点に3個のラベル a_i 頂点が接続している。このとき図 8 左の様に3個の A_i を (図では A_1, A_2, A_3) をその境界の一部を共有するよう選ぶ。

X^- においてラベル b_i 辺同士が隣接している場合、1つの頂点に3個のラベル b_i 頂点が接続している。 X^+ において対応するラベル b_i 辺を見ると3つのラベル辺が2個ずつ隣接している。このときは3個の B_i をその境界の一部を共有するよう選ぶ。

ラベル a_i 辺とラベル b_j 辺が隣接している場合も A_i と B_j がその境界の一部を共有するよう選ぶ。

A, B をこのように選ぶと、自己隣接辺が隣接する場合も自己隣接辺が隣接しない場合と同様に示すことができる。

次に退化自己隣接辺を含む場合を考える。

X^- が自己隣接辺を含むとき図 6 上のようにになっているが、図 6 の p_1, p_2 を d_1, e_1 とおく。 X^+ に退化自己隣接辺があるときは図 6 で X^+ と X^- を入れ替えた図になるが、このときも同様に p_1, p_2 を d_1, e_1 とおく。同様に退化自己隣接辺に隣接する辺と同じラベルを持つ辺は a_i, b_i ではなく、 d_k, e_k と呼ぶ。

各 a_i, b_j に関して前述の操作を行い、 A, B を作成しておく。

各 k について次の変形を行う： X^- に退化自己隣接辺のあるときは、 X^+ にある Z_k^+, Z_k^- よび2つのラベル c_k 辺を取り除き、ラベル d_k 辺およびラベル e_k 辺をラベル c_k 辺に接続していた頂点でつなぎ隣接させラベルを d_k, e_k から d'_k, e'_k に変更する。 X^- からラベル c_k 辺を取り除き、2つのラベル d_k 辺およびラベル e_k 辺の名前を d'_k, e'_k は変更する。この操作を行った後の X^+ を \tilde{X}^+ 、 X^- を \tilde{X}^- と書く。ただし \tilde{X}^+, \tilde{X}^- はお互いに同相ではない。 $S_1^2 - \tilde{X}^+$ は何個かの E_i を a_j または $d'_j \cdot e'_j$ でつ

ないものである。ただし、ラベル c_j 辺でカットされている可能性があるので連結とは限らない。

X^- に退化自己隣接辺 c_i が存在する場合、これと1点で交わる $\overline{X^-}$ 内の loop が存在するので、 \tilde{X}^+ 内で $d'_i \cdot e'_i$ と b が交わることはない。 \tilde{X}^+ 内にある $d'_i \cdot e'_i$ の和集合を d とすると $\pi(S_1^2 - X^+ - \cup_{i=1}^k (f^{-1}(Z_i) \cup f^{-1}(c_i))) \cong E \cup a \cup e \cup B$ であり、 $\pi(S_2^2 - X^-) \cong S_1^2 - (E \cup B) \cup a \cup b \cup e$ である。この場合も球面になることが分かる。

命題 4 $M(\Sigma') \cong M(\Sigma)$ が成立する。

証明 $\mathcal{S} = S_1^2 \cup \dots \cup S_p^2$ に対し $\mathcal{B} = B_1^3 \cup \dots \cup B_p^3$ とし、 $\partial\mathcal{B} = \mathcal{S}$ と考える。 $X^+ \subset S_1^2, X^- \subset S_2^2$ とする。

$B_1^3 \cup B_2^3$ から $\pi(B_1^3 \cup B_2^3)$ への写像を定義する： ∂B_1^3 上の X^+ と ∂B_2^3 上の X^- を f で貼り合わせる。更に各 k に対し ∂X^+ 上または ∂X^- 上にある Z_k^+ と Z_k^- を f で貼り合わせる。

この π は \mathcal{S} 上の写像 π を $S_1^2 \cup S_2^2$ に制限したものの拡張になっている。命題 3 より $\partial(\pi(B_1^3 \cup B_2^3))$ は球面であり、 $f(Z_k^+) = f(Z_k^-)$ の同一視で生じた handle を $f(X^+) = f(X^-)$ の同一視でキャンセルしているので、 $\pi(B_1^3 \cup B_2^3)$ は 3-ball である。

よって $\mathcal{B}' = \pi(B_1^3 \cup B_2^3) \cup B_3^3 \cup \dots \cup B_p^3$ とおくと $\partial\mathcal{B}' = \mathcal{S}'$ であり、 $f(\mathcal{B}) = f'(\mathcal{B}')$ となるので $M(\Sigma') \cong M(\Sigma)$ である。

2 H -move の定義

generalized DS-diagram に G' -move を行うと diagram が得られるが、この diagram は一般には孤立辺を含み、generalized DS-diagram ではない。そこで孤立辺のまわりで同一視 (collapsing と呼ぶ) を行う。最初に孤立辺のまわりの様子を見る。

\mathcal{S} の三角形分割はいくらでも分割可能であり、除去可能辺はいくらでも細かく取れる。細かい細分をとった場合 collapsing をしても diagram は変わらない。ここでは三角形分割は三角形分割になる様なものの中で極小なものとする。

命題 5 孤立辺のまわりは図 9 のいずれかである。ここで実線は通常辺、破線は除去可能辺、2 重点線は孤立辺を表す。ラベルの付いている頂点は G' の頂点であり、 $1 = 3$ であってもよいが、 $2 \neq 1$ かつ $2 \neq 3$ である。ただし (b), (g) はラベル 3 頂点に対応する点が G' の頂点の場合もある。その場合図で点にラベル 3 が付いているものとする。

図 9 (c), (f), (g), (h) は三角形分割にはなっておらず、 \mathcal{S} は三角形分割なので図に描かれていない \mathcal{S} の除去可能辺およびその頂点が面内に存在している。

証明 $\Sigma' = (S', G', f')$ を generalized DS-diagram から G' -move で得られた diagram とし、 G' には孤立辺が存在するとして、そのまわりが図 9 しかないことを見る。孤立辺は 1 つの球面のみにのっていることを注意しておく。

