

# 2-bridge knot の DS-diagram

河野正晴 (北見工業大学)

2-bridge knot の DS-diagram で「標準的」と思えるものを考察する。

$\Sigma = (S^2, G, f)$  を DS-diagram とし,  $X$  を  $f(S^2)$  の面とする。面  $X$  に対応する  $\Sigma$  の DS-knot を  $k(X)$  とする。このとき  $\Sigma$  を knot  $k(X)$  を表現する DS-diagram または簡単に knot  $k(X)$  の DS-diagram と呼ぶ。このノートでは  $X$  が 1 辺形のもののみ考える。

$S^3$  内に  $n$ -bridge knot  $k$  を考える。即ち,  $S^3$  内の 3-ball  $B_1^3, B_2^3$  が  $S^3 = B_1^3 \cup B_2^3$ ,  $S^2 = B_1^3 \cap B_2^3$  を満たしているとき,  $(B_i^3, B_i^3 \cap k)$  ( $i = 1, 2$ ) が trivial  $n$ -tangle をなしているとする。 $k$  の 正則近傍を  $V = U(k, S^3)$  とする。 $B_1^3 \cap k = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$  は  $n$  個の arc で,  $V \cap B_1^3 = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$  は各  $i$  に対し  $V_i = U(\ell_i, B_1^3)$  となっている。 $(\ell_i, B_1^3)$  は trivial なので各  $i$  に対し 2-disk  $D_i$  で  $\partial D_i = \alpha \cup \beta$  となるものが存在する。ここで,  $\alpha$  は  $\partial V_i$  上の arc で  $\ell_i$  と平行であり,  $\beta$  は  $S^2$  上の arc である。また  $D_i \cap D_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) が成立しているものを選ぶ。 $\ell_i$  を over path と呼ぶ。

$B_2^3$  に関しても同様のことが成立する。 $B_1^3$  の  $V_i, \ell_i, D_i$  に対応するものを  $V'_i, \ell'_i, D'_i$  とする。 $\ell'_i$  を under path と呼ぶ。

$n$ -bridge knot があると次の様に knot の DS-diagram を構成できる。

- (1)  $B_1^3$  内の  $V_i$  と交わらない open 3-ball  $B_0$  を  $S^3$  から取り除いて collapsing を始める。
- (2)  $B_1^3$  を  $\partial B_1^3 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$  に collapse する。
- (3) ある  $i_0$  を選んで  $V_{i_0} \cup D_{i_0}$  を collapse する。
- (4)  $S^2 \cap V_{i_0}$  から  $V$  の内部の collapse を行う。 $V$  境界から  $\partial V_{i_0}$  を除いた部分と meridian disk 1 個を残して collapse を行う。meridian disk はある  $V_i$  部分 (over path の部分) に存在する様を選ぶ。
- (5)  $S^2$  は  $(\partial V \cup D_1 \cup \dots \cup D_n \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_n) \cap S^2$  によって面に分けられている。その 1 つの面を選んで, その面から  $B_2^3$  の collapse を始める。 $B_2^3$  を

$(\partial V' \cap B_2^3) \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_n$  を残して collapse する。ここで  $\partial V'$  は  $\partial V$  から collapse により除かれる部分を引いたものである。

- (6) できたスパイン (DS-diagram) に非退化 2 辺形または非退化 3 辺形があれば、頂点を下げる変形を行う。

以下 knot  $k$  は 2-bridge とする。2-bridge knot に対して上の操作を行う。(3) は 2-bridge の対称性により、 $i_0$  の選び方によらず DS-diagram が定まる。

(6) を行って得られる DS-diagram は具体例では (5) の面によらないが、一般的に証明できていないので、面は (3) で collapse を始めた disk の境界を含む面を選ぶことにする。この様に面を選ぶと collapse により一方の under path に対応する  $\partial V'_i$  は除かれる。

$k$  を  $(p, q)$  type の 2-bridge knot とするとき、このように得られた DS-diagram を  $\Sigma(TB(p, q))$  とする。

例として  $(9, 2)$  を考える。図 1 は  $(9, 2)$  type の 2-bridge knot である。

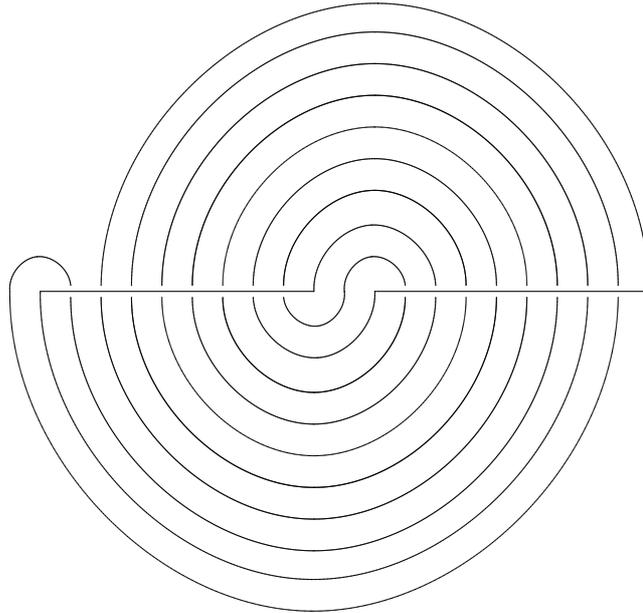


図 1

前述の操作を行って DS-diagram を構成する。上から collapse をはじめ、(3) では左側の over path を collapse する。(5) では左端の under path の周りの面から collapsing を行う。その結果得られるのが図 2、図 3 である。ただし図 2 は  $S^2$  上の部分のみ描いてある。図で  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) の部分は disk が除かれている。図 3 は over path と under path の部分を描いてある。

