

DS-knot 予想について (2)

河野正晴 (北見工業大学)

1 予想と現状

この note は「DS-knot 予想について」([7]) の続きである。DS-knot 予想とは次であった。

DS-knot 予想

C -既約な DS-diagram の DS-knot は homotopic zero ではない。

DS-knot 予想の結論を「trivial knot でない」に弱めた予想を弱い Version の DS-knot 予想と呼ぶ。[7] では少し強い仮定のもとでこの弱い Version の DS-knot 予想の証明を試みた。ここではその続きを考える。多様体はすべて向き付け可能とする。

用語・定義等は [1], [2], [6], [8] を参照のこと。

generalized DS-diagram の面 X^+ のすべての頂点のラベルで相異なるものの個数が k 個のとき、 X^+ は k -point であるという。 X^+ が k_1 -gon のとき $k \leq k_1$ である。 $k = k_1$ のとき X^+ を **proper** という。bridge l と generalized DS-diagram の辺との交わりが k 個のとき k -bridge という。 $f(l)$ の transversal な交点が k_2 個あるとき、 l は $k + k_2$ -point であるという。 $k_2 = 0$ のとき l を **proper** という。

p_1 -point の bridge l で S -move を行い、引き続き p_2 -point の面 X^+ で G -move を行う操作を考える。このとき $p_1 < p_2$ であればこの操作を C -変形と呼ぶ。この変形を行って得られる generalized DS-diagram の頂点数は変形前の頂点数より $p_2 - p_1$ 個少ない。 $p_1 = p_2$ のとき B -変形と呼ぶ。 B -変形で generalized DS-diagram の頂点数は変わらない。有限個の B -変形で移りあえる generalized DS-diagram は B -同値であるという。

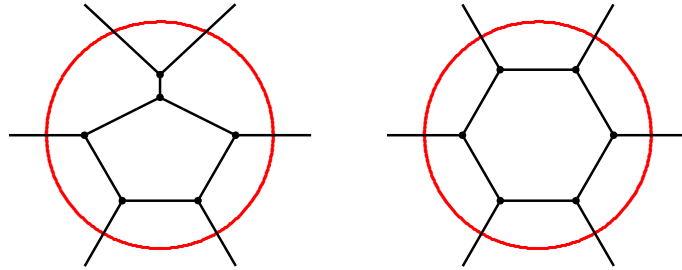
generalized DS-diagram が自己隣接せず、 C -変形不可能のとき C -既約と呼ぶ。

Σ を generalized DS-diagram とする。 Σ と B -同値な任意の generalized DS-diagram Σ' が C -既約のとき、 Σ を **強 C -既約** と呼ぶ。

以下我々は DS-diagram $\Sigma = (S^3, G, f)$ が強 C -既約であることを仮定する。この仮定の下で弱い Version の DS-knot 予想に反例が存在したとする。 k を $M = M(\Sigma)$ 内の trivial な DS-knot で、 D は $\partial D = k$ となる 2-disk とする。 DS-diagram Σ に対し $\partial B^3 = S^2$ となる 3-ball B^3 をとり、写像 f を $f: B^3 \rightarrow M(\Sigma)$ まで拡張しておく。 D は $D \cap f(V(G)) = \emptyset$ で、 $f(S^2)$ と transversal に交わるように変形しておく。 $f(S^2)$ の面 Z に対し $f^{-1}(Z)$ は Σ の 2 つの面であるが、これを Z^+, Z^- と書く。即ち Σ の面 Z^+ と Z^- は f により identify される。

DS-diagram と disk の組 (Σ, k, D) を複雑度最小の反例とする。 $T = (f(S^2) \cap D) \cup \partial D$ とすると T は 3-regular graph である。 $L = f^{-1}(D) \cap S^2$ は 1 つの arc 成分 L_0 と何個かの loop 成分 L_i ($i = 1, \dots, s$) からなる。 L_i ($i \geq 1$) は Σ における proper bridge である。 α を $T - \partial D$ の辺とすると、 $f^{-1}(\alpha)$ は L の辺である。この辺に α という「ラベル」をつける。ラベルが α である辺は 2 つある。 L_i と L_j にラベル α の辺が存在するとき、 L_i と L_j はラベル共有するという。 L_i ($i \geq 1$) は S^2 を 2 つの成分に分ける。 arc 成分 L_0 を含む成分を外側、含まない成分を内側と呼ぶ。内側の面で L_i と交わらないものの closure をコアと呼ぶ。