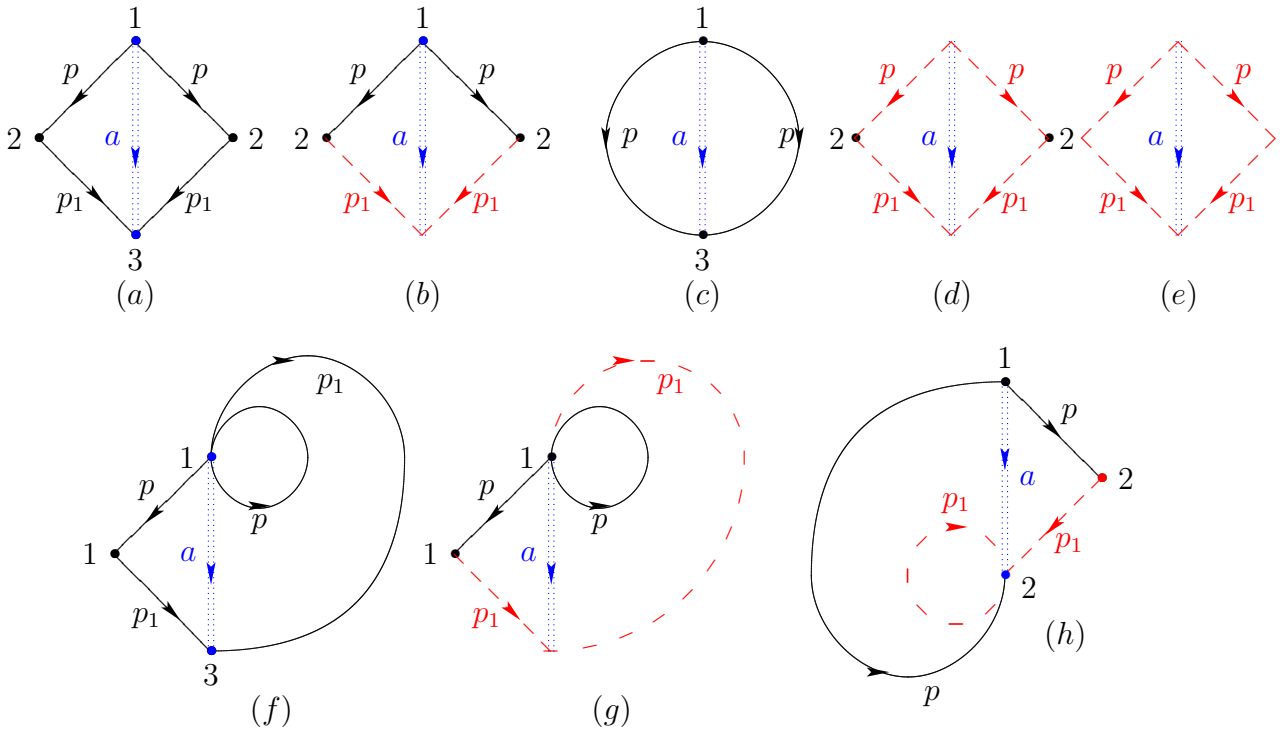


図 9

孤立辺としては

- (1) hoop 辺
- (2) loop 辺
- (3) arc 辺

の 3 種類がある。

孤立辺 l_0 のラベルを a とする。 l_0 が hoop のとき G' の頂点と交わっていない。このとき (d) または (e) である。

l_0 辺が loop のとき、頂点のラベルを 1 とする。この頂点に接続する G' の辺が存在する。この辺の中で最も l_0 寄りの辺を l_1 としそのラベルを p とする。 l_0 を中心に l_1 と対称な位置にある辺を l_2 とする。 l_2 のラベルも p である。 l_1 のもう 1 つの頂点のラベルを 2 とする。

$1 \neq 2$ のとき (b) になるので $1 = 2$ とする。ラベル p 辺は通常辺なのでもう 1 つのラベル p 辺 l_3 が存在する。diagram の条件から l_i の中に loop が存在するので、 l_i の中の 2 つは loop である。 l_1, l_2 がともに loop のとき、 l_1, l_2 が孤立辺をはさんで隣接する 1-gon なので l_3 辺に接続する面が同一視され diagram であることに矛盾する。よって l_1, l_2 の一方のみが loop である。このとき (g) である。

l_0 が arc のときを考える。 l_0 のラベル 1 頂点でない頂点が G' の頂点の場合とそうでない場合とがある。 G' の頂点の場合はそのラベルを 3 とする。

前と同様ラベル 1 頂点に接続する G' の辺の中で最も l_0 寄りの辺を l_1 としそのラベルを p とする。 $l_2, 2$ も同様に決める。

$1 = 2$ のときは前と同じ議論で (f) または (g) となるので $1 \neq 2$ とする。 l_0 のラベル 1 でない頂点が G' の頂点でないか、頂点であっても $3 \neq 2$ であれば (a) または (b) である。

よって $3 = 2$ とする。 l_0, l_1, l_2 のラベル 2 (= 3) 頂点がすべて異なる頂点のときは (a) または (b) である。すべてが同じ頂点のときは (c) である。

l_0 のラベル 2 頂点と l_i ($i = 1, 2$) のラベル 2 頂点が同じ点のとき (f) または (h) になる。ただし (f) は図 9 の (f) においてラベル 1 と 3 とを、 p と p_1 とを入れ替えた図になる。

l_1 と l_2 のラベル 2 頂点と同じ点のときこの頂点もある孤立辺と隣接している。 l_0 のラベル 3 頂点に隣接する通常辺に対し前述の考察を行うことにより l_1 と l_2 が囲む領域の内部に (a) から (h) のいずれかが存在することが分かる。■

G' -move の結果得られた diagram に退化辺が存在する場合、図 9 の孤立辺に隣接する 2 つの面の貼りあわせを行う。これを collapsing と呼ぶ。退化辺のまわりが $(a) \sim (h)$ にしたがって collapsing $(a) \sim$ collapsing (h) と呼ぶ。ただし (e) を行っても diagram に何も変化がないので、この変形は考えない。

collapsing (e) の代わりに collapsing (i) を以下で定義する；孤立辺が hoop でこれと平行な通常辺の hoop が存在する場合、2 つの辺は annulus を張っている。孤立辺なので、同じラベルの通常辺の hoop が反対側にも存在する。この 2 つの annulus を貼り合せる変形を collapsing (i) と呼ぶ。この変形をすると孤立辺の hoop が消え、通常辺の hoop が除去可能辺に変わる。

collapsing (i) 意外の collapsing を行うと G' の頂点のタイプが変わる。どのようなタイプの頂点がでてくるかに関しては証明の中で見る。

次に H -move を定義する。diagram $\Sigma' = (S', G', f')$ に collapsing を行うと別の diagram になるが、以下では変形の結果の diagram も $\Sigma' = (S', G', f')$ と書くことにする。

定義 6 generalized DS-diagram に対し G' -move を行い、得られた diagram に可能な限り collapsing を行う。この操作を H -move と呼ぶ。

diagram $\Sigma_E = (S_E, G_E, f_E)$ を例外形と呼ぶ。ここで $S_E = S^2$ であり、 G_E は 1 個の孤立辺である hoop からなるものとする。 $M(\Sigma_E) \cong S^3$ である。このとき次が成立する。

定理 7 generalized DS-diagram に H -move を行って得られる diagram は例外形 Σ_E でなければ generalized DS-diagram である。

証明のため補題を用意する。

補題 8 collapsing (a)~(h) を行ったときの G' の頂点のタイプの変形は collapsing (b), (d) の有限列で得られる。

証明 図 9 において, ラベル 3 頂点はラベル 1 頂点と見なせるので, ラベル 1 頂点およびラベル 2 頂点の変化を見る。

collapsing (c) のラベル 1 頂点の変形は collapsing (b) のラベル 1 頂点の変化と同じである。

collapsing (a) はラベル 2 頂点を除去可能辺で結んで collapsing (b) を行った後に collapsing (c) を行ったものと見ることができるので (b), (d) の有限列で表せる。

次には「退化している場合」の collapsing (f), (g), (h) を見る。

collapsing (f) 変形は点のまわりの様子だけ見ると, p に接続するラベル 1 頂点で collapsing (b) 変形を行い, 引き続きラベル 1 頂点をラベル 2 頂点と見て collapsing (a) 変形を行ったものである。

collapsing (g) は点のまわりの様子だけ見ると, p に接続するラベル 1 頂点で collapsing (b) を行い, 引き続きラベル 1 頂点をラベル 2 頂点と見て collapsing (b) を行ったものである。

collapsing (h) は点のまわりの様子だけ見ると, a_1 に接続するラベル 2 頂点で collapsing を行い (点のタイプは変わらない), 引き続き collapsing (b) を行ったものである。

以上により退化した場合も (b), (d) の有限列で変形した頂点のタイプになる。 ■

collapsing (b) を行ったときのラベル 1 頂点のタイプの変形を変形 (1) と呼び, ラベル 2 頂点のタイプの変形を変形 (2) と呼ぶ。collapsing (d) を行ったときのラベル 2 頂点のタイプの変形を変形 (3) と呼ぶ。

命題 9 collapsing の結果でてくる頂点のタイプは図 10 および G' の頂点ではない S の頂点のタイプ (*) である。

この命題を示すためには次の 2 つを示せばよい。

- (1) 図 10 に変形 (1), (2), (3) を行って得られるタイプは図 10 の中にあるか, (*) のいずれかである。
- (2) (0) に変形 (1), (2), (3) を行って図 10 のすべてのタイプが得られる。