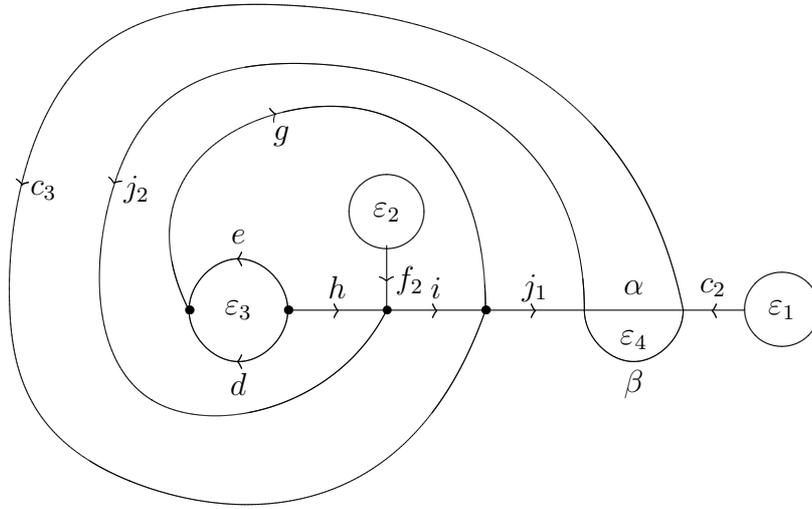


図 2

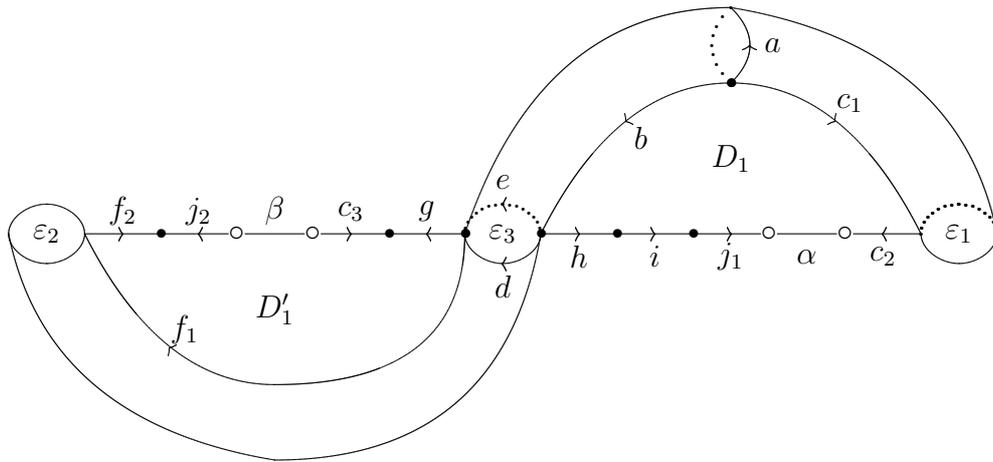


図 3

スパインを上から見て over path の部分と  $S^2$  の上側の部分の DS-diagram (の一部) を描いたのが図 4 である。 $\varepsilon_2$  の部分を通して見える under path および over path の内部も描いてある。

スパインを下から見て under path の部分と  $S^2$  の下側の部分の DS-diagram (の一部) を描いたのが図 5 である。 $\varepsilon_1$  の部分を通して見える over path の内部も描いてある。

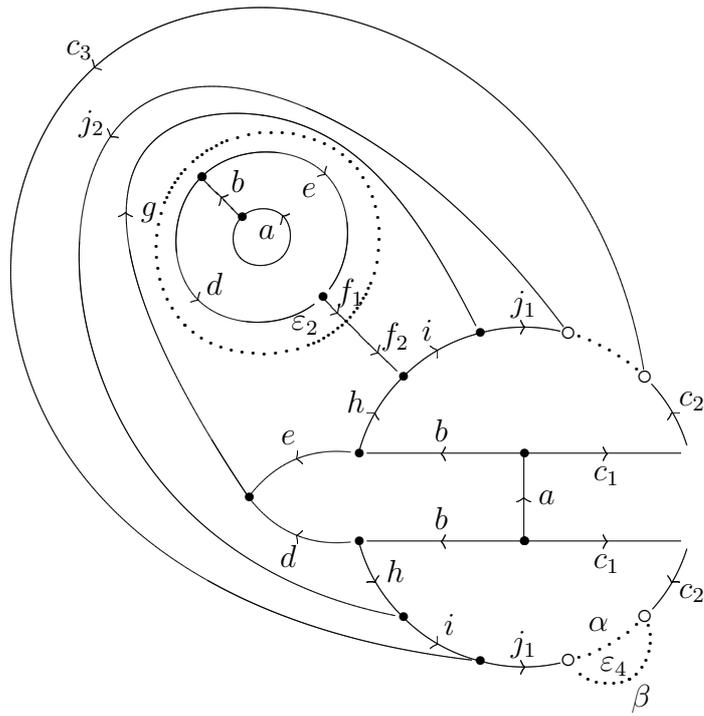


图 4

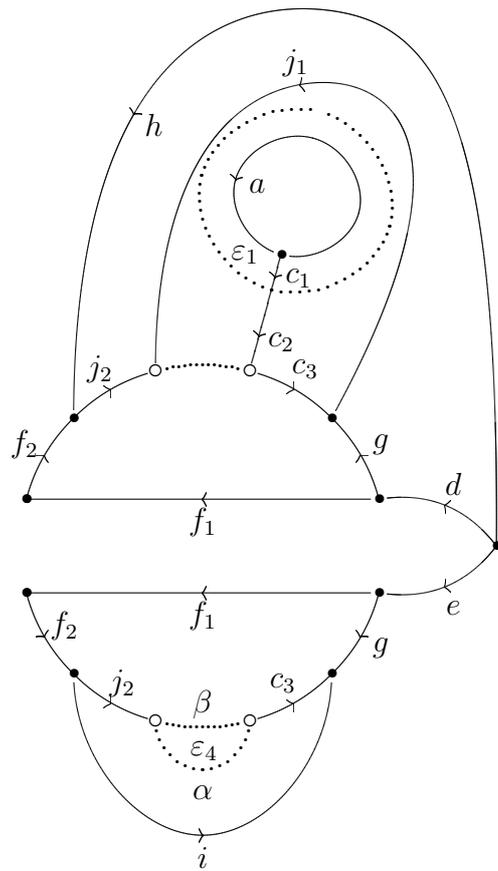


图 5

図 4 と図 5 を裏返したものを  $\alpha\beta$  で貼り合わせると DS-diagram ができる。この例では非退化 2 辺形および 3 辺形はないのでこれが  $\Sigma(TB(9, 2))$  がある。

