DS-diagram の基本定理について

河野正晴 (北見工業大学)

このノートでは DS-diagram の基本定理の証明を完成させる。

「基本定理」とは次の型の定理である；DS-diagram の間の変形 $M_1, \ldots, M_k$ が定義されているとする。Σ, Σ' を任意の DS-diagram とする。このとき

$$M(\Sigma) \cong M(\Sigma') \iff \Sigma \text{ から変形の有限列で } \Sigma' \text{ が得られる}$$

ただし $M(\Sigma)$ は Σ が表現する多様体で,「$\cong$」は同相を意味する。

1 これまでの結果

fake sueface は [1] で定義された。

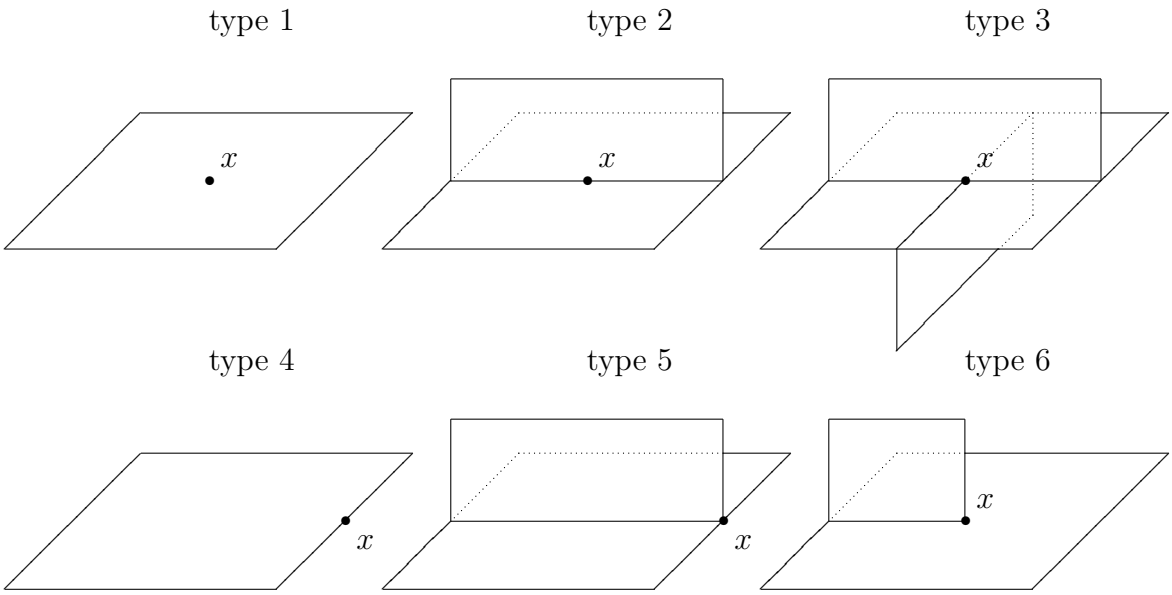

図 1

定義 1 [fake surface] 2-polyhedron P の各点 x の近傍が図 1 のいずれかであるとき，P を **fake sueface** と呼ぶ。点のタイプが type 1,2,3 のみのとき colsed という。このとき type 1 の点全体の集合を $F(P)$，type 2 の点全体の集合を $E(P)$，type 3 の点全体の集合を $V(P)$ と書く。

DS-diagram は [2] で定義された。

定義 2 [DS-diagram] S^2 を 2–sphere，G を S^2 内の 3-regular graph で $S^2 - G$ の各成分は open disk であるとする。S^2 からある closed fake surface P への全射である局所同相写像 f が次を満たすとき $\Sigma = (S^2, G, f)$ を **DS-diagram** という。$V(G)$ を G の頂点集合，$E(G)$ を G の辺集合とする。

(1) $f_{|V(G)} : V(G) \longrightarrow V(P)$ は pointwise に 4 対 1 の写像

(2) $f_{|E(G)} : E(G) \longrightarrow E(P)$ は pointwise に 3 対 1 の写像

(3) $f_{|S^2-G} : S^2 - G \longrightarrow F(P)$ は pointwise に 2 対 1 の写像

3-ball B^3 の境界を DS-diagram の S^2 と見なす。f を S^2 から B^3 まで拡張して $f : B^3 \longrightarrow B^3/f$ とすると B^3/f は 3 次元多様体になる。これを Σ が表現する多様体と呼び，$M(\Sigma)$ と表す。

DS-diagram は写像を用いて定義されるが，通常はラベル付きのグラフで書かれる。そこで次を定義する ([9])。

定義 3 [labeled graph] $L = (S^2, G, g)$ が**ラベル付きグラフ** (*labeled graph*) であるとは以下の条件を満たすときをいう；S^2, G は 定義 2 と同じとする。G_g を 4-regular graph, g を G から G_g への onto な local homeomorphism で

(1) $g_{|V(G)} : V(G) \longrightarrow V(G_g)$ は pointwise に 4 対 1

(2) $g_{|E(G)} : E(G) \longrightarrow E(G_g)$ は pointwise に 3 対 1

DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ に対し $g = f|_G$ とおくと (S^2, G, g) はラベル付きグラフである。これを $L(\Sigma)$ と書く。

定義 4 2 つの DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ と $\Sigma' = (S^2, G', f')$ が**同値**であるとは，S^2 から S^2 への同相写像 F と S^2/f から S^2/f' への同相写像 H が存在して $f' \circ F = H \circ f$ を満たす事とする。このとき $\Sigma \equiv \Sigma'$ と書く。

2 つのラベル付きグラフ $L = (S^2, G, g)$ と $L' = (S^2, G', g')$ が**同値**であるとは，S^2 から S^2 への同相写像 F と S^2/f から S^2/f' への同相写像 H が存在して $g' \circ F = H \circ g$ を満たす事とする。このとき $L \equiv L'$ と書く。

$\Sigma \equiv \Sigma'$ ならば $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ が成立するが，この逆も成立する ([9])。

命題 5 2つの DS-diagram Σ, Σ' に対して $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ ならば $\Sigma \equiv \Sigma'$ が成立する。

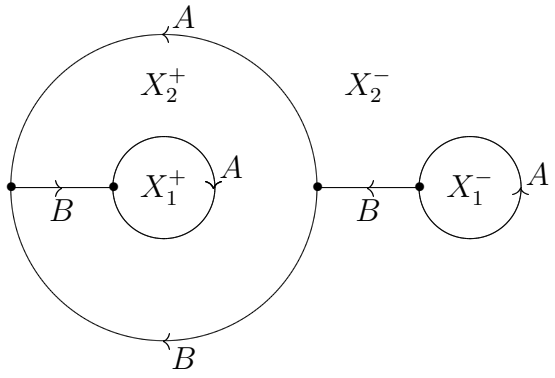

図 2

図 2 はラベル付きグラフの例である。G の辺 e が $g(e) = A$ (ただし A は G_g の辺で oriented とする) となるとき辺 e にラベル A を付ける。図 2 において $S^2 - G$ は 4 つの open disk になるが，2 つは，その境界のラベルが A であり，残りは $ABAB^{-1}B^{-1}$ である。ただし A^{-1} はラベル A を逆向きに読むことを意味する。ラベル A を境界にもつ disk を X_1^+, X_1^-，ラベル $ABAB^{-1}B^{-1}$ を境界にもつ disk を X_2^+, X_2^- とすると，$f(X_i^+) = f(X_i^-)$ とすることにより S^2 から fake surface への写像 f で $g = f_{|G}$ となるものが構成できる。すなわち DS-diagram Σ で $L(\Sigma)$ が図 2 となるものが存在する。命題 5 よりこのような DS-diagram は一意的なので，ラベル付きグラフが DS-diagram を定義していると考えることができる。