図 11 および図 12 は変形 (1) による点のタイプの変化である。図 13 および図 14 は変形 (2) による点のタイプの変化である。図 15 および図 16 は変形 (3) による点のタイプの変化である。

頂点のタイプの変化をまとめたのが図 17 である。ただしここでは G' の頂点でないタイプ (*) を 3 つに分けてある。(*)₁ は退化辺の内部, (*)₂ は面の内部, (*)₃

は通常辺の内部のタイプである。また実線は変形 (1), 破線は変形 (2), 2 重点線は変形 (3) を表わす。よって命題 9 の成立が示される。 ■

補題 10 diagram Σ' においては有限回の collapsing しか実行できない。

証明 図 17 を見ると分かるように G' の各頂点に有限回の変形 (1), (2), (3) を実行すると G' の頂点でなくなる。また collapsing (i) を実行すると頂点は変化せず, 孤立辺 (hoop) が 1 個, 通常辺 (hoop) が 1 組なくなる。 G' の頂点はおよび孤立辺は有限個なので collapsing を無限回実行することはできない。 ■

定理の証明を完成させよう。

可能な限り collapsing を行って得られる diagram を Σ' とする。

Σ' が孤立辺を持たないとき頂点のタイプはすべて (0) である。このとき diagram は generalized DS-diagram であることが分かる。

孤立辺が存在するときこれを l とする。 l 上に G' の頂点が存在するときはこの頂点に接続する通常辺が存在するが, 命題 5 の証明の議論と同様にして, この中には arc 辺が存在することが分かる。このとき collapsing が可能であり仮定に矛盾する。

よって l には G' の頂点が存在せず, l は hoop である。 G' に l 以外の成分が存在しないときは diagram は例外形 Σ_E である。

l 以外に G' の成分が存在するとする。このとき l を境界にもつ面 X^+ および X^- が存在するが, ∂X^+ にはこの hoop 以外の成分 l_1 が存在する。

l_1 が孤立辺になることはありえないので l_1 は通常辺である。この通常辺に G' の頂点が存在するときは collapsing (d) が可能であり, 矛盾である。よって l_1 も hoop である。このときは collapsing (i) が可能であり矛盾する。以上により定理が証明された。 ■

補題 10 の証明では頂点のタイプおよび変化をすべて調べたが, 証明だけなら調べなくても次の様にできる

G' の通常辺の f' による像となる $f(G')$ の辺の個数を $e(G')$, G' の重複度 i の頂点の f' による像となる $f(G')$ の頂点の個数を $v_i(G')$ とする。 $\Sigma = (S', G', f')$ の複雑度を

$$c(\Sigma) = (e(G'), v_4(G'), v_3(G'), v_2(G'), v_1(G'))$$

とする。順序は辞書式順序とする。変形 (1), (2) および collapsing (i) で $e(G')$ は 1 少なくなる。変形 (3) では変化は点のタイプによるが $(v_4(G'), v_3(G'), v_2(G'), v_1(G'))$ は小さくなり, $e(G')$ は変わらない。よって有限回しか実行できない。