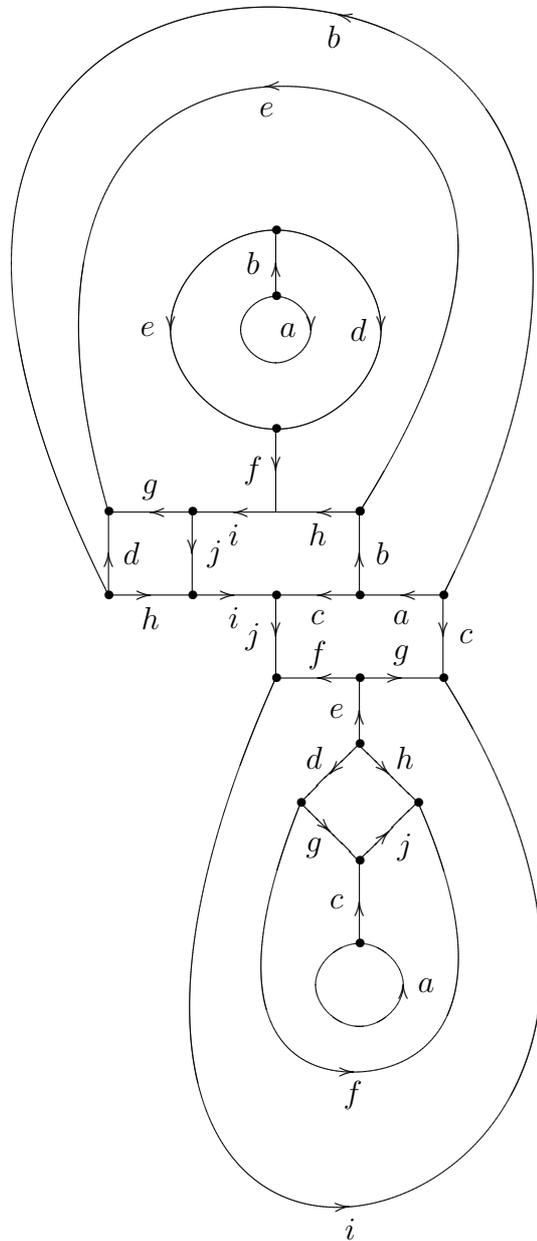


図 6

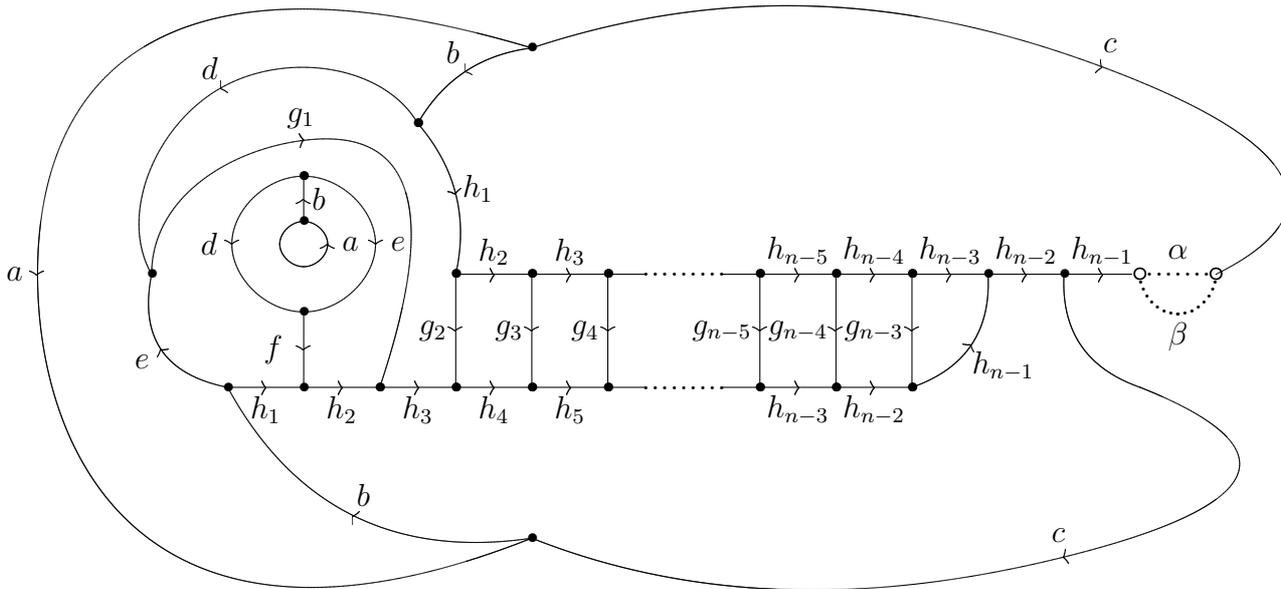


図 7

一般の場合を考える前に、 $q = 2$  の場合の DS-diagram を考える。

ある程度大きい  $p$  に対し  $(p, 2)$  type の 2-bridge knot から作った DS-diagram の一部 (上から見える部分) を描いたのが図 7 である。ただし  $p = 2n + 1$  とする。この図を DS-diagram の A 図と呼ぶことにする。A 図で  $p$  を増やすと、 $g_i^{-1}h_i g_{i+1} h_{i+2}^{-1}$  というラベルの 4 辺形 (正規 4 辺形と呼ぶ) が増えていく。

下から見える部分の DS-diagram (これを DS-diagram の B 図と呼ぶ) は  $n$  の偶奇によって変わる。 $n$  が奇数の場合が 図 8,  $n$  が偶数の場合が 図 9 である。

B 図は正規 4 辺形以外の部分を見ると同じであり、それをつなげている正規 4 辺形の数が異なるので、形が異なっていることが分かる。

構成された DS-diagram は一般に非退化 3 辺形を含むので 3 辺形をつぶす変形ができる。それを実行して  $\Sigma(T(p, q))$  が得られるが、 $\Sigma(T(p, q))$  と  $\Sigma(T + 2q, q)$  の間には次の関係がある。