コアが 1 つの面からなるとき L_i を mono と呼ぶ。 mono であって corner connection を含まないものを normal と呼ぶ。この note では mono と言ったら normal でないものを指すことにする。次図において左が mono であり右が normal である。コアが空集合のとき bridge を trivial と呼ぶ。



[7] では次を示した。

- (1) T は連結である。
- (2) U を境界 ∂D と隣接しない成分とすると \bar{U} は 2-disk である。
- (3) L_i は 1-bridge, 2-bridge, 3-bridge, 4-bridge ではない。
- (4) L_i が 5-bridge なら normal である。
- (5) 5-bridge L_i と normal bridge L_j がラベル共有することはない。特に 5-bridge 2 つがラベル共有することはない。
- (6) L_i の中に 5-bridge は存在する。

2 component diagram

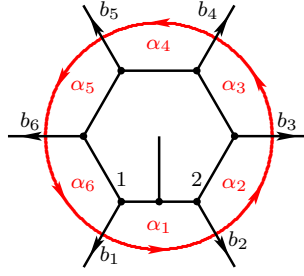
Σ 内の L に対し component diagram と呼ばれる diagram を考える。component diagram とは次の様に定義される**根付き木** (*tree with root*) である。

- (1) 頂点は L の各成分である。DS-diagram の頂点との区別のために node と呼ぶ。
- (2) arc component L_0 を**根** (*root*) とする。
- (3) L の他の node と交わらない S^2 内の arc で arc component L_0 と結べる node を top node と呼ぶ。root と top node を edge で結ぶ。
- (4) root と top node 以外の node で、他の node と交わらない S^2 内の arc で top node と結べる node を second node と呼ぶ。top node と second node を edge で結ぶ。
- (5) root と top node および second node 以外の node で、他の node と交わらない S^2 内の arc で second node と結べる node を third node と呼ぶ。second node と third node を edge で結ぶ。
- (6) この step を繰り返していく。
- (7) root を一番上とし、root に近い方を上と呼ぶ。DS-diagram 上で考えると、外側が上である。
- (8) 一番下の node を terminal node と呼ぶ。
- (9) k -bridge に対応する node を k -node と呼ぶ。
- (10) parallel な成分は1つの node にまとめた方がよいのかもしれない(まだこのことが問題になる状況まで議論が進展していない)。その場合 t 個の parallel な bridge に対応する node の重複度は t であるという。

terminal node は S^2 上で見ると innermost な bridge になっている。5-node は必ず terminal である。ここでは terminal 6-node について考える。

3 terminal 6-node

6-node L_1 のラベルを $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ とし、コアと隣接する面でラベル α_i 辺を含んでいるものを X_i^+ とする。ラベル α_i 辺は X_i^+ を2つに分割するが、「内側」の方を W_i^+ とする。



L_1 と交わる Σ の辺のラベルを b_1, \dots, b_6 とする。ラベル b_i 辺の始点をコアの点としラベルを i とする。これら 6 つの頂点を **主頂点** と呼ぶ。 X_i^+ とコアの共通部分において主頂点の間の頂点の個数が u のとき、 X_i^+ (X_i) を **type u** であるという。

ラベル i 主頂点を含むコア内の面を Y_i^+ とする。ラベル i 主頂点からラベル $i+1$ 主頂点に向かうコアの境界上にあるラベル i 主頂点を始点とする辺のラベルを a_i とする。主頂点間に頂点があれば、ラベル a_i 辺の終点のラベルを i' とし、コアの境界上次の辺のラベルを a'_i とする。

C -変形または B -変形によって複雑度が小さな diagram と disk の組 (Σ, k, D) に変形可能なとき reducible と呼ぶ。

L_1 を terminal 6-node とする。このとき次が成立する。

- (1) corner connection が存在すれば mono である。

corner connection が存在すれば isotopy により 5-bridge に変形できる。この bridge は normal である。よってもとの node は mono である。

以下 corner connection は存在しないとする。

- (2) 隣り合う主頂点のラベルは異なる。

$1 = 2$ とする。 X_1^+ の境界にはラベル 1 頂点が 2 つ、 X_6^+ および X_2^+ の境界にはラベル 1 頂点が 1 つ存在する。 L_1 が innermost なので X_i^- は外部にある。ラベル 1 頂点は内部に 2 点、外部に 2 点存在する。このとき X_1^- と X_2^- はラベル 1 頂点を共有し、コアの境界にラベル b_1 辺またはラベル b_2 辺が存在する。ラベル b_i 辺は L と交わるので、コアが L と交わり矛盾。