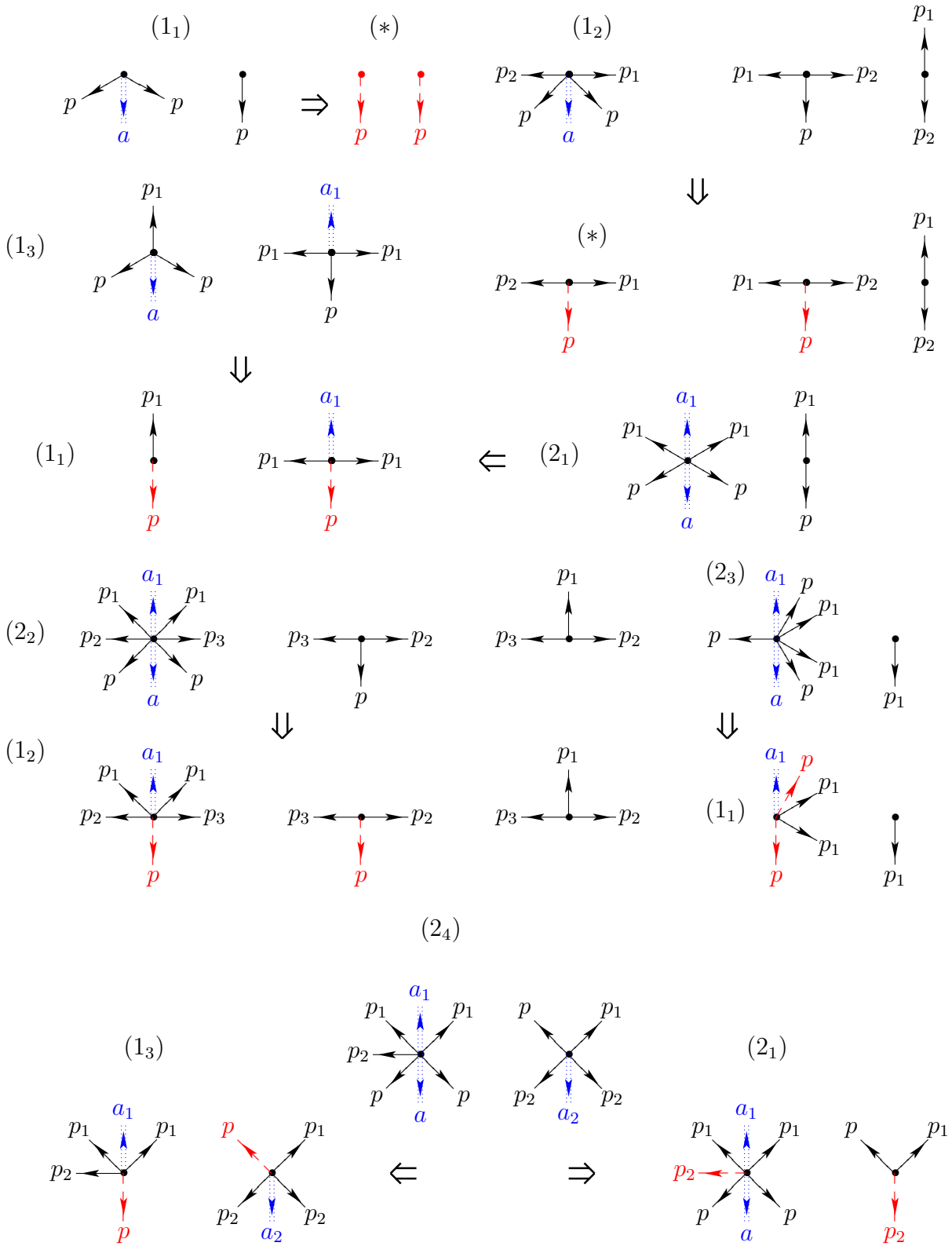


图 11

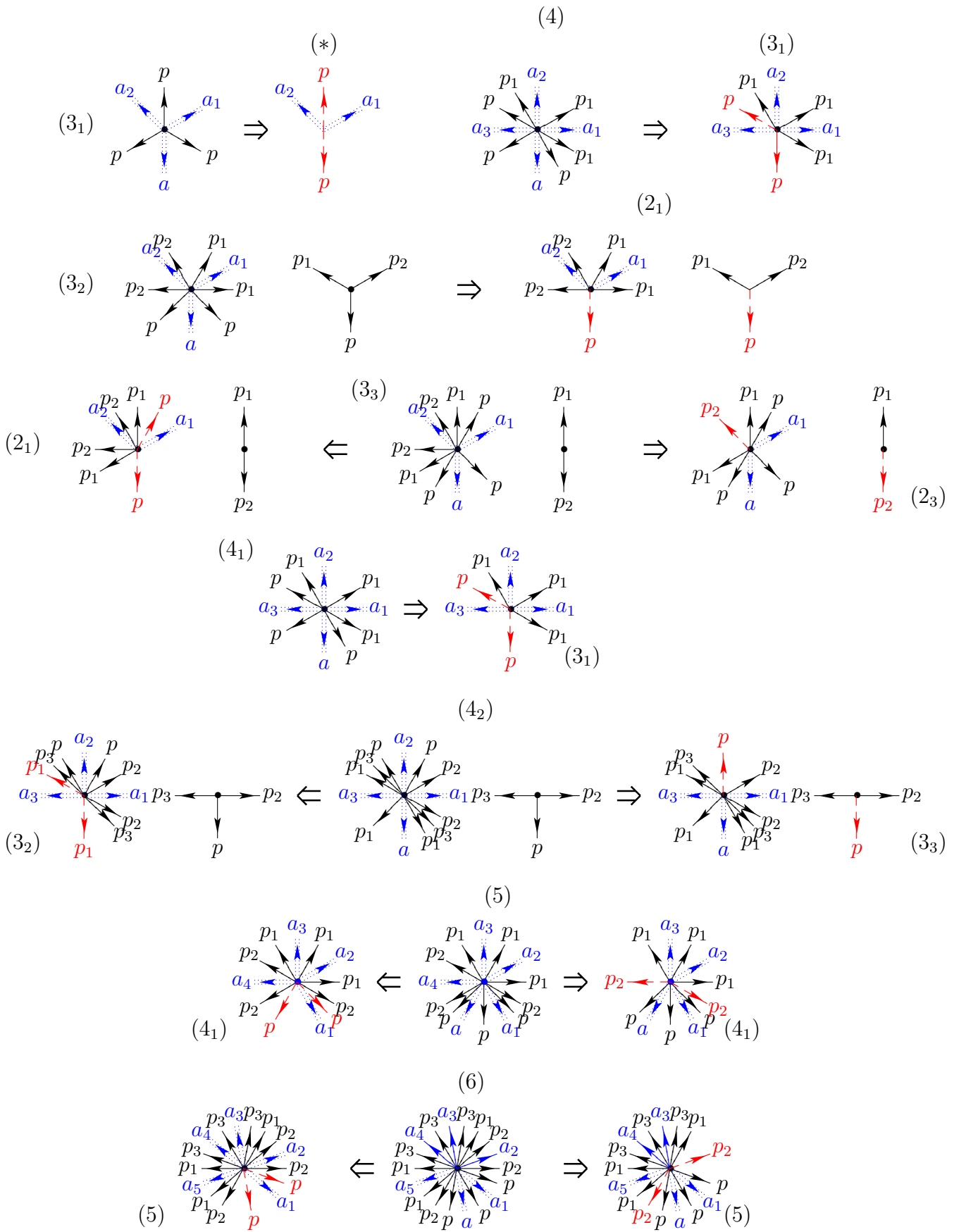


图 12

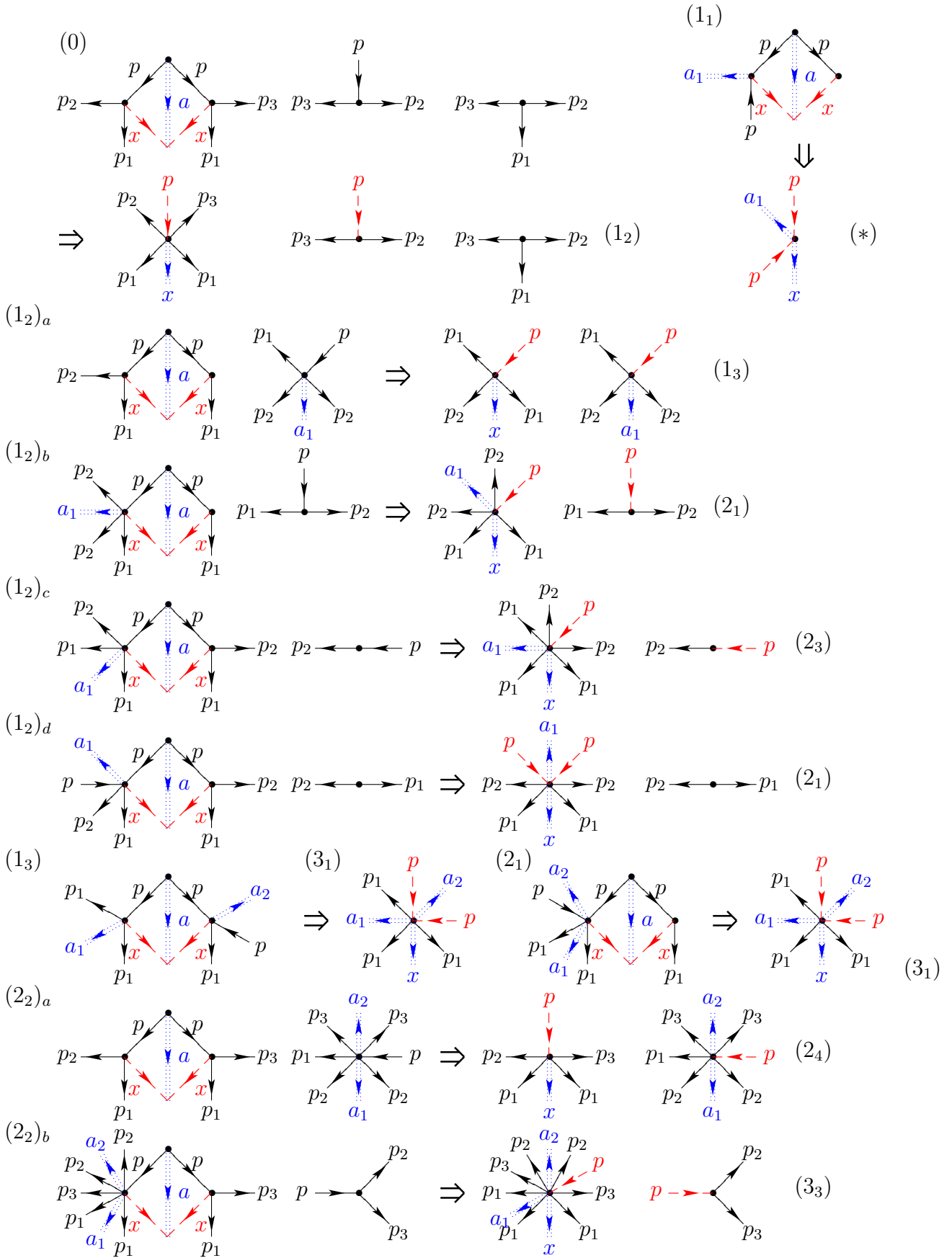


图 13

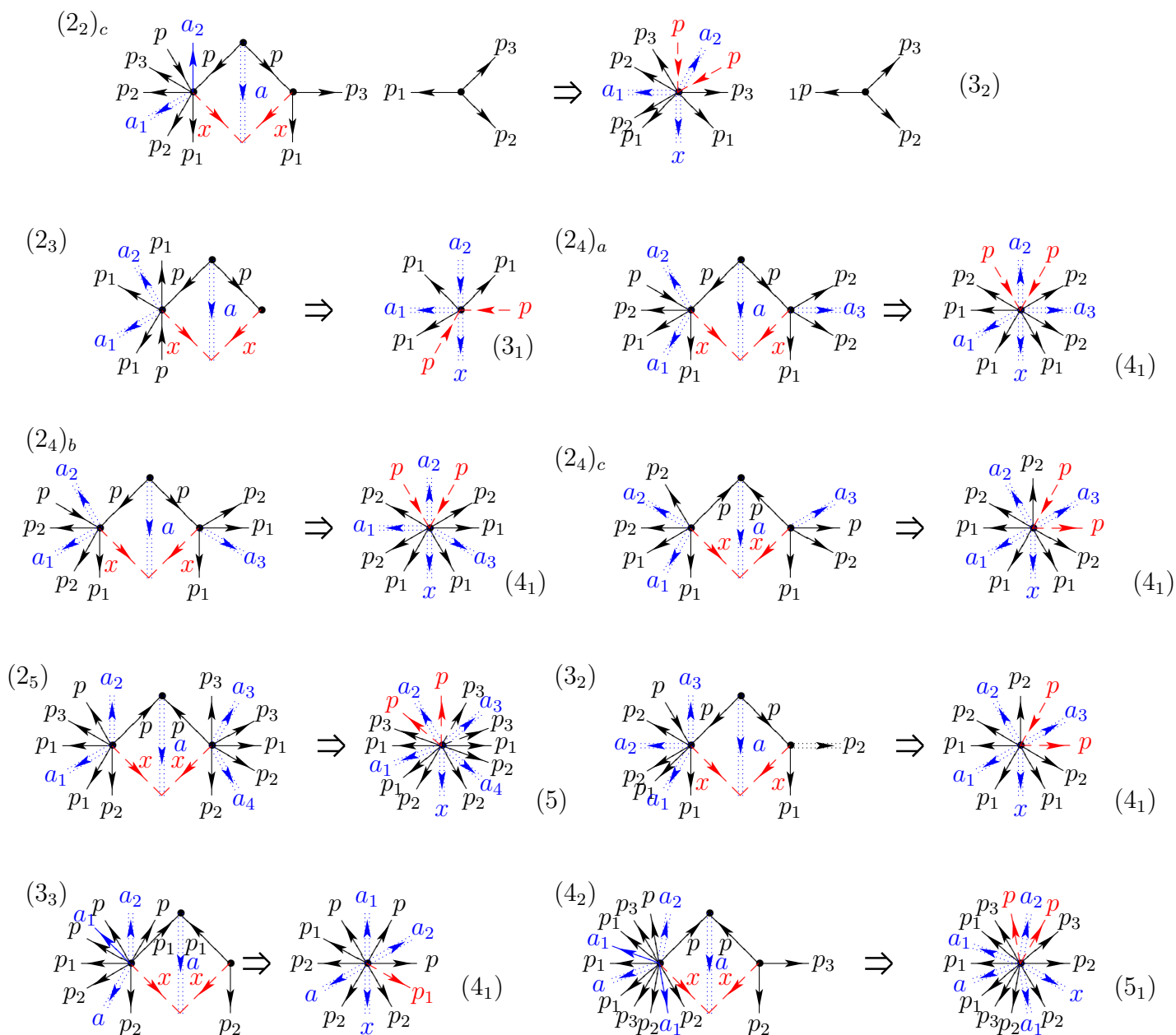


图 14

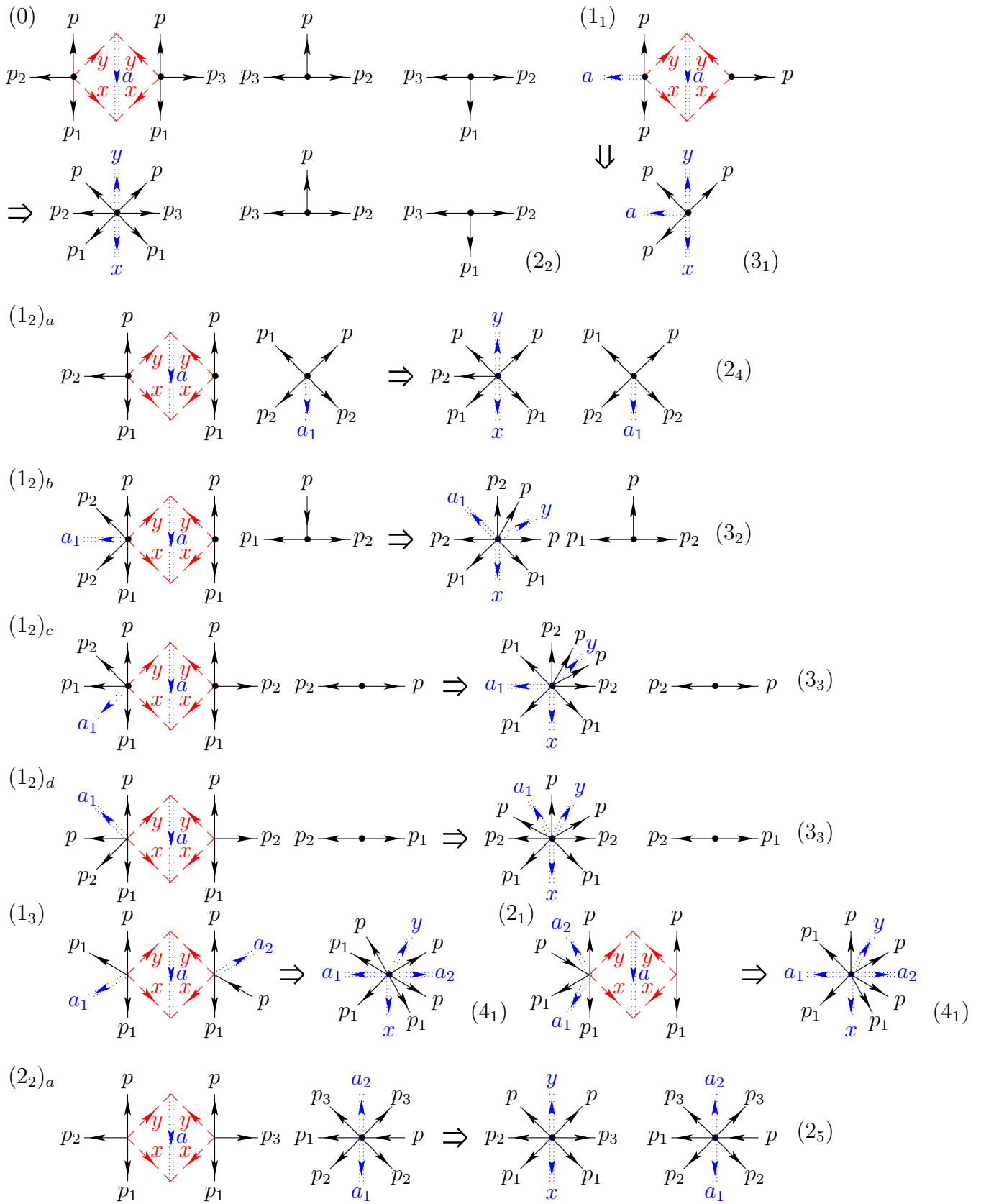


图 15

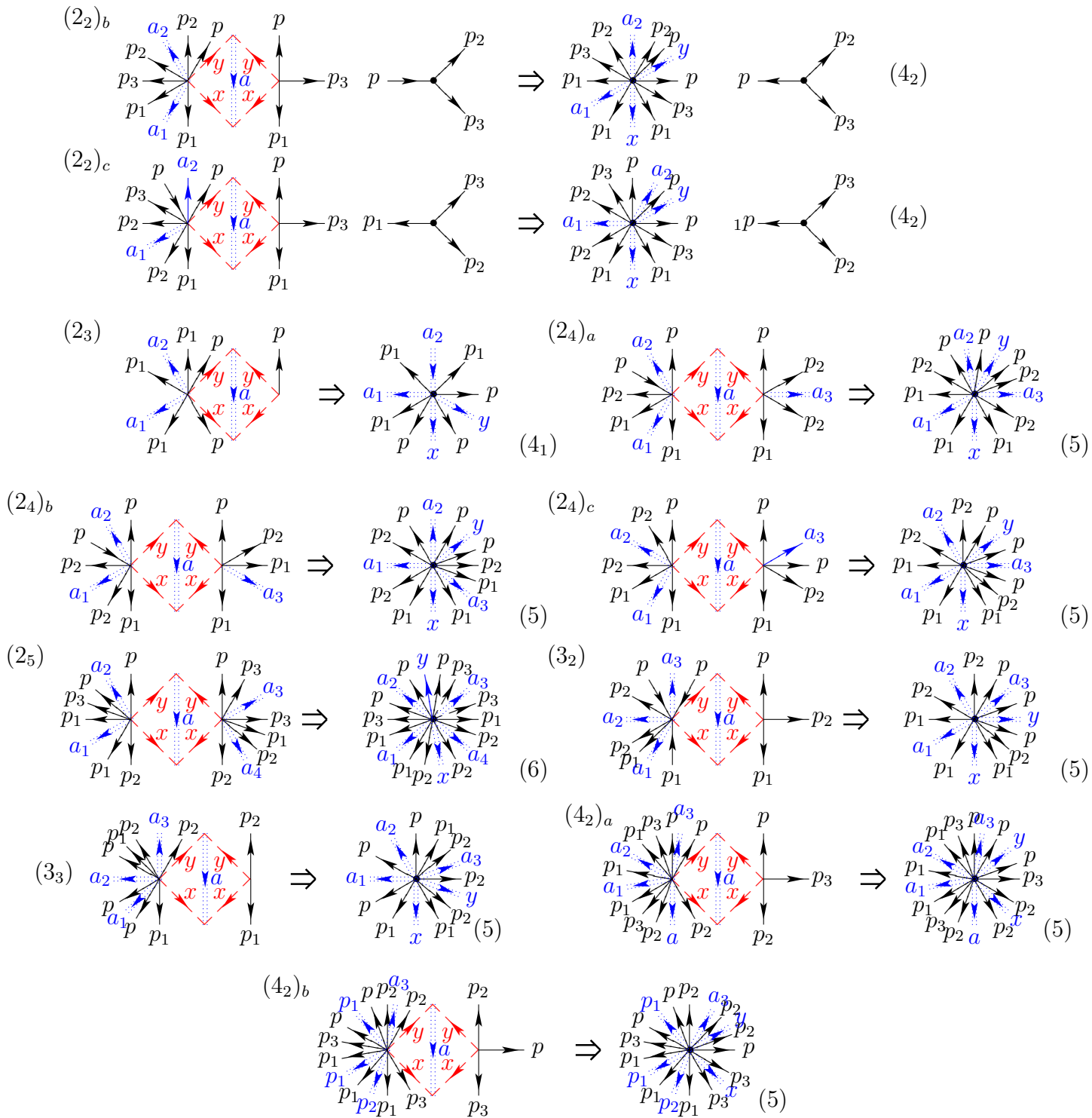


图 16

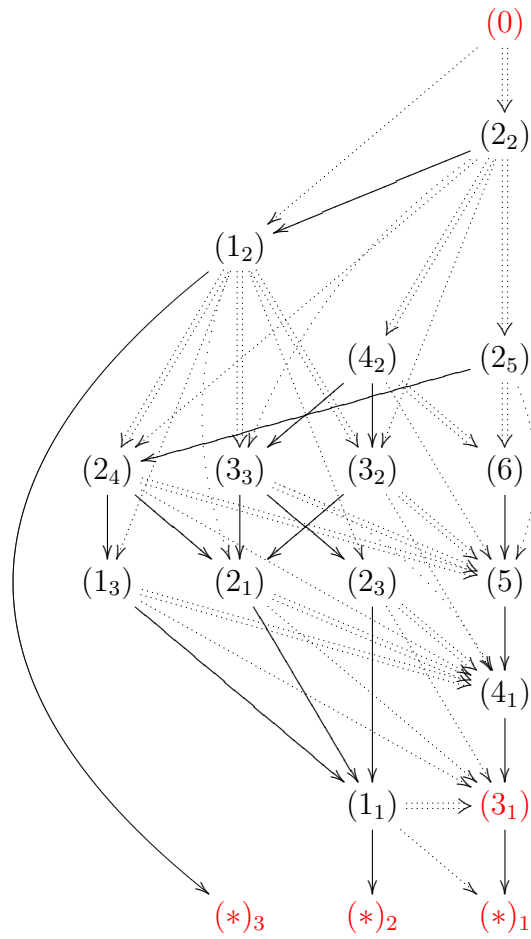


図 17

3 DS-diagram の変形