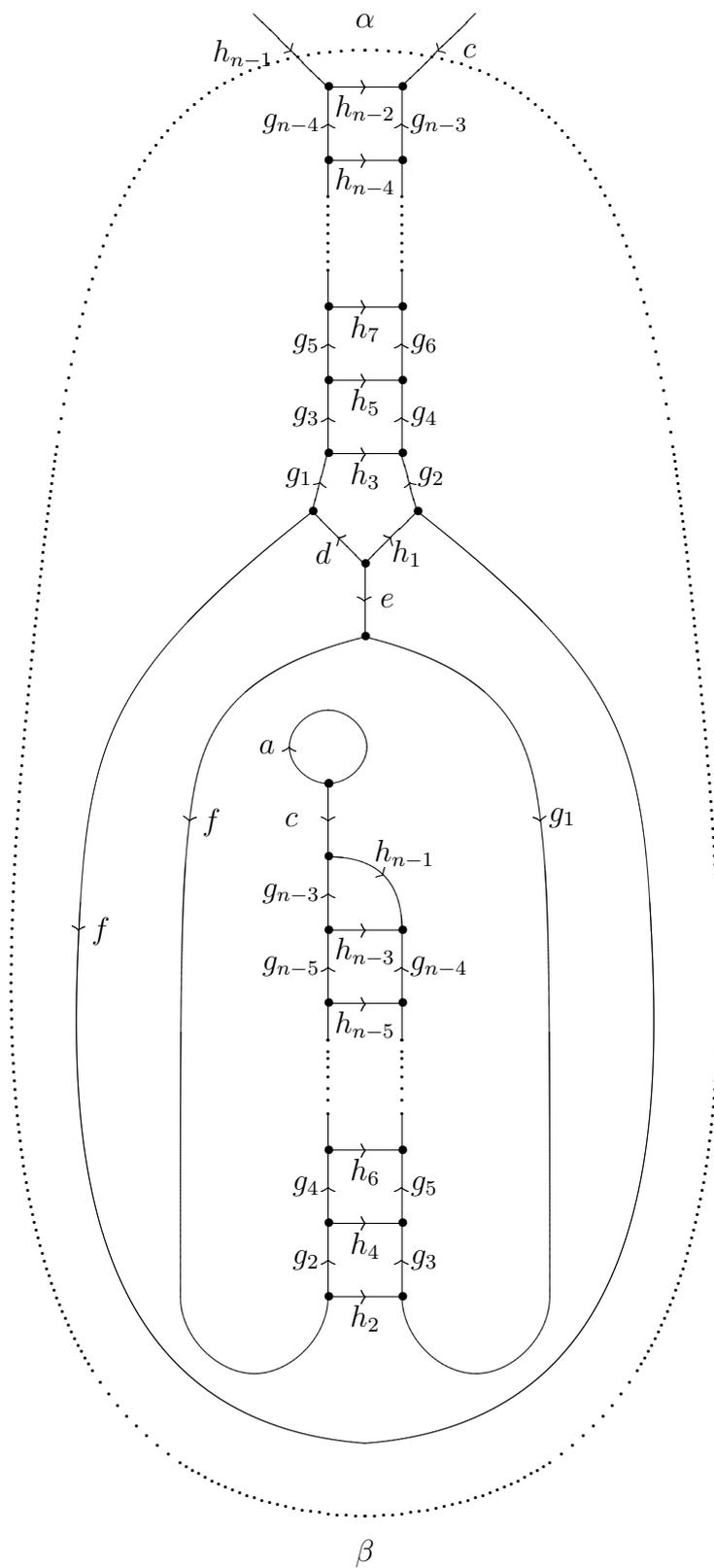


图 8

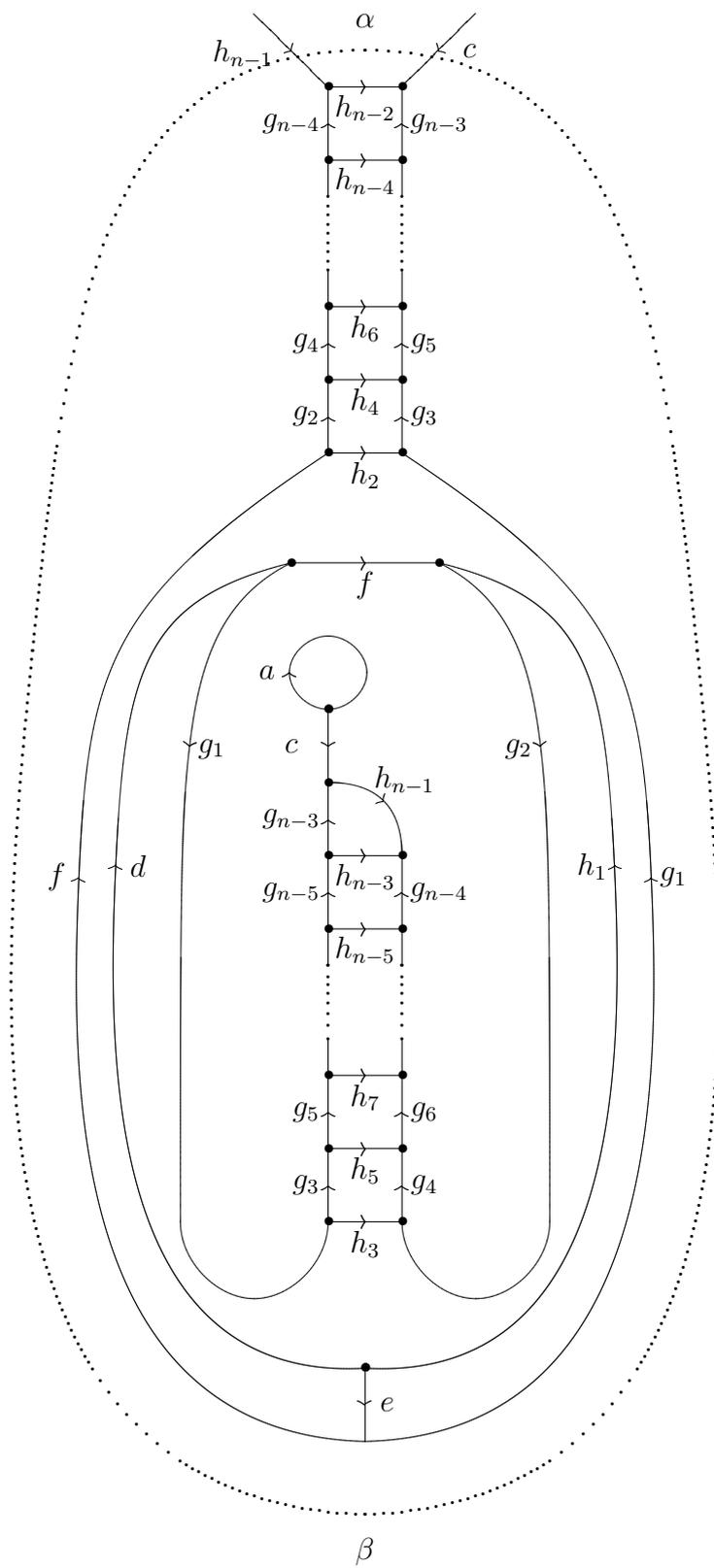


图 9

**定理 1**  $p$  (奇数),  $q$  を自然数で互いに素であり,  $p \geq 5q+1$  を満たすとする。このとき  $\Sigma(TB(p, q))$  はジグザグタイプの辺をもち,  $\Sigma(TB(p, q))$  から  $\Sigma(TB(p+2q, q))$  は次の操作で得られる。

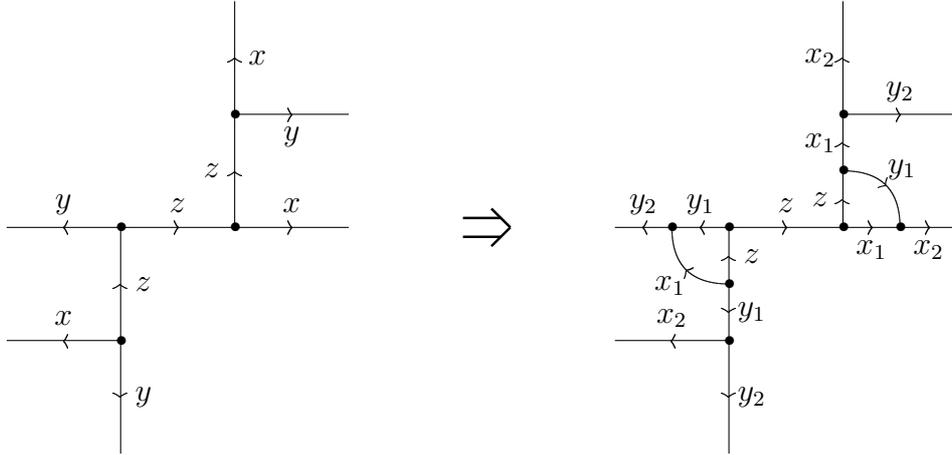


図 10

$p, q$  は自然数で定理の条件をみたすとする。  $p = 2n + 1$  とする。A 図は  $q$  が偶数のとき図 11 上,  $q$  が奇数のとき図 11 下の様になる。ただし  $q$  が偶数のときは  $q = 2\bar{q}$ , 奇数のときは  $q = 2\bar{q} + 1$  とする。