- (3) コアの境界に退化辺はない。

コアの境界に退化辺が存在すると、コアの境界または内部に L と交わる辺が存在する。これは L_1 が innermost に矛盾。

- (4) 1 つの主頂点と同じラベルの頂点はコア内には高々 2 個しか存在しない。またコア内の 1 つの面の境界に 2 つ存在することはない。

ラベル 1 頂点を考える。 X_1^+ と X_6^+ の境界にはラベル 1 頂点が存在するので、 X_1^-, X_6^- の境界にもラベル 1 頂点が存在する。 X_1^-, X_6^- は外部にあるが、こ

の2つの頂点が同じ頂点のとき、この頂点からラベル b_1 辺が2つ接続するので矛盾。よって内部には高々2個しか存在しない。

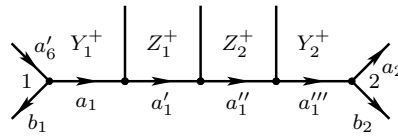
Y_1^+ を境界にラベル1頂点が2つ存在する内部の面とする。この主頂点には X_1^+, X_6^+ の辺が接続している。 Y_1^- の主頂点に対応する頂点に、 X_1^-, X_6^- の辺が接続しないので、外部に3点以上存在して矛盾。

(5) X_i の type は2以下である。

X_1^+ の主頂点間に3頂点以上存在したとする。主頂点を含め主頂点間のすべての頂点のラベルが異なっていれば W_1^+ は7-point 以上である。 W_1^+ が7-point 以上のとき、 L_1 (の少し内側の loop) に沿って S-move を行い、 W_1^+ で S-move を行って得られる C -変形により頂点数の少ない DS-diagram に変形できる。

W_1^+ が6-point のとき、 L_1 (の少し内側の loop) に沿って S-move を行い、 W_1^+ で S-move を行って得られる B -変形により L_1 を trivial に変形できる。trivial な node は isotopy で複雑度の小さいものに変形できるので矛盾。

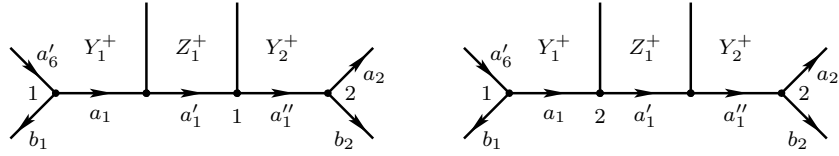
よって W_1^+ は5-point 以下とする。 L_1 との交わりでできる頂点のラベルは他と異なっており、主頂点のラベルとも異なるので、主頂点間の中でラベルで1, 2と異なるものは高々1つである。これを i とする。



ラベル i 頂点が2つ存在するとき、コアの境界に退化辺は存在しないので、ラベル a_1 辺とラベル a''_1 辺の終点のラベルが i である。ラベル a'_1 辺の終点のラベルは1または2なので、対称性より1とする。2つのラベル i 頂点のまわりの面で identify されるものが存在する。 Y_1^+ が identify される面のとき内部にもう1つラベル1頂点が存在して矛盾。 Z_1^+ の中の場合も同様に矛盾。よってラベル i 頂点は1個とする。

ラベル1と2の対称性によりラベル a_1 辺の終点のラベルを2とする。このとき $Y_1^- = Y_2^+$ である。 Y_2^+ にはラベル1頂点が存在するので、ラベル a''_1 辺の終点のラベルは i である。ラベル a'_1 辺の終点のラベルは1であり、内部に3個ラベル1頂点が存在するので矛盾。

(6) X_1^+ が type 2 のとき次図のいずれかである。左図のときラベル1頂点の重複、右図のときラベル2頂点の重複ということにする。



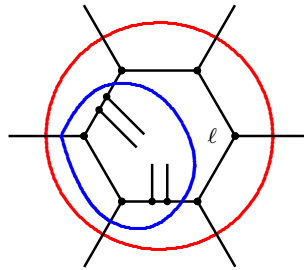
図以外の可能性はラベル a_1 辺の終点のラベルが 2, ラベル a'_1 辺の終点のラベルが 1 のときである。このとき $Z_1^- = Y_1^+$ かつ $Z_1^- = Y_2^+$ となり矛盾。