DS-diagram は 1 個の球面からなるので、 H -move を実行することはできない。DS-diagram に対しては、 S -move を一回行い球面数 2 の generalized DS-diagram をつくり、それに対して H -move をすることを、DS-diagram の H -move と呼ぶことにする。

H -move の特別な場合として、「1 辺形つぶし」がある。

図 18 の様に DS-diagram が 1 辺形を含むとき、 G と 1 点で交わる 1 辺形の少し外側の loop で S -move を行い、自己隣接する 4 辺形 (図 18 では X^+) で H -move を行くと、1 辺形は消滅する。これを spine 上で行う操作が「1 辺形つぶし」である。spine 上で行うと collapsing がどのようになるか分かりにくいだが、diagram 上で見ること例外形でなければ generalized DS-diagram でとまることが分かる。

図 19 上は [1] の DS-diagram (2-3) である。1 辺形を含むので、ラベル α 辺 loop

で S -move を行い X^+ で G' -move を行くと、図 19 下の様になる。唯一の孤立辺 c_2 で collapsing を行くと (定義に従えば除去可能辺で分割して collapsing を 2 回行う必要がある) $G' = \emptyset$ となる。

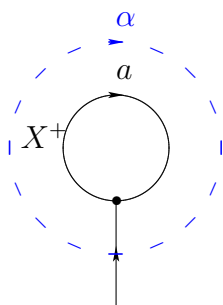


図 18

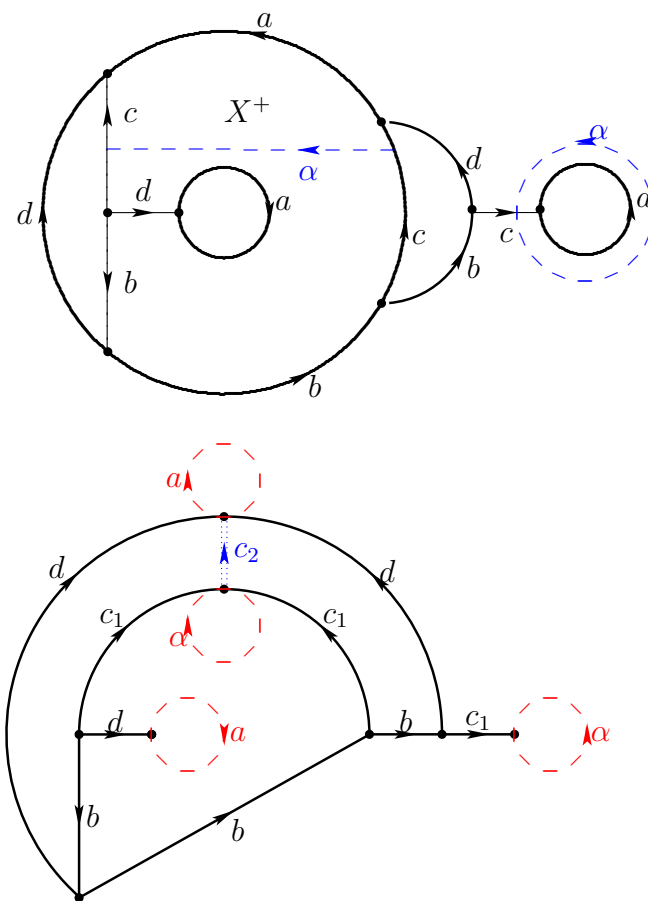


図 19

この様に DS-diagram に H -move を行った結果は例外形でなければ generalized DS-diagram にはなるが、DS-diagram にならない場合もある。DS-diagram にならない場合は特定できて、多様体が向き付け可能の場合、次に限る。