山下は [12] で表現する多様体を変えない変形を定義した。

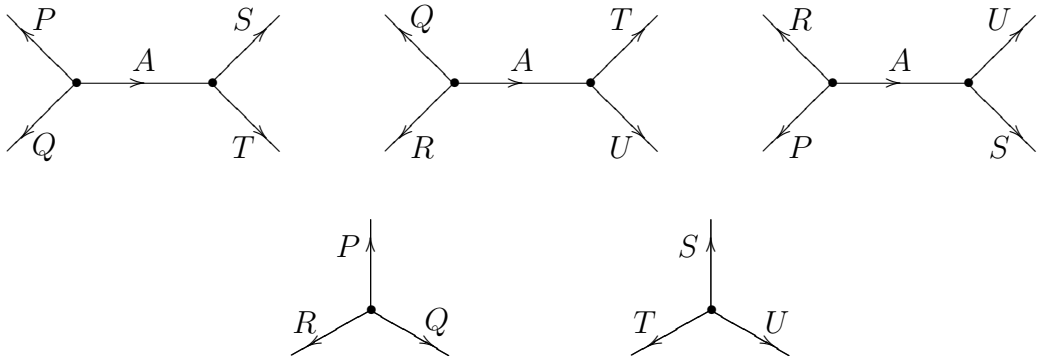

図 3

図 3 の DS-diagram を図 4 の DS-diagram に変形する変形を type I^+ の変形と呼ぶ。
図 4 の DS-diagram を図 3 の DS-diagram に変形する変形を type I^- の変形と呼ぶ。
type I^+，type I^- を併せて type I の変形と呼ぶ。

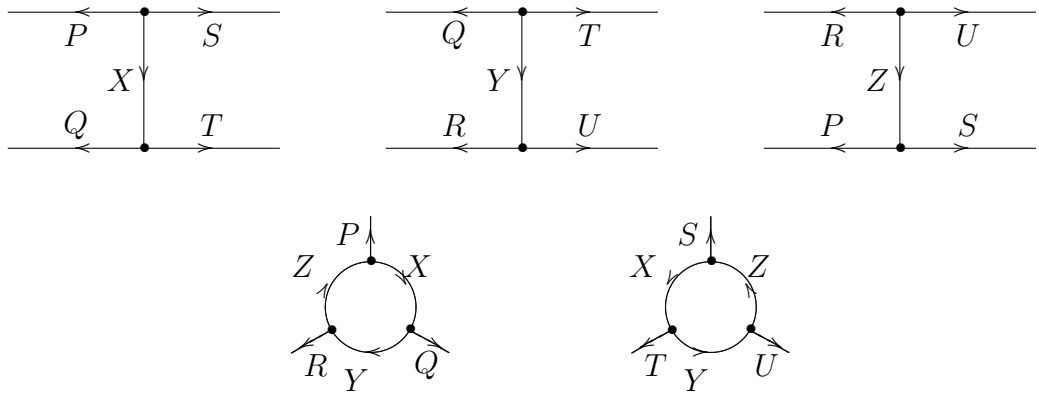

図 4

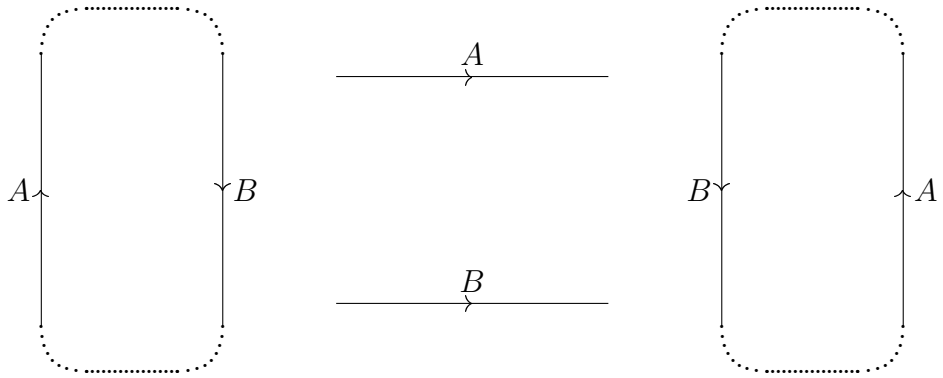

図 5

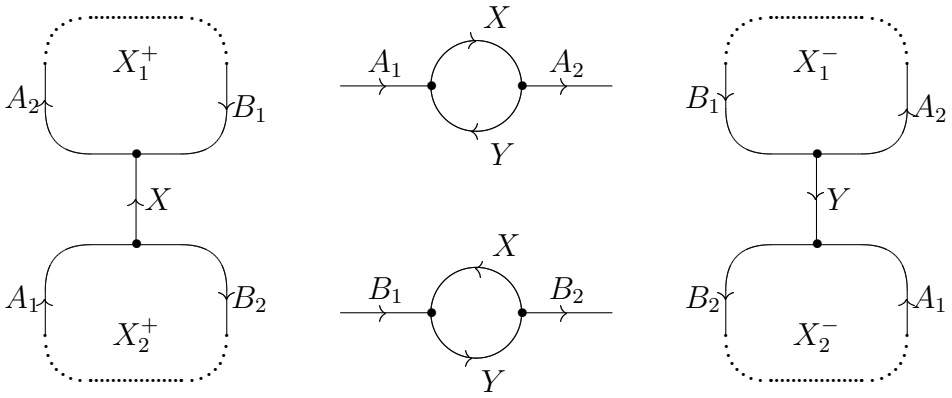

図 6

図 5 の DS-diagram を図 6 の DS-diagram に変形する変形を type II$^+$ の変形と呼ぶ。図 6 の DS-diagram を図 5 の DS-diagram に変形する変形を type II$^-$ の変形と呼ぶ。

type II$^+$，type II$^-$ を併せて type II の変形と呼ぶ。([10],[11])

命題 6 type I および typeII の変形は DS-diagram の表現する多様体を変えない。

type I$^-$ 変形は 3 辺形を 1 点につぶす変形と見ることができる。type II$^-$ 変形は 2 辺形を 1 点につぶす変形と見ることができる。

type II$^-$ で面 X_1^+ と面 X_2^+ が同じ面である場合を考えると，新しくできる面が annulus になり disk にならないので，変形した結果は DS-diagram にならない。しかしこの変形は有用なのでこの場合も type II$^-$ 変形と呼ぶことにして，DS-diagram の概念を拡張する。横山により extended DS-diagram が定義されている ([14])。以下ではグラフといったら hoop (vertex を含まない loop) も含むものとし，vertex をもたないものもグラフとして許容する。

定義 7 [extended DS-diagram] S^2 を 2–sphere，G を S^2 内の (連結とは限らない) 3-regular graph とする。S^2 からある closed fake surface P への全射である局所同相写像 f が次を満たすとき $\Sigma = (S^2, G, f)$ を **extended DS-diagram** という。$V(G)$ を G の頂点集合，$E(G)$ を G の辺集合とする。

(1) $f_{|V(G)} : V(G) \longrightarrow V(P)$ は pointwise に 4 対 1 の写像

(2) $f_{|E(G)} : E(G) \longrightarrow E(P)$ は pointwise に 3 対 1 の写像

(3) $f_{|S^2-G} : S^2 - G \longrightarrow F(P)$ は pointwise に 2 対 1 の写像

(4) $F(P)$ の各成分 X に対し $f^{-1}(X)$ は 2 つの成分をもつ。この 2 つの成分は通常 X^+, X^- と書かれる。

DS-diagram では (4) は自動的に満たされるが extended DS-diagram では自動的には満たされないので条件として加える。

3-ball B^3 の境界を DS-diagram の S^2 と見なす。f を S^2 から B^3 まで拡張して $f : B^3 \longrightarrow B^3/f$ とする。B^3/f は 3 次元多様体になる。これを Σ が表現する多様体と呼び，$M(\Sigma)$ と表すのは DS-diagram と同様である。

extended DS-diagram に対して命題 5 は成立しないが，一意的に extended DS-diagram を定めないラベル付きグラフのタイプは分かる。

図 7 はその 1 つ目のタイプである。右側の A, B の向きはすべて逆向きの場合もある。$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の部分にはグラフがある。このとき対応する DS-diagram として $f(U_1) = f(V_1)$ かつ $f(U_2) = f(V_2)$ になるものと，$f(U_1) = f(V_2)$ かつ $f(U_2) = f(V_1)$ になるものの 2 通りが存在する可能性がある。