B 図は  $n \pmod{q}$  によって異なるが,  $q$  が奇数のときは図 12 の部分を正規 4 辺形 (ラベルが  $g_i^{-1}h_i g_{i+1} h_{i+q}^{-1}$  の 4 辺形) で連結した図になる。  $q$  が偶数のときは図 13 の部分を正規 4 辺形 (ラベルが  $g_i^{-1}h_i g_{i+1} h_{i+q}^{-1}$  の 4 辺形) で連結した図になる。

$q$  を固定して  $p$  を変えた場合を考える。  $n_1 = n + q$  として  $p = 2n + 1$ ,  $p_1 = 2n_1 + 1$  とおく。  $(p, q)$  と  $(p_1, q)$  の DS-diagram を比較する。  $(p_1, q)$  の A 図は  $(p, q)$  と同じ形で正規 4 辺形が  $q$  個増えたものである。  $(p_1, q)$  の B 図は  $(p, q)$  の B 図とつながり方が同じで, つながる正規 4 辺形の個数がそれぞれの部分で 1 個増え, 全体で  $q$  個増えたものになっている。

$p$  が  $q$  に比べある程度大きいとき A 図に非退化 3 辺形が存在する。この 3 辺形をつぶす変形をすると, 隣の 4 辺形が 3 辺形に変わり, この 3 辺形をつぶす変形が実行可能になる。この変形を可能な限り実行していった図がどうなるかが問題である。

一般の場合は図が煩雑になるので,  $q = 5$  の場合を考える。  $p = 2n + 1$ ,  $n_1 = n + q = n + 5$ ,  $p_1 = 2n_1 + 1$  とする。このとき図 14 の様に  $(p, q)$  の A 図を非退化 3 辺形  $h_3 g_4 h_8^{-1}$  からつぶしていく。図 14 の一番下の図を含む A 図を  $P$  とする。  $(p_1, q)$  の A 図も同様に非退化 3 辺形  $h_3 g_4 h_8^{-1}$  からつぶしていく。図 14 は  $(p_1, q)$  の A 図 (の一部) の変形とみることもできる。図 14 の一番下の図を含む  $(p_1, q)$  の A 図を  $Q$  とする。  $Q$  をさらに図 15 の様に変形していく。図 15 の一番下の図を含む

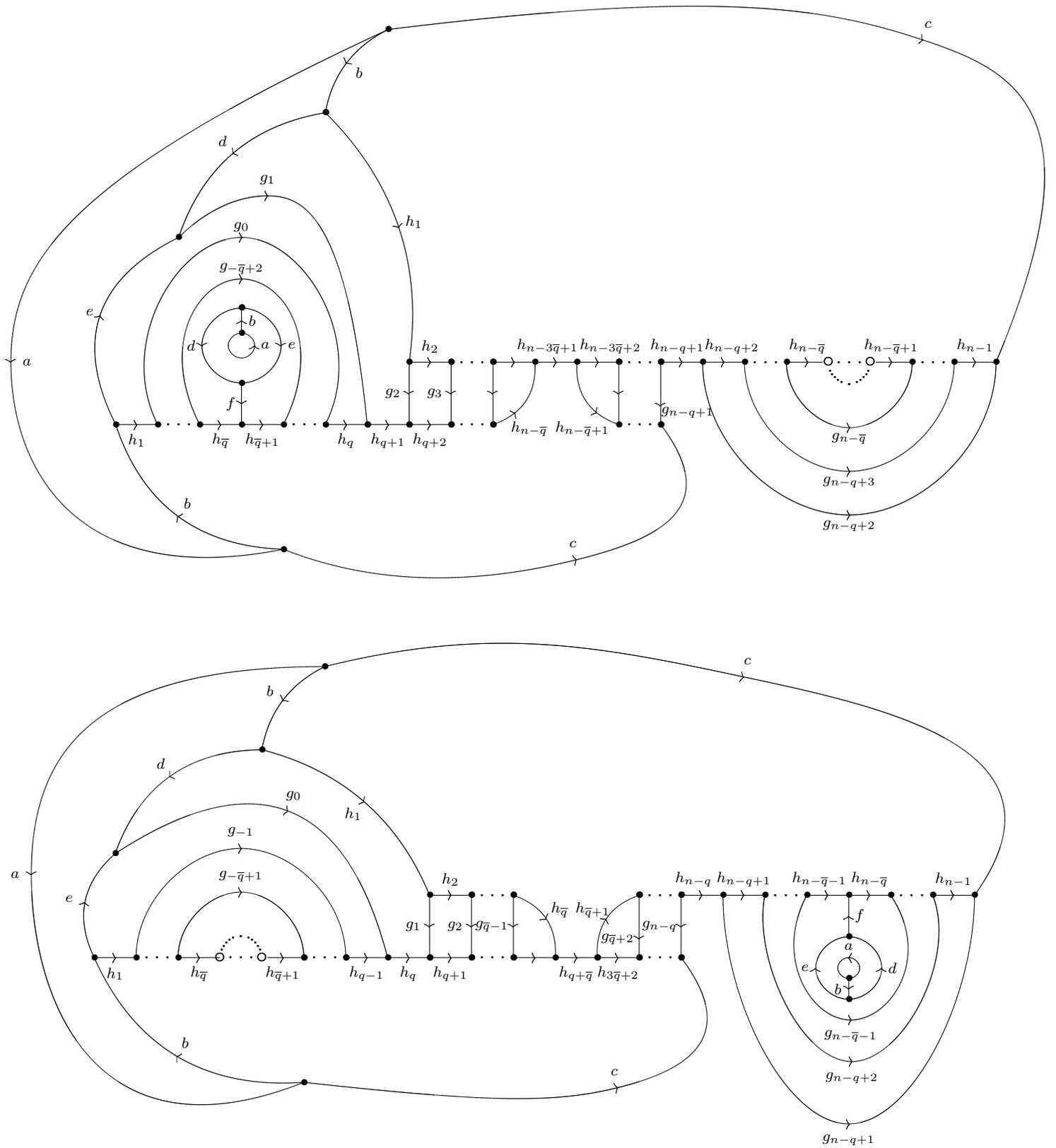
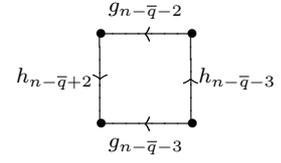
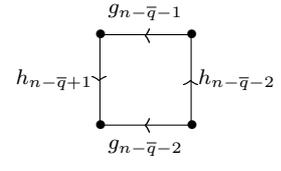
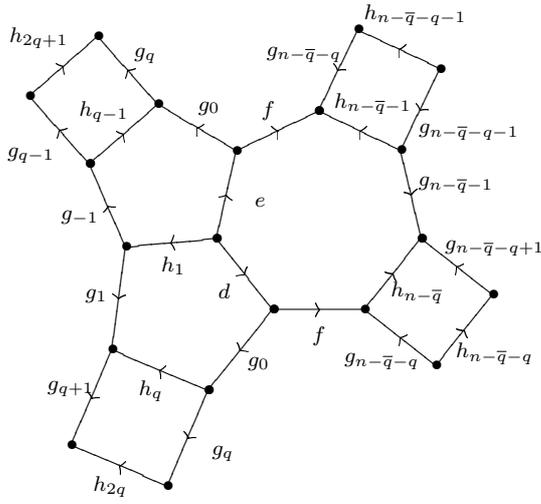
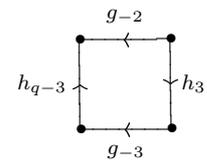
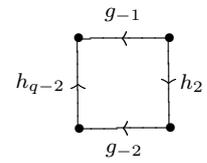
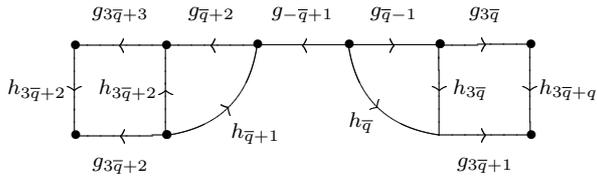
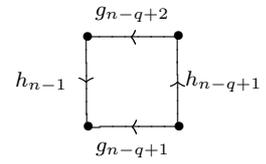