- (1) 例外形 Σ_E , 多様体は S^3
- (2) $\Sigma(2, 1)$, 多様体は $L(2, 1)$
- (3) $\Sigma(3, 1)$, 多様体は $L(3, 1)$
- (4) $\Sigma(0, 1)$, 多様体は $S^2 \times S^1$
- (5) generalized DS-diagram の面の中に disk でない面が存在する

ただし $L(p, q)$ は lens space で $\Sigma(p, q)$ は $p \geq 4$ のときは $L(p, q)$ の横山の標準形である。 $p \leq 3$ のときは generalized DS-diagram に拡張されたものとする。[5] の記法で $\Sigma(2, 1) = \Sigma_\emptyset, \Sigma(3, 1) = \Sigma_{3W}, \Sigma(0, 1) = \Sigma_h$ とする。

(4) 以外の (5) の場合簡単な generalized DS-diagram で表される多様体または $S^2 \times S^1$ の connected sum になる。

以上の様に DS-diagram でないものがでてきても、prime なものに限定すれば、よく知られたもの意外は DS-diagram を考えればよい。

最後の例として自己隣接退化辺を含む例を見よう。図 20 は Seifert-Threlfall の本の 9 章の example(61 節 Example 2) の octahedron space を DS 化したものである。これは [2] により DS 化されたものである。

ラベル U 辺が自己隣接退化辺になっている。「退化辺つぶし」もできるのだが、そうすると折角の退化自己隣接辺が消えてしまうので図 20 の破線の loop で S -move を行う。図 20 は破線のラベル、破線と同一視される部分などを図には書いてはいない。

図 21 は G' -move をする前段階として、 S -move で実線に変わる辺に α_1 から α_6 とラベルをつけ、それと同一視される辺を書き込んだものである。ただし S -move で 2 つの辺に分けられた辺は別のラベルをつけるべきだが、そうはしていない。次図 22 では切り離されてしまった辺には別のラベルをつけてある。 X_b が二つに分かれた場合は X_{b1}, X_{b2} 等である。

破線で書いてあるのは ∂X^+ の辺のラベルを持つ辺であり、 G' -move を行うと消える辺である。

図 22 上は G' -move を行った diagram である。破線は除去可能辺である。この diagram は 2 重点線の辺を退化辺としてもつ。これを collapsing したのが図 22 下である。破線は collapsing された結果生じた除去可能辺である。