(7) X_1 が type 2 のとき, X_2, X_3, X_5, X_6 は type 2 ではない。

X_1^+ が前図の右でも左でも $Y_1^- = Y_2^+$ が成立していることを注意しておく。この事実から type 2 が隣り合うとラベル i 頂点が内部に 3 個存在する。よって X_2, X_6 が type 2 ということはない。

X_1 はラベル 1 頂点の重複とする。 X_5 が type 2 とする。このとき $Y_2^+ = Y_1^-$, $Y_6^+ = Y_5^-$ が成立している。

X_6 が type 0 のとき $Y_1^+ = Y_6^+$ なので $Y_2^+ = Y_5^+$ である。このとき 4-bridge ℓ は proper で ℓ が Y_2^+ から切り取る部分は 5-point 以上なので reducible である。



よって X_6 は type 1 とする。ラベル a_6 辺の終点のラベルは 2 なので, Y_6^+ の境界にはラベル 2 頂点が存在する。 $Y_5^+ = Y_6^-$ より Y_5^+ の境界にもラベル 2 頂点が存在する。内部にラベル 2 頂点が 3 個存在するので矛盾。よって X_5 は type 2 ではない。

最後に X_3 が type 2 とする。 $Y_1^- = Y_2^+, Y_3^- = Y_4^+$ である。 X_2 が type 0 のとき $Y_2^+ = Y_3^+$ であり, 4-bgrdge で 5-point 以上のものが存在するので矛盾。よって X_2 は type 1 である。 X_2^+ のラベル $2'$ 頂点を始点として内部に向かう辺のラベルを d_2 とする。この辺は Y_2^+ と Y_3^+ の共通部分なので, ラベル d_2 辺は内部に 3 個存在する。

X_3^+ においてラベル3頂点が重複しているとする、 $2' = 4$ である。ラベル $2'$ 頂点は Y_1^+ にもあるので、ラベル4頂点が内部に3個存在する。よって X_3 はラベル4頂点が重複している。

X_6 が type 0 とする。 X_5 が type 0 のとき $2' = 5$ となり内部にラベル5頂点が3個存在するので、 X_5 は type 1 である。 X_4 が type 0 のときは f が local homeomorphism でなくなるので、 X_4 は type 1 である。 Y_5^+ の境界にラベル d_2 辺が存在するので Y_5^- は内部にある。 Y_5^+ の境界にはラベル3頂点が存在するので、内部にラベル3頂点が3個存在して矛盾。

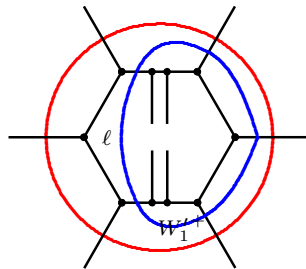
よって X_6 は type 1 とする。コアは X_2, X_5 を軸として X_1 と X_3 , X_4 と X_6 は対称なので、 X_4 も type 1 としてよい。

X_5 が type 0 のとき $Y_5^+ = Y_6^+$ である。 Y_6^+ の境界にはラベル a_2 辺およびラベル $2'$ 頂点が2個存在する。 Y_6^- は外部にあるので、ラベル $2'$ 頂点が内部に3個、外部に2個存在して矛盾。 X_5 の type は1である。

Y_6^+ が 4-gon のとき、 Y_5^+ の境界にはラベル $2'$ 頂点が2つ存在する。 Y_5^+ の境界にはラベル a_2 辺が存在するので、 Y_5^- は外部にある。ラベル $2'$ 頂点が外部に2個、内部に3個存在するので矛盾。よって Y_6^+ は 5-gon 以上である。 Y_6^+ の境界にラベル a_2 辺が存在するので Y_6^- は外部にある。 Y_6^+ が 6-gon 以上のとき reducible か normal node に変形可能である。よって Y_6^+ は 5-gon としてよい。同様に Y_5^+ も 5-gon である。このとき Y_5^+ に隣接しコアの境界と隣接しない面を Z^+ とする。 Z^+ の境界のラベルをある方向から読んだとき、ラベル d_2 辺およびラベル d_2^{-1} 辺 (ラベル d_2 辺で方向が逆) が存在するので Z^- が自己隣接面になる。これは C -既約に矛盾。