2 つ目は図 8 の様に hoop が 3 重に hoop に移るタイプである。このとき $f^{-1}(A) = \ell$ となる hoop ℓ にはラベル $3A$ を付けることにする。ℓ の近くの点 x に対し $f(x) = f(x_i)$ となる点が ℓ を $\dfrac{2\pi}{3}$ まわした点の近くにある場合 $(i = 1)$ と $-\dfrac{2\pi}{3}$ まわした

点の近くにある場合 $(i=2)$ とが考えられる。ただし α_1, α_2 の部分が空のとき 2 つの extended DS-diagram は同値になる。この extended DS-diagram を $\Sigma(3,1)$ と名付ける。$\Sigma(3,1)$ が表現する多様体は lens space $L(3,1)$ である。

ラベル付きグラフは extended DS-diagram を一意に定めないので，ラベル付きグラフを extended DS-diagram と見なすのは一般的には問題があるが，例外が分かっているのに加え，我々が考える extended DS-diagram は DS-diagram から変形で与えられるものなので，DS-diagram で確定している写像 f を引き継ぐと考えれば，問題は起こらない。よって我々はラベル付きグラフで extended DS-diagram が表されていると考える。

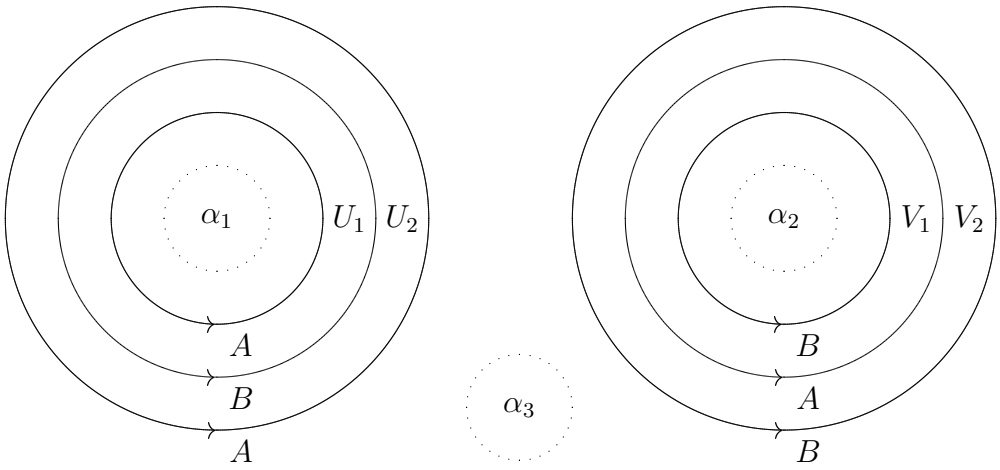

図 7

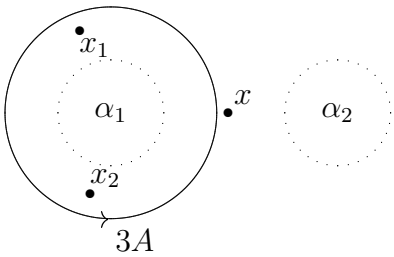

図 8

flow-spine は 石井により [7] で定義された。多様体 M 内の flow を disk でせき止めることにより closed fake surface が得られる。これを石井は flow-spine と呼んだ。

池田はこの flow-spine から組合せ的な性質を抽出して E-cycle の概念を提出した ([3])。

定義 8 [E-cycle] $\Sigma = (S^2, G, f)$ を extended DS-diagram とする。G の cycle $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ が次の条件をみたすとき **E-サイクル** (*E-cycle*) といい，E-サイクルをもつ extended DS-diagram を **extended DS-diagram with E-cycle** という。

(1) $f(E)$ は $f(G)$ のオイラー回路である。

(2) E は S^2 を 2 つの成分に分ける。X を $f(S^2)$ の任意の面とし，$f^{-1}(X) = X^+ \cup X^-$ とする。X^+ が一方の成分に属しているとき，X^- はもう一方の成分に属している。

(2) は S^2 を地球，E を赤道と思うと，$\pm$ の符号を適当につけると，北半球の面のラベルは $+$ に，南半球の面のラベルは $-$ にできることを意味する。

flow-spine は extended DS-diagram with E-cycyle であるが，逆が成立することを石井は [8] で示した。[3] の結果とあわせて次が成立する。

定理 9 P を flow-spine とする。このとき extended DS-diagram with E-cycle $\Sigma = (S^2, G, f)$ が存在して $P = f(S^2)$ となる。
逆に extended DS-diagram with E-cycle $\Sigma = (S^2, G, f)$ に対して flow-spine P で $P = f(S^2)$ となるものが存在する。

石井は [8] において flow-spine に対する基本定理を証明した。

定理 10 Σ_i，Σ' を flow-spine から得られる extended DS-diagram with E-cycle とする。このとき次が成立する。

$$M(\Sigma) \cong M(\Sigma') \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma' \text{ は有限回の regular move および surgery move で } \Sigma \text{ から得られる。}$$

ここで regular move とは (1) first regular move (組合せ的には E-cycle を保つ type I 変形) と (2) second regular move (組合せ的には E-cycle を保つ type II 変形) であり，surgery move とは flow の closed orbit c の正則近傍の中で心棒 c の向きを逆向きに変えた flow から得られる flow-spine へ変形するものである (詳しくは [8], [8] では E-data の変形として記述している)。

石井の flow-spine に対する基本定理を extended DS-diagram に対する基本定理に翻訳するためには次の結果を必要とする。この命題は横山 ([13]) によって証明された。

命題 11 surgery move は type I または type II の有限列で実現できる。

池田・山下・横山はextended DS-diagramを変形してextended DS-diagram with E-cycleにできることを証明した([5])。[5]ではDS-diagramに関して証明しているが，extended DS-diagramに関しても同様の議論で証明することができる。

定理 12 extended DS-diagramが与えられたときtype Iおよびtype IIの有限列でextended DS-diagram with E-cycleに変形できる。

以上に述べたことを総合するとextended DS-diagramに対する基本定理は証明されているといえる。

しかしDS-diagramに関する基本定理はどうであろう。E-cycleをつけるところまでは同様にできるが，石井の結果を用いるとき，変形の途中でDS-diagramをはみ出して，extended DS-diagramになる可能性が残る。そこを迂回できればDS-diagramに関する基本定理は同様に証明できる。次の節で次の命題を証明する。

命題 13 Σ, Σ'をDS-diagramとする。extended DS-diagram Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$が存在して，$\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_n = \Sigma'$かつ$\Sigma_i$は$\Sigma_{i-1}$からtype Iまたはtype IIの変形で得られるとする。このときDS-diagram Σ'_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$が存在して$\Sigma = \Sigma'_0, \Sigma'_m = \Sigma'$かつ$\Sigma'_i$は$\Sigma'_{i-1}$からtype Iまたはtype IIの変形で得られる

2 命題の証明

Σに変形ωを行ってΣ'が得られるとき$\Sigma' = \omega(\Sigma)$と書く。ωの逆変形をω^{-1}とすると，$\Sigma = \omega^{-1}(\Sigma')$である。

変形ωの**サポート**(*support*) $\sup(\omega)$を次の様に定義する。

(1) ωがtype I^+のとき$\sup(\omega) = \overline{A}$，ただし$A$は図3のラベル$A$で，$\overline{A}$は$A$のcloureを表す。

(2) ωがtype I^-のとき$\sup(\omega) = \overline{W}$，ただし$W$は図4の3辺形を$W^{\pm}$としたとき，$W = f(W^{\pm})$とする。

(3) ωがtype II^+のとき$\sup(\omega) = L$，ただし図9の(closed) arc ℓ_iに対し$L = f(\ell_i)$とする。

(4) ωがtype II^-のとき$\sup(\omega) = \overline{W}$，ただし$W$は図6の2辺形を$W^{\pm}$としたとき，$W = f(W^{\pm})$とする。