图 11

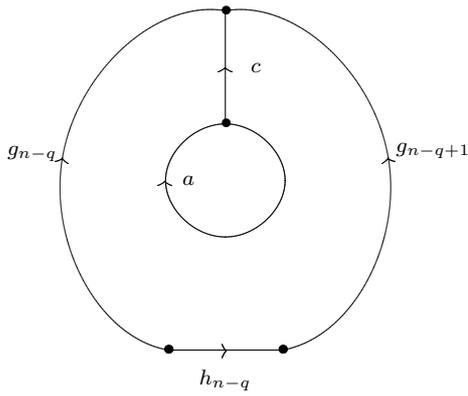
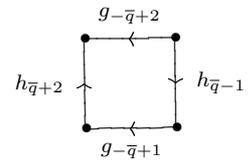
$$(p, q) \quad p = 2n + 1 \quad q = 2\bar{q} + 1$$



⋮

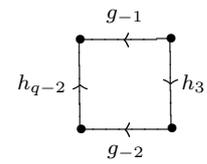
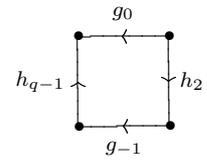
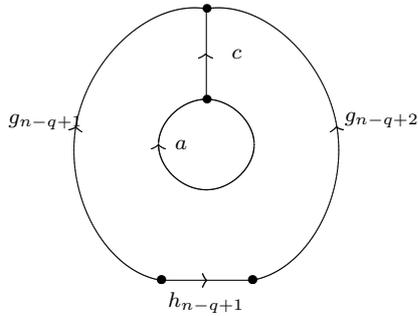
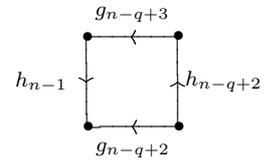
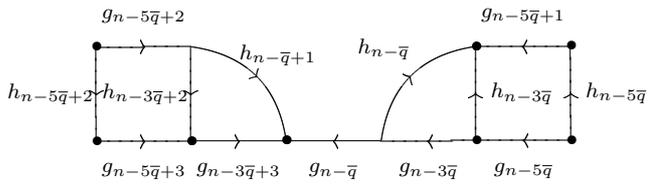
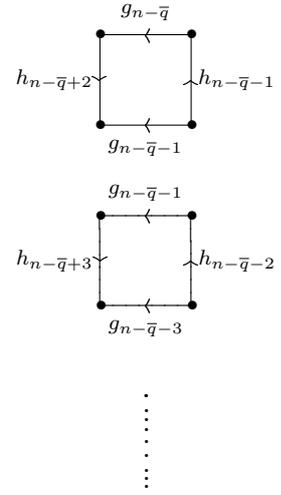
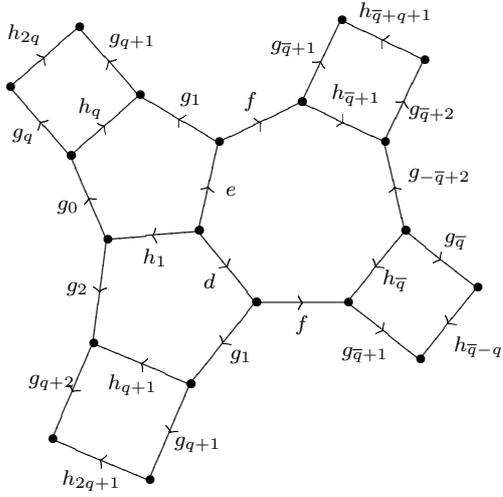