- (8) X_1, X_4 が type 2 のとき、他がすべてが type 1 以外は normal に変形可能か reducible である。

X_1 はラベル1が重複しているとする。 X_5, X_6 が type 0 のとき $Y_1^+ = Y_5^+$ なので、 $Y_2^+ = Y_1^-, Y_5^+ = Y_4^-$ より $Y_4^+ = Y_1^-$ となる。 X_2, X_3 が type 0 と type 1 のとき自己隣接面が存在するので矛盾。 X_2, X_3 がともに type 1 のときは 2-bridge が存在し、2-bridge が non-trivial なら reducible であり、trivial なら非退化 3-gon が存在するのでやはり reducible である。よって X_2, X_3 も type 0 である。



このとき図のような 5-bridge l が存在する。 l で S-move を行い、 W_1^+ で G-move を行ったものは B-変形であり、結果は mono node になる。corner connection を isotopy で変形すると 4-bridge になるので reducible である。

X_6 が type 0, X_5 が type 1 の場合を考える。 X_2 が type 0 のとき Y_2^+ の境界にはラベル 3 頂点が存在し、 Y_5^+ の境界にもラベル 3 頂点が存在する。 Y_5^- の境界にもラベル 3 頂点が存在し、内部に 3 個ラベル 3 頂点が存在するので矛盾。よって X_2 は type 1 である。

Y_2^+ と Y_3^+ の共通辺のラベルを d_2 とすると Y_1^+ と Y_5^+ の共通辺のラベルも d_2 であり、ラベル d_2 辺は内部に 3 個存在する。 X_3 が type 0 なら $Y_4^+ = Y_3^+$ なので Y_2^+ の共通辺としてラベル d_2 辺が境界に存在するので Y_4^+ の境界にはラベル d_2 辺が 2 個存在し、 Y_4^+ と Y_5^+ はラベル d_2 辺で隣接する。このとき内部にラベル 4 頂点またはラベル 5 頂点が 3 個存在して矛盾。よって X_3 の type は 1 である。

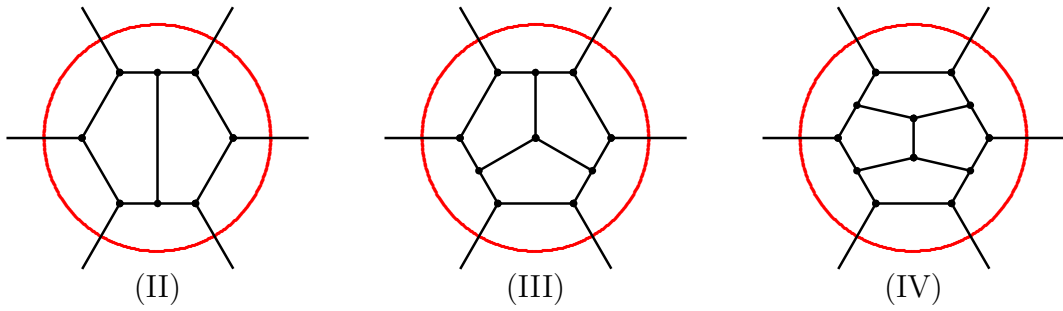
X_4 においてラベル 5 頂点が重複するときは $4 = 2'$ なのでラベル 4 頂点が内部に 3 個存在する。ラベル 4 頂点が重複するときは Y_3^+ の境界にラベル 5 頂点が存在する Y_3^+ の境界にはラベル d_2 辺が存在するので Y_3^- は内部にある。ラベル 5 頂点が内部に 3 個存在して矛盾。

X_6 が type 1, X_5 が type 0 の場合を考える。 Y_1^+ および Y_5^+ の境界にラベル 2 頂点が存在するので、 $Y_4^+ = Y_5^-$ の境界にもラベル 2 頂点が存在し、内部にラベル 2 頂点が 3 個存在するので矛盾。

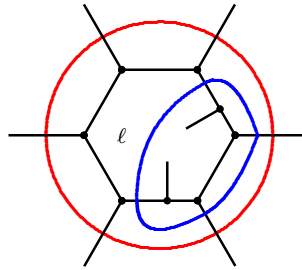
最後に X_6 および X_5 が type 1 の場合を考える。 X_4 がラベル 4 頂点の重複であれば、回転対称性により処理が終わっていると考えることができるので、ラベル 5 頂点が重複しているとする。