サポートが与えられると 変形はuniqueに定まる。

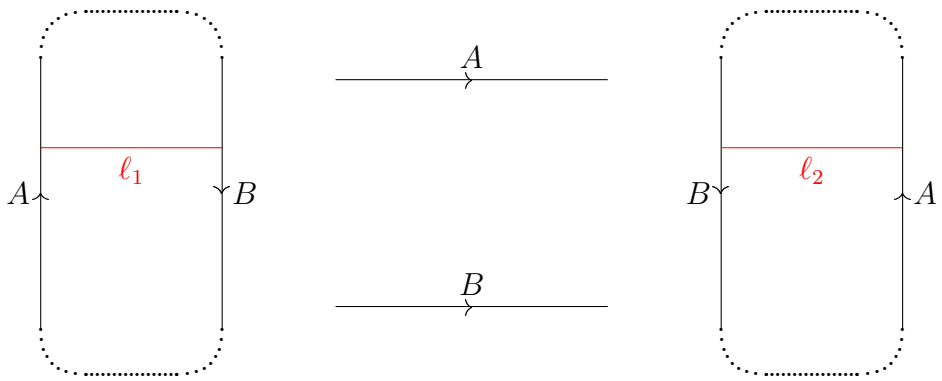

図 9

変形はサポートの周りでのみ起きている。即ち 2 つの extended DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$，$\Sigma' = (S^2, G', f')$ が $\Sigma' = \omega(\Sigma)$ のとき，$U = f^{-1}(\mathrm{Int}\, N(\sup(\omega)))$，$U' = f'^{-1}(\mathrm{Int}\, N(\sup(\omega^{-1})))$ とおくと，$\left(S^2 - U, G - U, f_{|U}\right) = \left(S^2 - U', G' - U', f'_{|U'}\right)$ である。ここで $N(X)$ は X の正則近傍で，$\mathrm{Int}\, X$ は X の内点を表す。

変形のサポートが交わらないとき順序を交換可能である。次が成立する。

命題 14 $\Sigma_1 = \omega(\Sigma)$，$\Sigma_2 = \omega_1(\Sigma_1)$ のとき $\sup(\omega^{-1}) \cap \sup(\omega_1) = \emptyset$ ならば，$\Sigma'_1 = \omega_1(\Sigma)$，$\Sigma'_2 = \omega(\Sigma'_1)$ が定義できて $\Sigma_2 \cong \Sigma'_2$ が成立する。

$\Sigma = (S^2, G, f)$ と 変形 ω のサポート L および $\Sigma_1 = (S^2, G_1, f_1)$ と 変形 ω_1 のサポート L_1 に対して，$F : S^2 \longrightarrow S^2$ および $H : f(S^2) \longrightarrow f_1(S^2)$ が存在して $f_1 F = H f$ かつ $F(f^{-1}(L)) = f_1^{-1}(L_1)$ が成立するとき $(\Sigma, L) \cong (\Sigma_1, L_1)$ と書く。定義より次の命題が成立する。

命題 15 $(\Sigma, L) \cong (\Sigma_1, L_1) \Longrightarrow \omega(\Sigma) \cong \omega_1(\Sigma_1)$

extended DS-diagram Σ に対し $h(\Sigma) = \displaystyle\sum_X (\sharp\partial X - 1)$ と定義する。ただし $\sharp\partial X$ は $f(S^2)$ の面 X の境界成分の個数である。$h(\Sigma) = 0$ のとき $f(S^2)$ のすべての面は (open) disk である。

$h(\Sigma) = 0$ で Σ が DS-diagram でないのは $\Sigma = \Sigma(3, 1)$ のみである。

extended DS-diagram の列

$$\mathrm{Seq} \ : \quad \Sigma = \Sigma_0 \to \Sigma_1 \to \cdots \to \Sigma_n = \Sigma'$$

に対して $h(\mathrm{Seq}) = \max_i h(\Sigma_i)$ と定義する。

$h(\mathrm{Seq}) > 0$ のとき，$h(\Sigma_{i-1}) < h(\Sigma_i) = h(\Sigma_{i+1}) = \cdots = h(\Sigma_{i+\ell}) = h(\mathrm{Seq}) > h(\Sigma_{i+\ell+1})$ となる ℓ で最大のものを $\ell(\mathrm{Seq})$ と定義し，$h(\mathrm{Seq}) = 0$ のとき $\ell(\mathrm{Seq}) = -1$ と定義する。

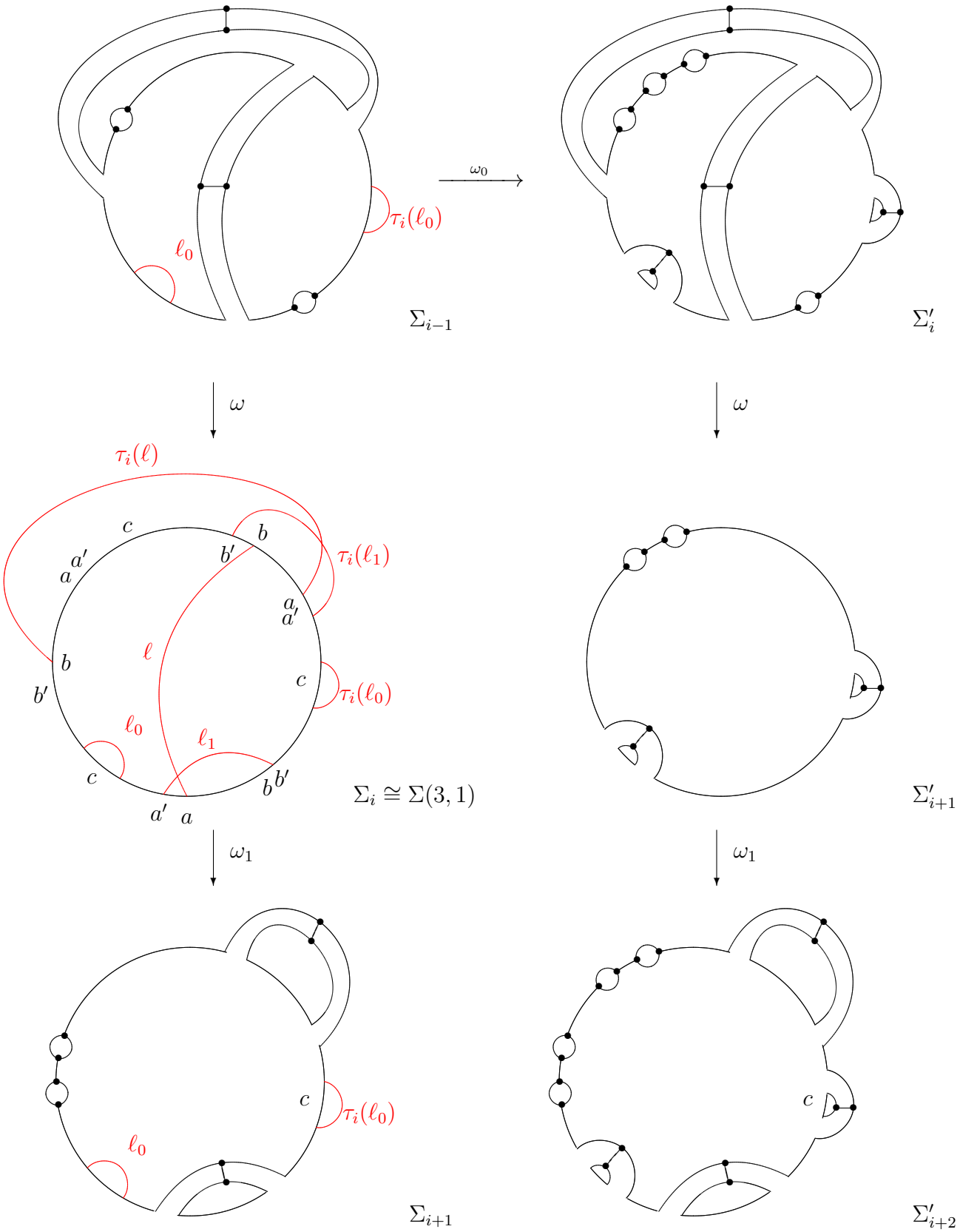
ω_0
$\tau_i(\ell_0)$
ℓ_0
Σ_{i-1}
Σ'_i
ω
ω
$\tau_i(\ell)$
c
b
a'
a
b'
$\tau_i(\ell_1)$
a
a'
ℓ
b
c
b'
$\tau_i(\ell_0)$
ℓ_0
ℓ_1
c
b
b'
a'
a
$\Sigma_i \cong \Sigma(3,1)$
Σ'_{i+1}
ω_1
ω_1
c
$\tau_i(\ell_0)$
ℓ_0
Σ_{i+1}
c
Σ'_{i+2}