結果の DS-diagram は $K4 - 17$ と名づけられた DS-diagram であり、多様体は S^3/P_{24} である。

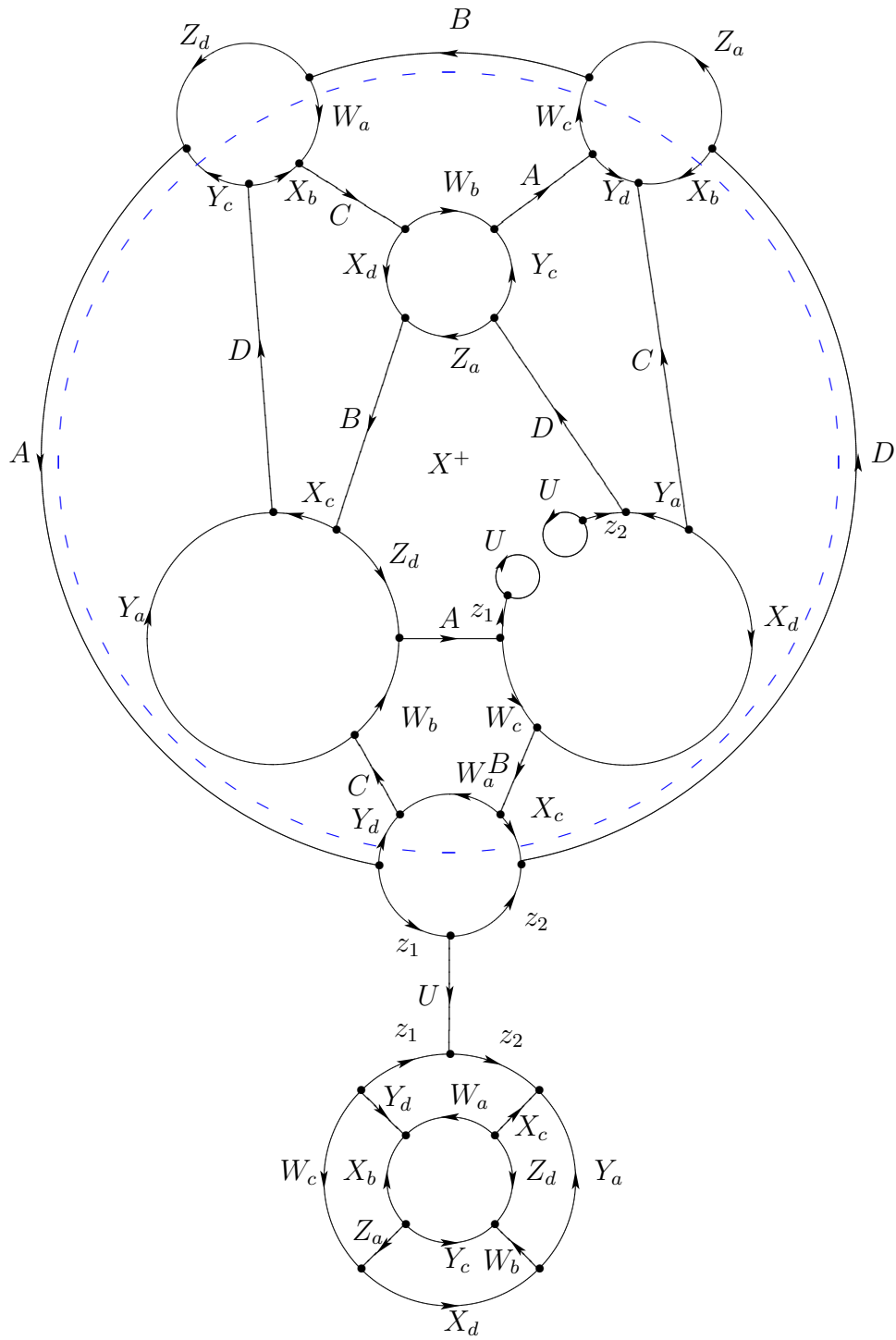


图 20

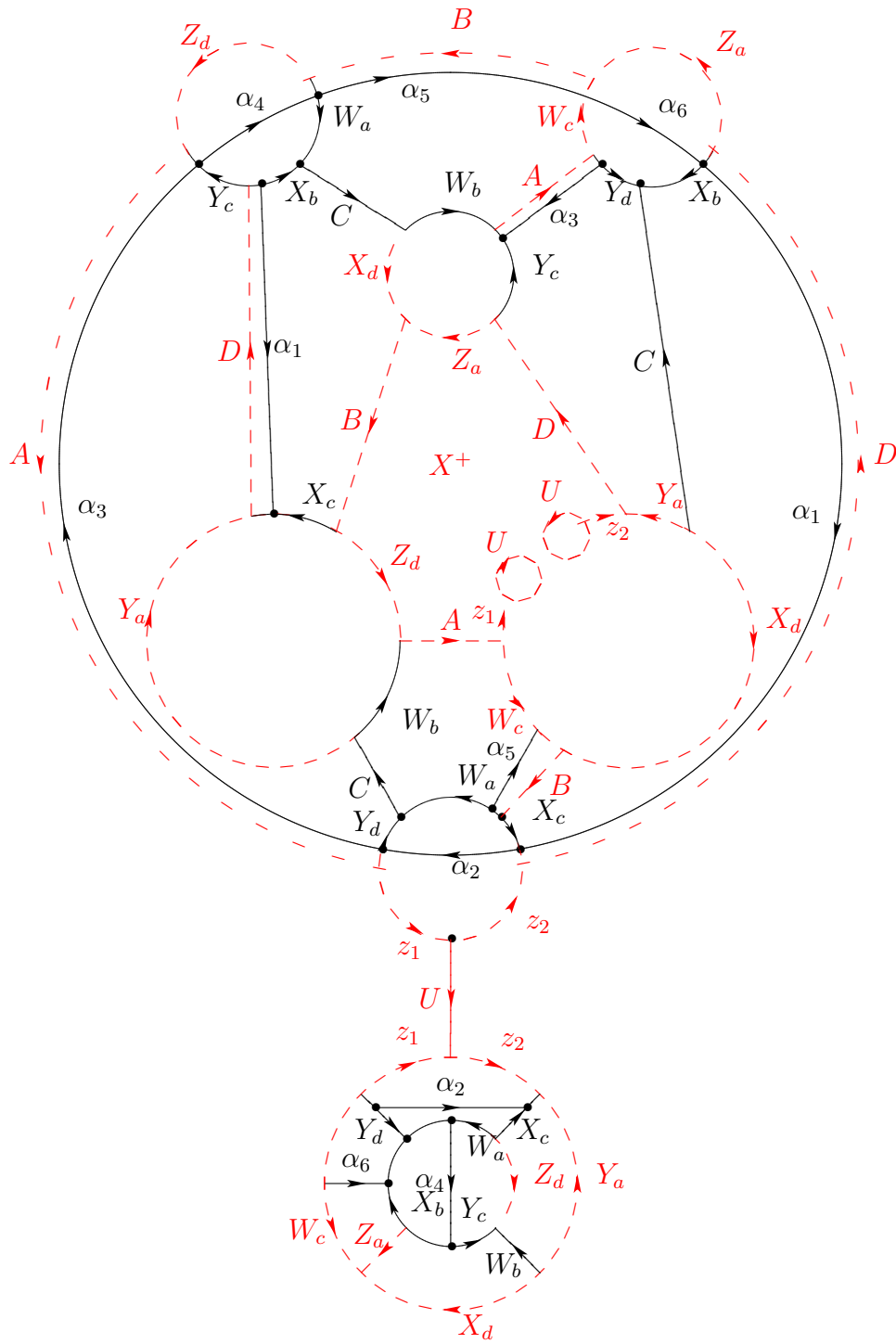


图 21

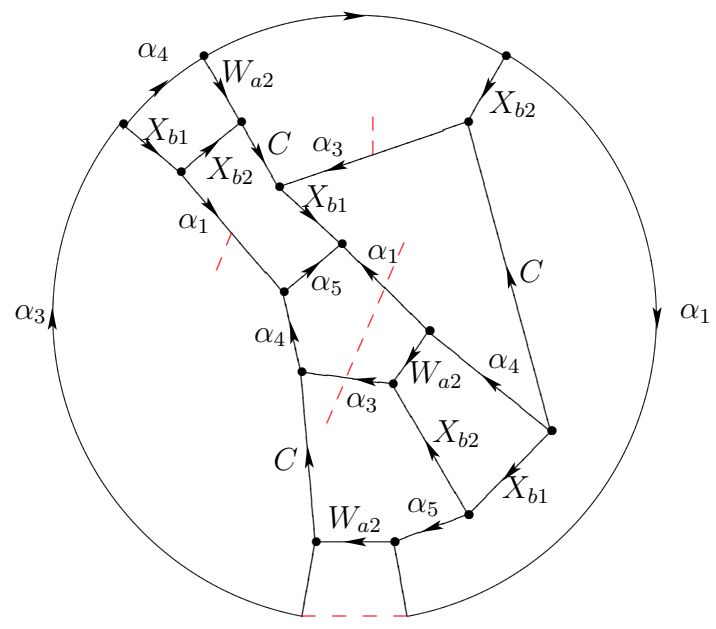
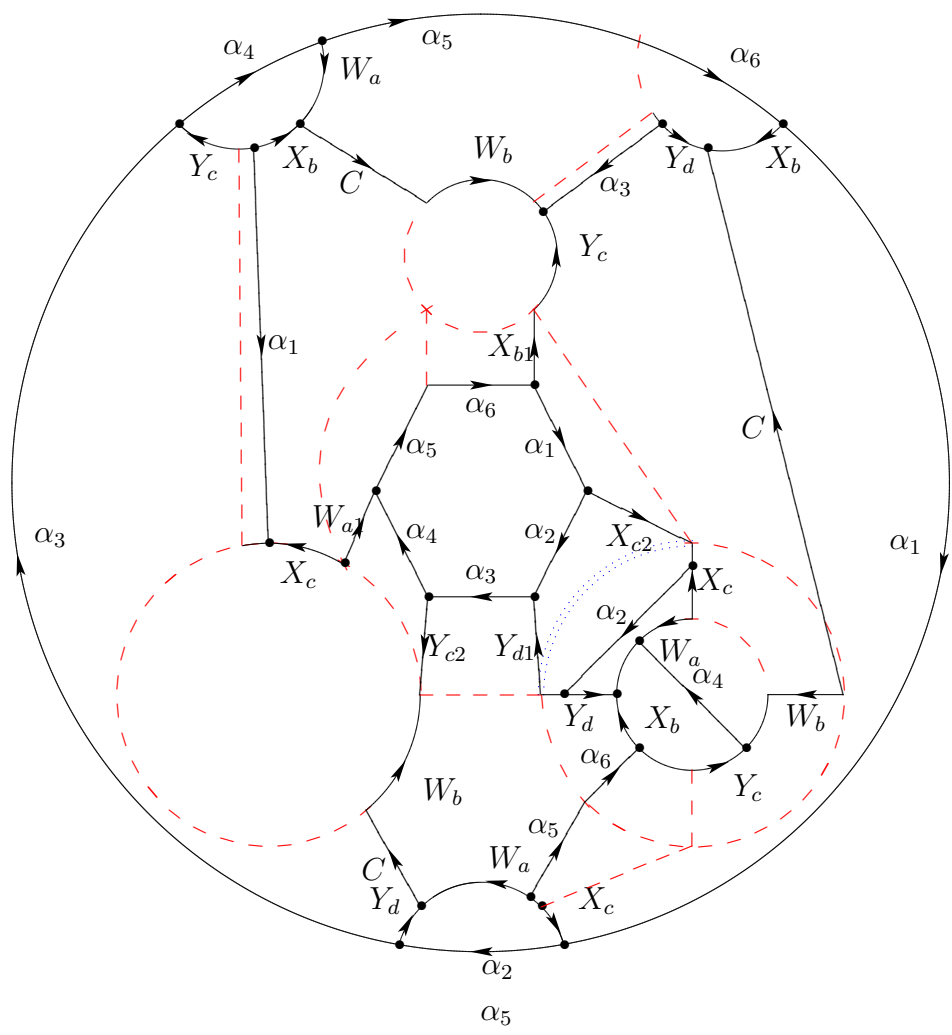


图 22

参考文献

- [1] Ikeda, H and Inoue, Y, Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math. 2 (1985) 169–186 575 (1985) 28–41
- [2] 池田裕司, 山下正勝, 横山和夫, Polygram の DS 化, 箱根セミナー 1990 記録 11-31
- [3] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, HAKONE SEMINAR vol.17 (2001) 35-56
- [4] Kouno, M, GS 変形について, HAKONE SEMINAR vol.18 (2002)57–70
- [5] Kouno, M, DS-diagram の種数について, HAKONE SEMINAR vol.23 (2007)
- [6] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math. 34 (2011) 165–183