ラベル 3 と 6 の主頂点を軸にして対称なので X_2 が type 0 X_3 が type 1 としても一般性を失わない。 Y_6^+ が 4-gon のとき $3' = 3$ となるのでコアの境界に退化辺が存在する。よって Y_6^+ は 5-gon 以上である。 Y_6^+ の境界にラベル a_2 辺が存在するので Y_6^- は外部にある。 Y_6^+ が 6-gon 以上なら 6-point 以上なので、reducible であるか normal に変形可能である。よって Y_6^+ は 5-gon である。コアの内部にあり、 Y_6^+ と隣接し、コアの境界と隣接しない面を Z^+ とすると、 Z^+ の境界にはラベル a_3' 辺とラベル $3'$ 頂点が 2 個存在する。 Z^- は外部にあるので、ラベル $3'$ 頂点が外部に 2 個、内部に 3 個存在し矛盾。

- (9) コア内の diagram (II), (III), (IV) を図の様に定義する。



(10) type 0 が 3 つ連続すると mono または normal に変形可能か reducible である。



normal node でないとする。このとき 4-bridge l が存在する。この 4-bridge は proper である。 l で分離される 5-point-gon が存在すれば reducible であり、そうでなければ、 l で切り取られる面での S-move による B-変形で mono に変形できる。

(11) type 0 が 2 連続すると mono, normal または (II) に変形可能か reducible である。

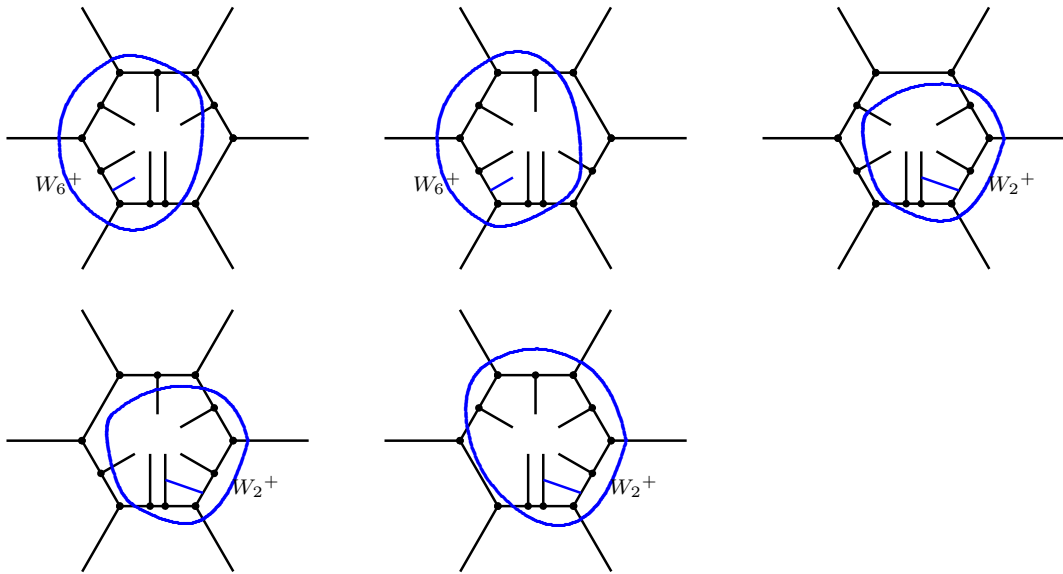
(10) より type 0 は 3 連続でないとする。type 1 が 2 つだけのとき 2-bridge が存在する。このとき (II) でなければ reducible である。

type 1 が 3 つのとき 3-bridge が存在する。この bridge が trivial の場合は normal に変形可能であり、trivial でない場合は reducible である。