図 10

以後

$$\mathrm{Seq}\ :\quad \Sigma=\Sigma_0\to\Sigma_1\to\cdots\to\Sigma_n=\Sigma'$$

は Σ および Σ' は DS-diagram であり，Σ_{i+1} は Σ_i から type $\mathrm{I}^{\pm}$ または type $\mathrm{II}^{\pm}$ で得られるものとする。$\Sigma_i=(S^2,G_i,f_i)$ とする。$\tau_i:S^2-G_i\longrightarrow S^2-G_i$ を $f^{-1}\circ f(x)=\{x,x'\}$ とするとき $\tau_i(x)=x'$ で定義する。

命題を $(h(\mathrm{Seq}),\ell(\mathrm{Seq}))$ に関する帰納法で証明する。順序は辞書式順序とする。

$h(\mathrm{Seq})=0$ のとき $\Sigma_i\cong\Sigma(3,1)$ となる Σ_i が存在しなければ Σ_i はすべて DS-diagram なので最初から Seq が求めるものである。

よって $\Sigma_i\cong\Sigma(3,1)$，$\Sigma_i=\omega(\Sigma_{i-1})$，$\Sigma_{i+1}=\omega_1(\Sigma_i)$ とする。$\Sigma(3,1)$ は頂点を持たないので ω は type II^-，ω_1 は type II^+ である。

$L=\sup(\omega^{-1})$，$L_1=\sup(\omega_1)$ とする。$f_i(S^2)$ の唯一の面を X とすると，L，L_1 は X の proper な arc である。$L_0\cap(L\cup L_1)=\emptyset$ となる X の proper な arc を 1 つとる。図 10 の様に $L_0=f_i(\ell_0)$ を サポートとする変形を ω_0 とし，$\Sigma'_i=\omega_0(\Sigma_{i-1})$，$\Sigma'_{i+1}=\omega(\Sigma'_i)$，$\Sigma'_{i+2}=\omega_1(\Sigma'_{i+1})$，$\Sigma'_{i+3}=\omega_0^{-1}(\Sigma'_{i+2})$ とおくと可換性より $\Sigma'_{i+3}=\Sigma_{i+1}$ である。

Seq の Σ_i,Σ_{i+1} を $\Sigma'_i,\Sigma'_{i+1},\Sigma'_{i+2},\Sigma'_{i+3}$ で置き換えて得られる変形列を Seq_1 とする。Seq_1 が $\Sigma(3,1)$ を含まなければ Seq_1 が求めるものである。Seq_1 が $\Sigma(3,1)$ を含めば，Seq_1 に前述の操作を行う。よって $h(\mathrm{Seq})>0$ としてよい。

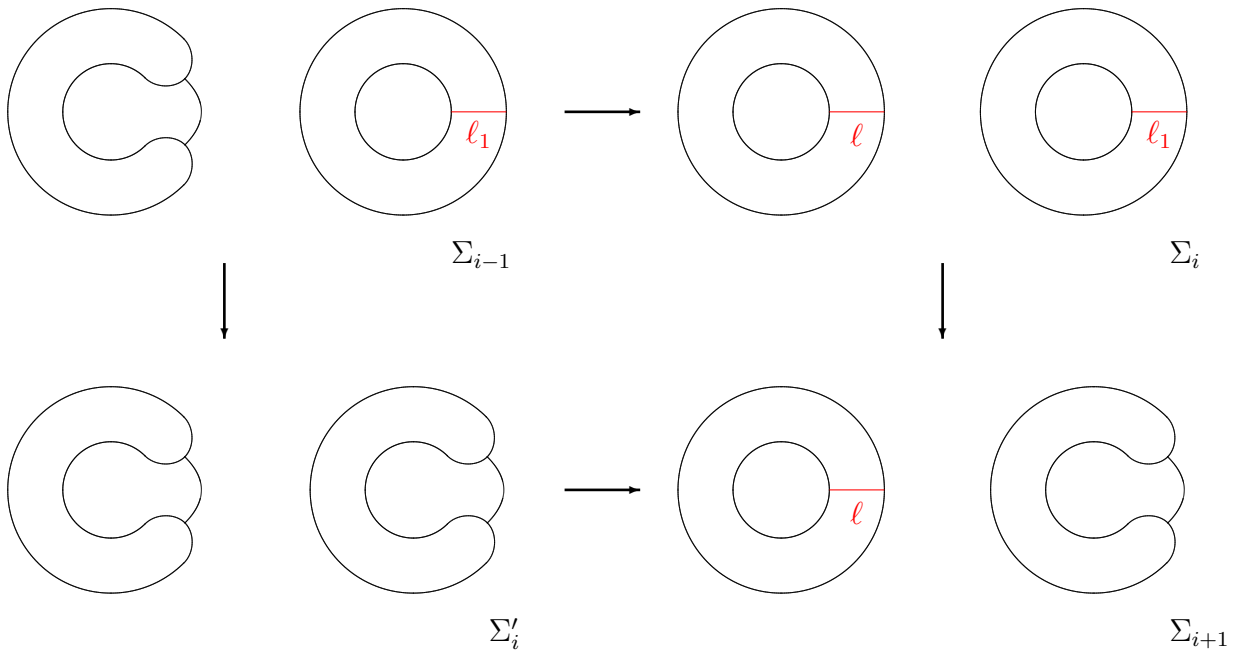

図 11

$(h(\mathrm{Seq}),\ell(\mathrm{Seq}))=(h,0)$ のときを考える。

$h(\Sigma_i) = h$ とすると $h(\Sigma_{i-1}) = h(\Sigma_{i+1}) = h-1$ である。$\Sigma_i = \omega(\Sigma_{i-1})$，$\Sigma_{i+1} = \omega_1(\Sigma_i)$ とすると，ω は type II$^-$ で ω_1 は type II$^+$ である。$L = \sup(\omega^{-1})$，$L_1 = \sup(\omega_1)$ とする。

L を含む面を X とする。L_1 を含む面が X でないときは $L \cap L_1 = \emptyset$ である。このとき ω と ω_1 は可換なので $\omega(\omega_1(\Sigma_{i-1})) = \Sigma_{i+1}$ である。図 11 の様に $\Sigma'_i = \omega_1(\Sigma_{i-1})$ とおき，Seq の Σ_i を Σ'_i で置き換えたものを Seq_1 とおく。$h(\Sigma'_i) = h-2$ なので，$h(\Sigma_j) = h$ となる j が他に存在しなければ $h(\mathrm{Seq}_1) < h(\mathrm{Seq})$ である。

$L_1 \subset X$ のとき X^+ を $f_i(X^+) = X$ となる Σ_i の面とし，$\ell = f_i^{-1}(L) \cap X^+$，$\ell_1 = f_i^{-1}(L_1) \cap X^+$ とおく。$\ell \cap \ell_1 = \emptyset$ になるような ℓ_1 を選べるときは，前項と同様に Seq_1 を作ることができる。ただしこの場合 $h(\Sigma'_i) = h-1$ である (図 12)。