⋮

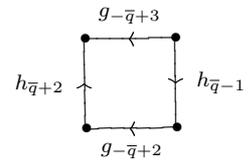


⊠ 12

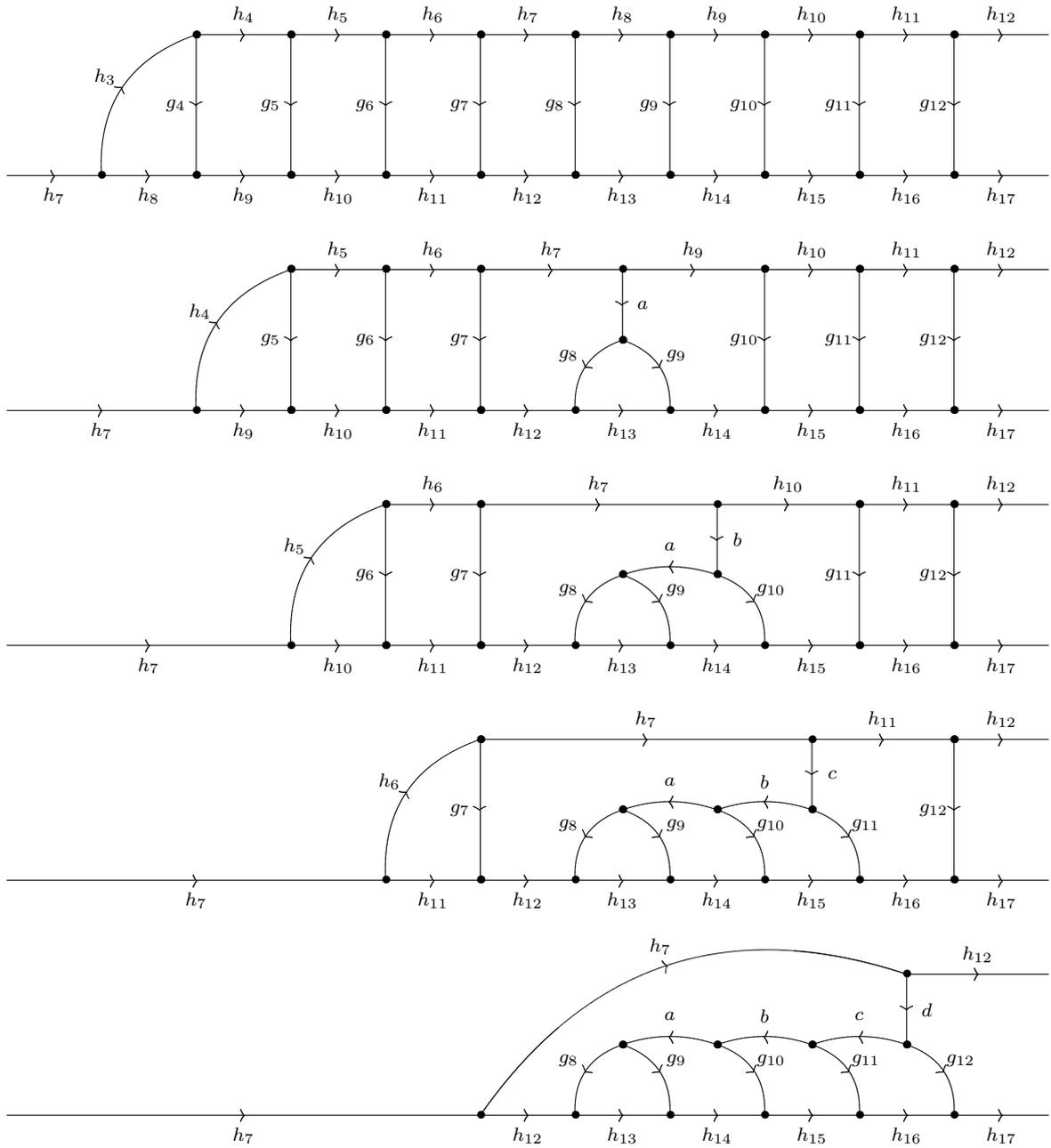
$$(p, q) \quad p = 2n + 1 \quad q = 2\bar{q}$$



⋮



⊠ 13



⊠ 14

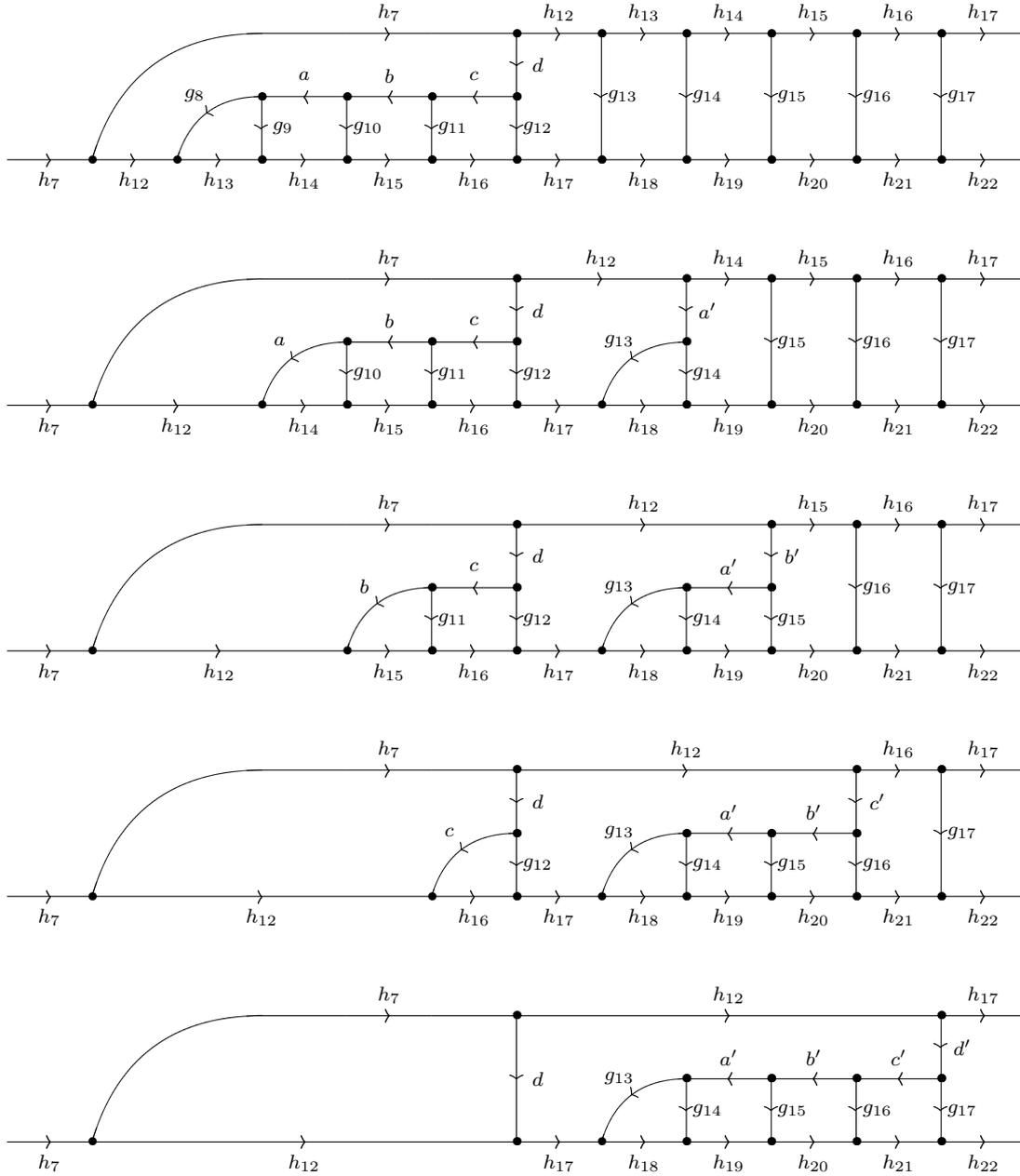


図 15

$(p_1, q)$  の A 図を  $P_1$  とする。  $P$  と  $P_1$  を比べる。 次の様にラベルを読み替えると  $P$  にラベル  $d$  辺を加えた図が  $P_1$  になっている。

$$\begin{aligned}
 g_i &\rightarrow g_{i+5} \quad (i > 7) & h_i &\rightarrow h_{i+5} \quad (i > 7) & a &\rightarrow a' & b &\rightarrow b' \\
 c &\rightarrow c' & d &\rightarrow d'
 \end{aligned}$$