type 1 が 4 つあるときは mono か normal に変形できるか reducible である。

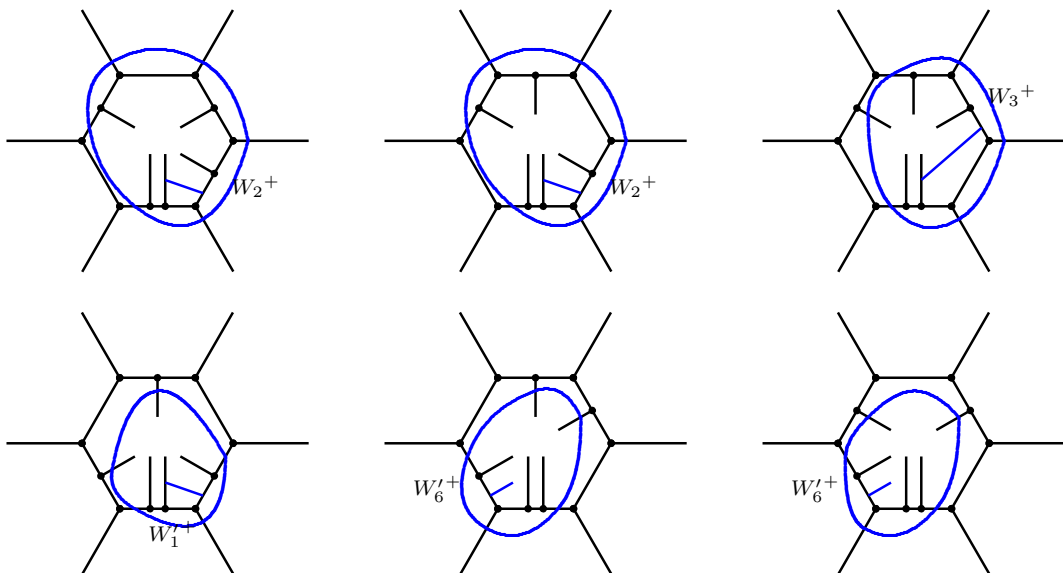
(12) X_1 が type 2 で他が type 0 または 1 とする。すべて type 1 の場合を除いて mono, normal または (II) に変形可能である。

X_1 はラベル 1 頂点が重複しているとする。

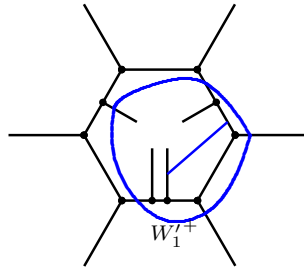


X_i の中に type 0 が 1 つのときは前図の様に bridge l をとる。このとき l は proper であり, W_i^+ は $f^{-1}f(l)$ により 6-point になるので, B -変形で得られた diagram は mono, normal, (II) でなければ reducible である。

X_i の中に type 0 が 2 つある場合は次図のように 5-bridge または 6-bridge をとる。5-bridge, 6-bridge は proper なので B -変形ができて mono, normal, (II) でなければ reducible である。

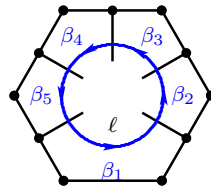


X_i の中に type 0 が 3 つある場合, 次図の 5-bridge で S-move, W_1^+ で S-move を行うと reducible であることが分かる。



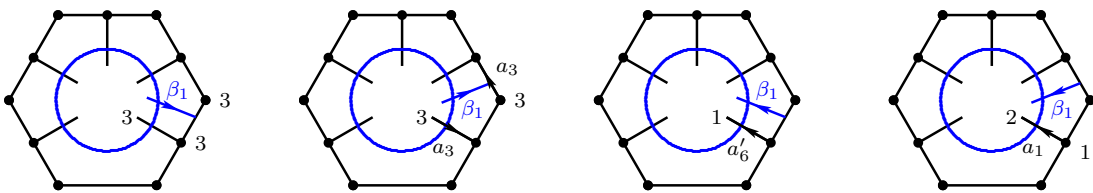
- (13) X_1 が type 0 で他がすべて type 1 のとき mono, normal, (II) に変形可能であるか reducible である。