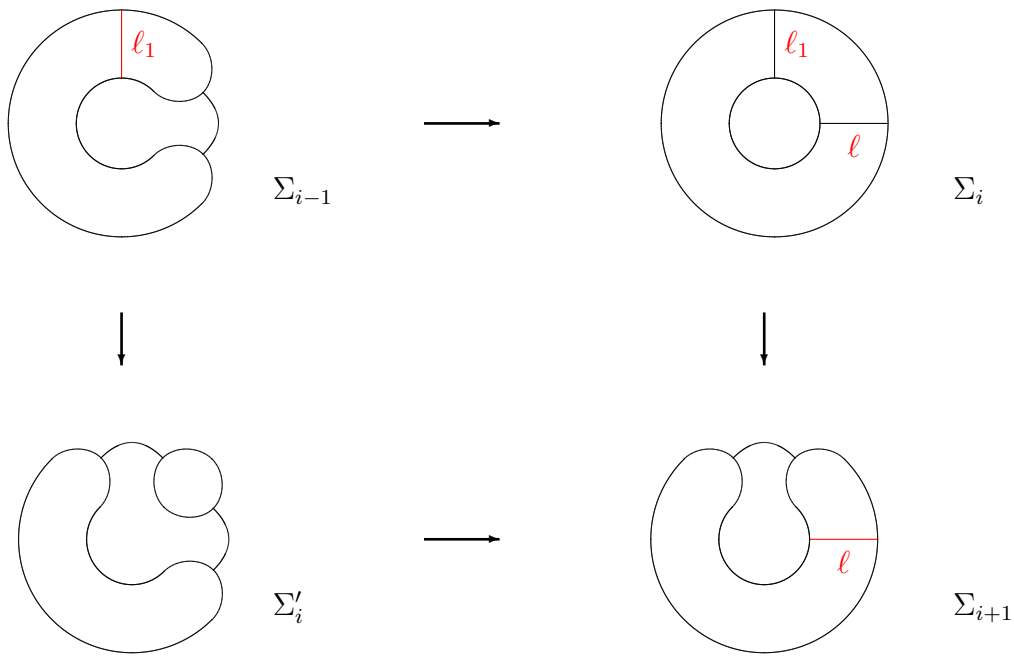

図 12

次の (A) または (B) の場合 $h(\Sigma_i)$ を減らすことができる。

(A) 同相写像 $F : S^2 \longrightarrow S^2$，$H : S^2/f_i \longrightarrow S^2/f_i$ が存在して $f_i \circ F = H \circ f_i$ かつ $H(L_1) \cap L = \emptyset$ が成立する。

(B) X^+ に proper arc ℓ_0 が存在して $\ell_0 \cap (\ell \cup \ell_1) = \emptyset$ かつ $\partial\ell_0$ は ∂X^+ の異なる成分上にある。

(A) の場合 $H(L_1)$ をサポートとする変形を ω'_1 とする。$\omega'_1(\Sigma_{i-1}) = \Sigma'_i$，$\omega(\Sigma'_i) = \Sigma'_{i+1}$ とおくと，$\Sigma_{i+1} \cong \Sigma'_{i+1}$ である。Σ_i, Σ_{i+1} を Σ'_i, Σ'_{i+1} に置き換えたものを seq_1 とする。$h(\Sigma'_i) = h-1, h(\Sigma'_i) = h-1$ である。

また X^+ 上の同相写像 F で (1) $N(\partial X^+)$ 上では identity，(2) $F(\ell_1)\cap\ell=\emptyset$，となる F が存在するとき (A) が成立する。

なぜなら F を次のように S^2 に拡張する：$f_i^{-1}(X)=X^+\cup X^-$ とおくとき $x\in X^-$ に対しては $F(x)=\tau_i\circ F\circ\tau_i(x)$，$x\notin X^+\cup X^-$ に対しては $F(x)=x$ とする。また $H:S^2/f_i\longrightarrow S^2/f_i$ を $y\in X$ に対しては $y=f_i(x)$ とするとき $H(y)=f_i\circ F(x)$，$y\notin X$ に対しては $H(y)=y$ と定義すると (A) が成立する。

(B) の場合 $L_0=f_i(\ell_0)$ をサポートとする変形を ω_0 すると ω_0 は ω および ω_1 と可換である。$\Sigma'_{i-1}=\omega_0(\Sigma_{i-1}),\Sigma'_i=\omega(\Sigma'_{i-1}),\Sigma'_{i+1}=\omega_1(\Sigma'_i),\Sigma''_{i+1}=\omega_0^{-1}(\Sigma'_{i+1})$ とおけば，$\Sigma_{i+1}\cong\Sigma''_{i+1}$ なので，$\Sigma''_{i+1}=\Sigma_{i+1}$ とする。seq の $\Sigma_{i-1},\Sigma_i,\Sigma_{i+1}$ を $\Sigma_{i-1},\Sigma'_{i-1},\Sigma'_i,\Sigma_{i+1}$ で置き換えたものを seq_1 とする。$h(\Sigma'_{i-1})=h-2,h(\Sigma'_i)=h-1,h(\Sigma'_{i+1})=h-2$ である。

$\ell\cap\ell_1\neq\emptyset$ とする。ℓ および ℓ_1 に向きを考え intersection number を考える。プラス・マイナスの両方 の intersection number を持つ点が存在するとき，innermost を考えることにより，図 13-左の様な部分が存在する。このとき ∂X^+ の周りを一周させる図 13-右の様な F により $F(\ell_1)\cap\ell$ の intersection を $\ell_1\cap\ell$ の intersection より減らすことができる。

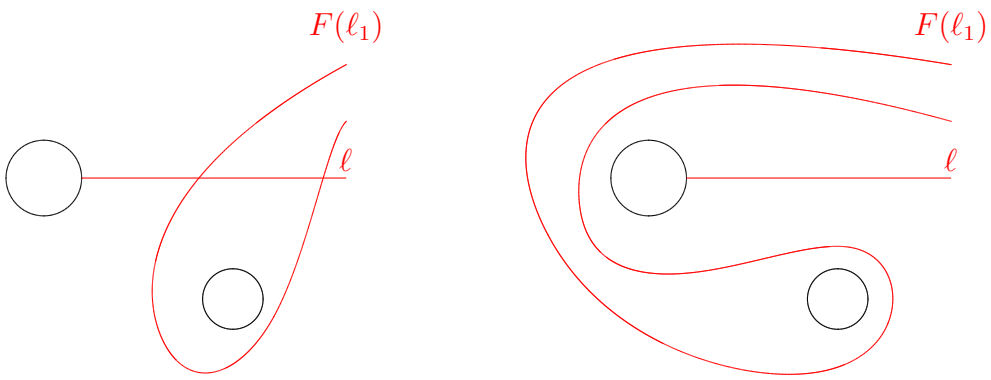

図 13

よって ℓ_1 との intersection は intersection number がすべて正またはすべて負のとしてよい。

このとき (1) ∂X^+ の同じ成分上にある $\partial\ell$ の点と $\partial\ell_1$ の点が存在するか，(2) $\partial\ell$ と $\partial\ell_1$ の各点は ∂X^+ の違う成分であるか，

(1) の場合 ℓ の一部，ℓ_1 の一部および ∂X^+ の一部が ∂X^+ である領域を張っている。この中に ∂X^+ の他の成分が存在しないとき図 14 の様に写像 F を用いて $\ell\cap\ell_1$ の個数を減らすことができる。

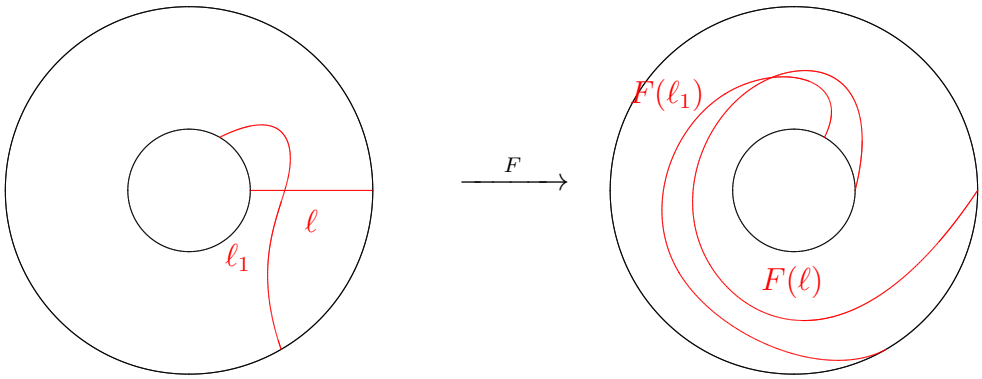

図 14

∂X^+ の他の成分が存在する場合は図 15 の様に $\ell_0 \cap (\ell \cup \ell_1) = \emptyset$ となる ∂X^+ の異なる成分を結ぶ arc ℓ_0 が存在する。