B 図も同様に  $(p, q)$  の B 図にあるラベル  $h_7$  の周りで、ラベル  $h_{12}$  辺を加えた図が  $(p_1, q)$  の B 図になっている。

$q$  が奇数の場合は  $p = 5$  の場合と同様である。 $q = 5$  のときに  $h_7$  に対応するのは  $h_{q+\bar{q}}$  である。正規 4 辺形  $g_i^{-1}h_i g_{i+1} h_{i+q}^{-1}$  で  $i = q + \bar{q}$  となるものが存在すれば、3 辺形つぶしの結果得られる  $h_{q+\bar{q}}$  辺は退化辺になる。正規 4 辺形の終りは  $h_{n-q}$  なので

$$q + \bar{q} < n - q$$

が成立するとき退化辺が存在する。この式を解くと  $5q < p$  が得られる。

$q$  が奇数の場合は同様に定理の成立が分かる。

$q$  が偶数のとき図 14,15 に対応する図は 180 度回転したものになりラベルも変わるが、同様に議論ができる。以上で定理は示される。■

knot の DS-diagram が与えられると、その knot で branch する DS-diagram が自然に構成できる。(3,1)-bridge knot に対応する DS-diagram は「池田のあわび」と呼ばれる DS-diagram である。「池田のあわび」の  $n$ -fold cyclic branched covering space は Brieskorn  $B(2,3,n)$  になるが、 $n = 4, \dots, 10$  のとき頂点数最小の DS-diagram を与えることが知られている。

2-bridge knot の DS-diagram を考察したのはこの様なことが一般の 2-bridge knot でも成立しないかと考えたからである。しかし、残念ながら定理は一般的にはその様なことは成立しない、ということを示している。定理の条件を満たす  $(p, q)$  に対して  $\Sigma(TB(p+2q, q))$  の branched cover を考える。 $\Sigma(TB(p+2q, q))$  の退化 3 辺形は上の空間では一般に非退化 3 辺形になり、C-既約ではない。即ち  $\Sigma(TB(p+2q, q))$  の branched covering space を与える DS-diagram は一般には C-既約ではない。

DS-diagram が C-既約でない場合も考える必要があるのかもしれない。別の例だが、 $P^3$  内の knot の DS-diagram として  $\langle 1 \rangle$  (図 16) がある。この knot で branch する 3-fold branched covering space の DS-diagram は図 17 であり多様体は  $S^3/P_{48}$  である。

図 17 には 2 種類の非退化 3 辺形が存在する。ラベル  $a_1 a_2 a_3$  辺をもつ 3 辺形は  $\langle 1 \rangle$  の 1 辺形の持ち上げとして得られる。この 3 辺形をつぶした DS-diagram は List (<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/DS-diagram/DS-diagram.html>) で K5-49 と呼ばれる DS-diagram になる。これは C-既約である。他の 3 辺形は下の退化 3 辺形の持ち上げとして得られる 3 辺形である。この 3 辺形をつぶした DS-diagram は List で K5-46 と呼ばれる DS-diagram になる。これも C-既約である。K5-46 と K5-49 は同値ではない。しかも  $S^3/P_{48}$  の DS-diagram としては頂点数最小である。

この 3 つの DS-diagram の中でどれが最も「標準的」なのであろう。頂点数最小という点からいうと K5-46 と K5-49 がその候補であろうが、どちらがより「標準的」なのであろうか。図 17 の DS-diagram は頂点数という点では K5-46, K5-49 より 1 つ多いが、どちらにも変形できるという点で 2 つの DS-diagram の「親分」であるという見方もできる。どう考えるのが適切なのであろうか？

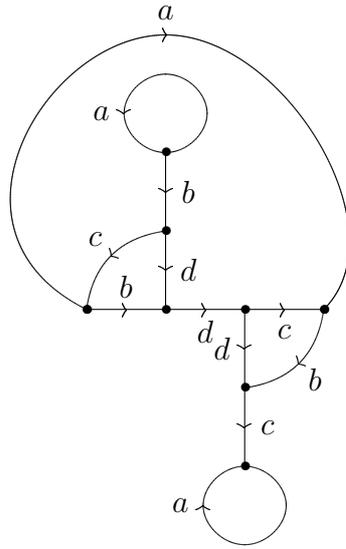


图 16

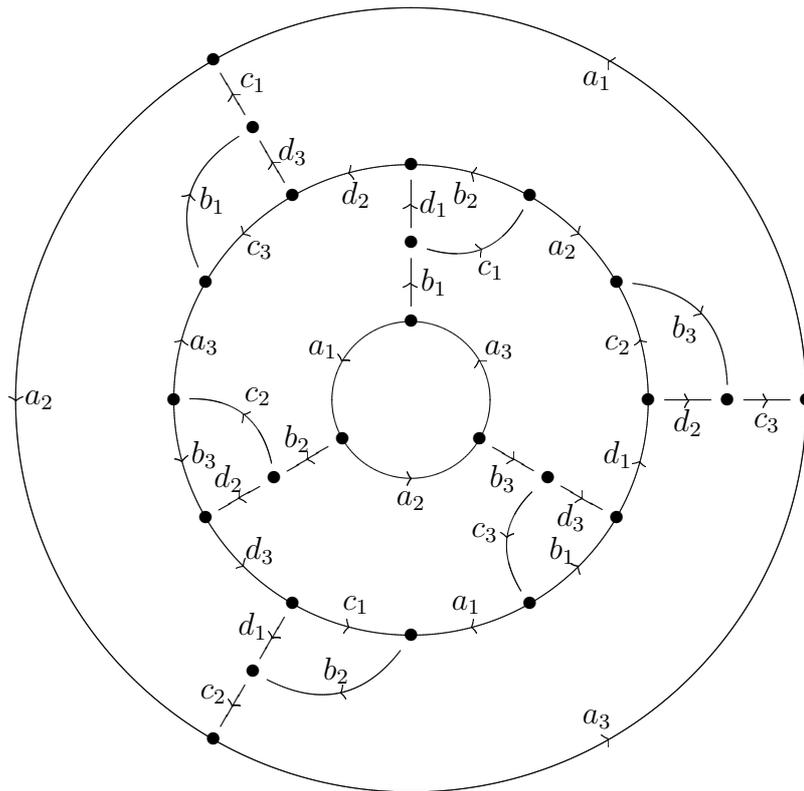


图 17

## 参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [4] Kouno, M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [5] Kouno, M, DS-diagram の generator, 箱根セミナー 2008 記録
- [6] Kouno, M, generalized DS-diagram の  $C$ -変形とリフトについて, 箱根セミナー 2009 記録
- [7] Kouno, M, DS-knot 予想について, 箱根セミナー 2010 記録
- [8] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math., Vol 34, No 1 , pp. 165–183 (2011)
- [9] Yamashita, M, DS-変形の生成元について, 箱根セミナー 1998 記録