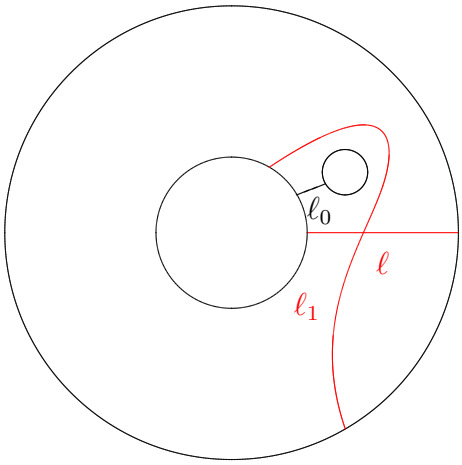

図 15

(2) の場合は図 16 の様になっているので ℓ_0 を選ぶことができる。

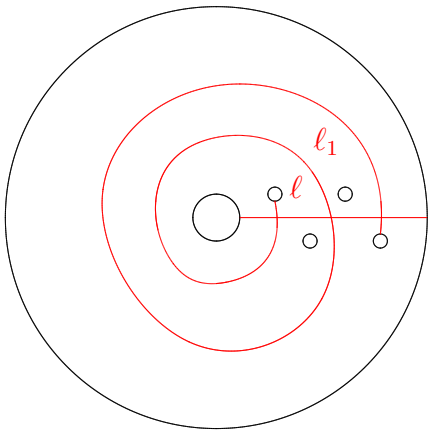

図 16

$h(\mathrm{Seq}) = h, \ell(\mathrm{Seq}) > 0$ のときを考える。$h(\Sigma_{i-1}) = h-1$，$h(\Sigma_i) = h(\Sigma_{i+1}) = h$，$\Sigma_i = \omega(\Sigma_{i-1})$，$\Sigma_{i+1} = \omega_1(\Sigma_i)$ とすると，ω は type II$^-$ である。$L = \sup(\omega^{-1})$ とする。

$L \cap \sup(\omega_1) = \emptyset$ のとき ω と ω_1 は可換なので $\omega(\omega_1(\Sigma_{i-1})) = \Sigma_{i+1}$ である。$\Sigma'_i = \omega_1(\Sigma_{i-1})$ とおき，Seq の Σ_i を Σ'_i で置き換えたものを Seq_1 とおく。このとき $h(\Sigma'_i) < h(\Sigma_i)$ となっている。

ω_1 が type II$^+$ 以外のときを考える。∂L の点が存在する ∂X の成分の中に，ω_1 のサポート (type I$^+$ の場合) または ω_1 のサポートの境界 (type I$^-$，type II$^-$ の場合) でない edge が存在すれば ∂X の境界の異なる成分を結ぶ arc L_0 で $L_0 \cap L = \emptyset$ かつ $L_0 \cap \sup(\omega_1) = \emptyset$ を満たすものが存在する。このとき前と同様に Seq_1 を作ることができる。

$f^{-1}(L) = \ell \cup \tau(\ell)$，$\ell \subset X^+$ とする。$\partial\ell$ の点を含む ∂X^+ の成分を $\partial_1 X^+$ とする。$\sharp(\partial_1 X^+ \cap V(G)) = 0$ のとき $\partial_1 X^+$ は hoop なので $\sup(\omega_1)$ にはならない。$\sharp(\partial_1 X^+ \cap V(G)) = 1$ のとき $\partial_1 X^+$ は 1 つの辺と 1 つの頂点からなるが，$\sup(\omega_1)$ の辺は loop にならない辺である。よってこのとき $\ell \cap \partial_1 X^+ \cap \sup(\omega_1)$ が空になる。$\sharp(\partial_1 X^+ \cap V(G)) \geq 2$ としてよい。

G の辺 e の端点 v_1, v_2 が $f(v_1) = f(v_2)$ となるとき**退化辺**という。サポートの辺またはサポートの境界の辺は非退化辺である。

(1) ω_1 が type I$^-$ のとき $\sup(\omega_1) = \overline{a}$ とすると，$\sharp(\partial_1 X^+ \cap V(G)) \geq 2$ のとき $\partial_1 X^+$ にラベル a でない辺が存在する。

(2) ω_1 が type II$^+$ のとき $\partial \sup(\omega_1) = a_1 a_2$ とする。$\partial_1 X^+ \cap \ell$ を含んでいる辺のラベルを a_1 とし，$\partial_1 X^+$ 上の次の辺のラベルを b とする。ラベル列 $a_1 a_2$ は 2 辺形で使われているので $b \neq a_2$ である。$b = a_1$ および $b = a_2^{-1}$ なら a_1 が退化辺になる。

(3) ω_1 が type I^+ のとき $\partial\sup(\omega_1) = a_1a_2a_3$ とする。$\partial_1 X^+ \cap \ell$ を含んでいる辺のラベルを a_1 とし，$\partial_1 X^+$ 上の次の辺のラベルを b とする。ラベル列 a_1a_2 は 3 辺形で使われているので $b \neq a_2$ である。b が $a_i^{\pm 1}$ なら a_1 が退化辺になる。

この場合いずれも L_0 が存在するので前の (B) と同様に Seq_1 を作ることができる。

次に ω_1 が type II^+ の場合を考える。$L_1 = \sup(\omega_1)$ とおくとこのとき $h(\Sigma_i) = h(\Sigma_{i+1})$ なので ∂L_1 の 2 つの点は面の同じ境界成分上にある。

$f^{-1}(L_1) = \ell_1 \cup \tau(\ell_1)$ とする。ただし，$\ell_1 \subset X^+$ とする。$\partial\ell_1$ の 2 点は ∂X^+ の同じ成分 $\partial_2 X^+$ 上にある。

ℓ, ℓ_1 に向きを考え intersection number を考える。前と同様にプラスとマイナスの intersection があれば同相写像 F を用いて減らすことができる。よって intersection はすべてプラスまたはマイナスとしてよい。

このとき図 17 の様に $\partial\ell$ の一方は $\partial_2 X^+$ 上にあるか，ℓ_1 と $\partial_2 X^+$ が張る region 内の ∂X^+ にある。このとき ∂X^+ の異なる成分を結ぶ arc ℓ_0 で $\ell_0 \cap (\ell \cup \ell_1) = \emptyset$ となるものが存在する。$L_0 = f(\ell_0)$ とおき L_0 をサポートとする変形を ω_0 とする。

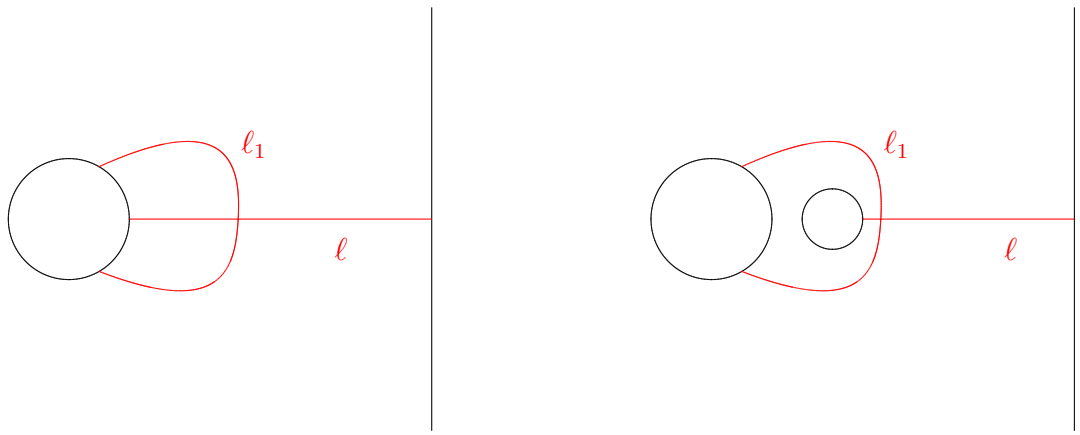

図 17

$\Sigma'_i = \omega_0(\Sigma_{i-1})$，$\Sigma'_{i+1} = \omega(\Sigma'_i)$，$\Sigma'_{i+2} = \omega_1(\Sigma'_{i+1})$，$\Sigma'_{i+3} = \omega_0^{-1}(\Sigma'_{i+2})$ とおくと，ω_0 は ω および ω_1 と可換なので，$\Sigma'_{i+3} \cong \Sigma_{i+1}$ である。このとき $h(\Sigma'_i) = h-2$, $h(\Sigma'_{i+1}) = h-1$，$h(\Sigma'_{i+2}) = h-1$，$h(\Sigma'_{i+3}) = h$ である。

Seq の Σ_i と Σ_{i+1} を $\Sigma'_i, \Sigma'_{i+1}, \Sigma'_{i+2}, \Sigma'_{i+3}$ で置き換えたものを Seq_1 とおく。

$\big(h(\mathrm{Seq}), \ell(\mathrm{Seq})\big) = \big(h(\mathrm{Seq}_1), \ell(\mathrm{Seq}_1)\big)$ が成立しているときは同様の操作を Seq_1 に行う。

必要なだけ操作を行って得られたものをあらためて Seq_1 とおくと $h(\mathrm{Seq}) > h(\mathrm{Seq}_1)$ が成立している。

3 いくつかの注意

前節で証明した命題より DS-diagram に関する基本定理が証明される。もう一度述べると次が成立する。

定理 16 type I および type II の変形は表現する多様体を変えない。

また Σ, Σ' を DS-diagram で $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ を満たすとする。このとき DS-diagram Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在して

$$\Sigma = \Sigma_0 \to \Sigma_1 \to \cdots \to \Sigma_n = \Sigma'$$

が成立する。ここで矢印は type I または type II の変形である。

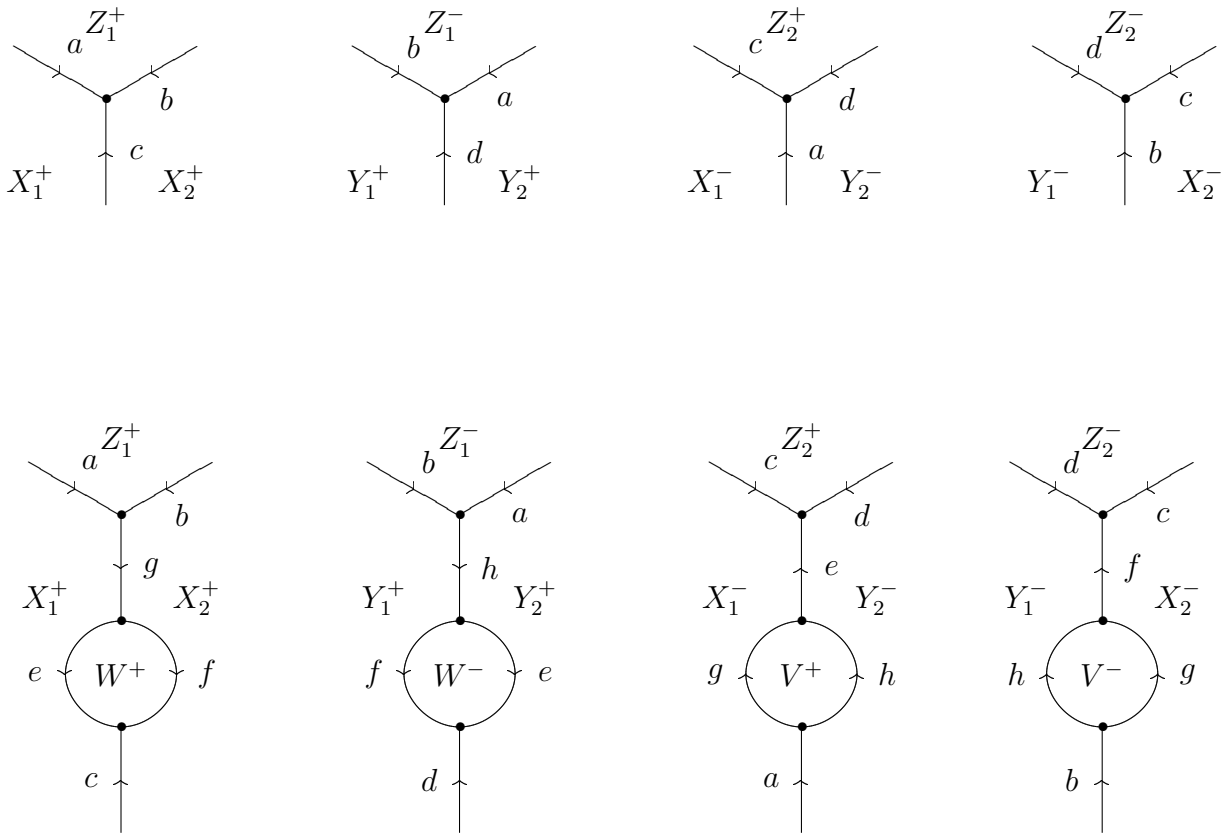

図 18

typeII$^-$ の変形は一般には DS-diagram を保存しない。池田・山下・横山は [4] で次の変形 I–deformation と II-deformation を導入した。I–deformation は図 18 の上を下に (またはその逆) 変形する，特殊な type II 変形であり，II–deformation は type I 変形であるが，この変形は DS-diagram を必ず DS-diagram に写す。[4] では次を証明した。

命題 17 DS-diagram から DS-diagram への type II 変形は I–deformation および II–deformation の有限列で実現できる。

これを用いると定理 16 は次の様に表すことができる。

定理 18 I–deformation および II–deformation は表現する多様体を変えない。

また Σ, Σ' を DS-diagram で $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ を満たすとする。このとき DS-diagram Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在して

$$\Sigma = \Sigma_0 \to \Sigma_1 \to \cdots \to \Sigma_n = \Sigma'$$

が成立する。ここで矢印は I–deformation または II–deformation である。

$\Sigma = (S^2, G, f)$ を DS-diagram とする。$f(G)$ の頂点の個数を $\nu(\Sigma)$ と書く。池田・山下・横山は [6] で次を示した。

定理 19 Σ, Σ' を DS-diagram で $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ および $\nu(\Sigma) \geq 2, \nu(\Sigma') \geq 2$ を満たすとする。このとき DS-diagram Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在して

$$\Sigma = \Sigma_0 \to \Sigma_1 \to \cdots \to \Sigma_n = \Sigma'$$

が成立する。ここで矢印は II–deformation である。

$\nu(\Sigma) = 1$ となる DS-diagram は 3 つだけである。この例外を除いて同相な多様体を表現する DS-diagram は II-defromation で移りあえることを示している。

参考文献

[1] Ikeda, H , Acyclic fake surface, Topology 10 (1971) 9–35

[2] Ikeda, H and Inoue, Y, Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math. 2 (1985) 169–186

[3] Ikeda, H, DS-diagrams with E-cycle, Kobe J. Math. 3 (1986) 103–112

[4] Ikeda, H .Yamashita, M, Yokoyama, K, Symbolic description of homeomorphisms on closed 3-manifolds, Kobe J. Math. 13 (1996) 69–115

[5] Ikeda, H .Yamashita, M, Yokoyama, K, Remodeling a DS-diagram into one with E-cycle, Tokyo J. Math. 23 (2000) 113–135

[6] Yamashita, M, メタモルフォーシス, 箱根セミナー 2012 記録

[7] Ishii, I , Flows and spines, Tokyo J. Math. 9 (1986) 505–525

[8] Ishii, I , Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds, Tokyo J. Math. 15 (1992) 297–312

[9] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math. 34 (2011) 165–183

[10] Yamashita, M, D-変形について, 数理研講究録 563 (1985) 207–222

[11] Yamashita, M, D-変形について II, 数理研講究録 575 (1985) 28–41

[12] Yamashita, M, DS-diagram の初等変形とは, 箱根セミナー 1986 記録

[13] Yokoyama, K, DS-変形の基本定理, 箱根セミナー 1996 記録

[14] Yokoyama, K, Extended DS-diagram とその変形とは, 箱根セミナー 2001 記録