次図のような 5-bridge ℓ が存在する。最初に ℓ が proper でない場合、即ち 6-point 以上の場合を考える。

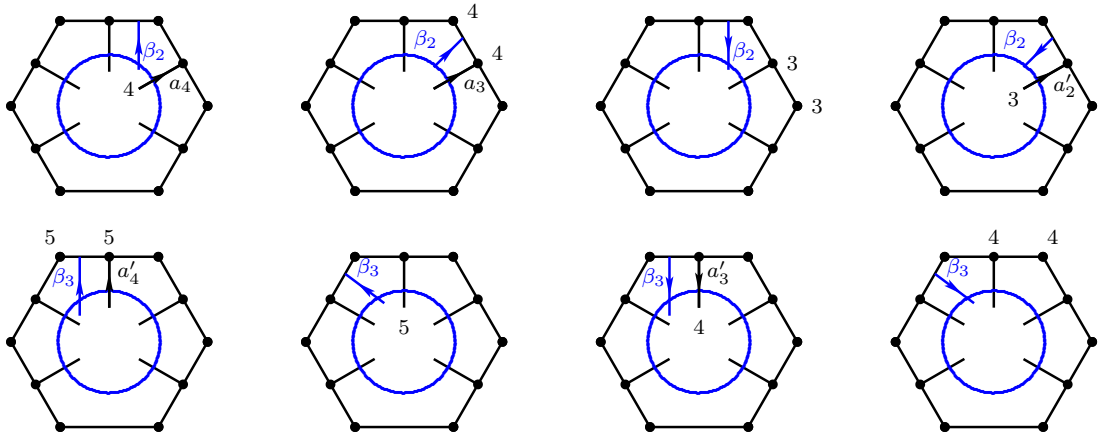


$Y_1^- = Y_3^+$ のときを考える。このとき退化辺がコアの境界に存在するか、主頂点のラベルと同じラベルの頂点が内部に 3 個存在する。次図左端の場合コアの境界に退化辺 (頂点のラベルがともに 3) が存在する。他の場合ラベル a_3 辺またはラベル a'_6 辺, ラベル a_1 辺が Y_1^+ に (図には描いてないが) もう 1 つ存在して, ラベル 3 頂点またはラベル 1 頂点が内部に 3 個存在する。いずれにしる矛盾。

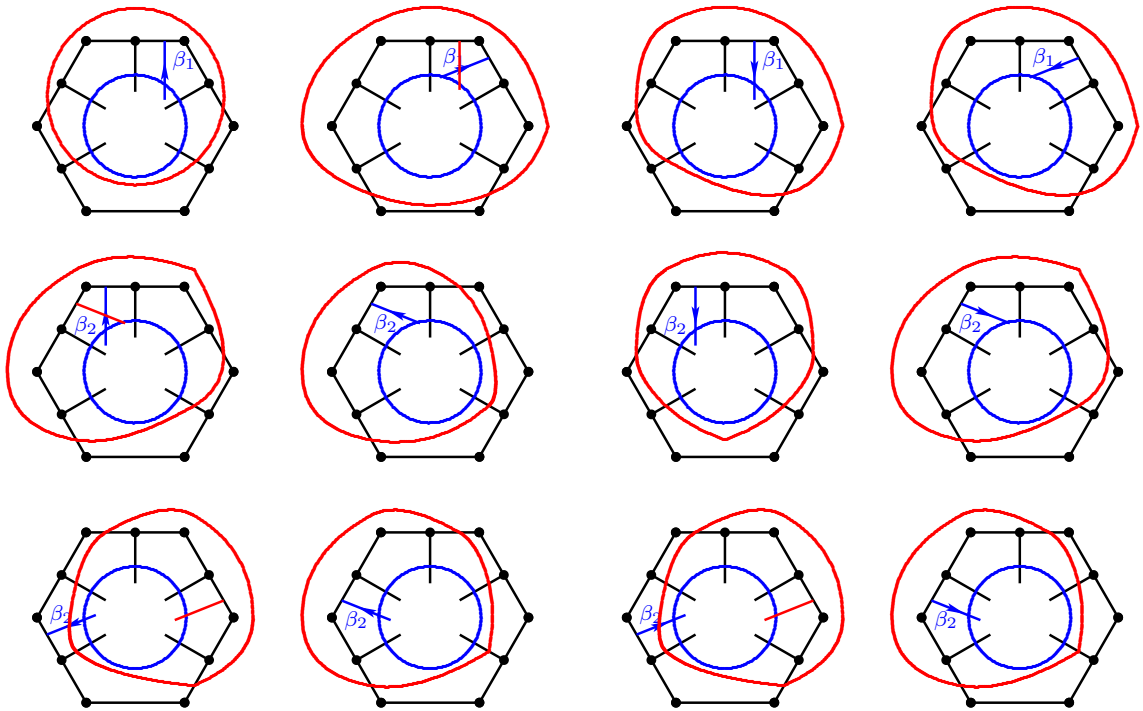
対称性により $Y_1^- = Y_6^+$ のときも OK。



$Y_3^- = Y_4^+$ ($Y_5^- = Y_6^+$), $Y_4^- = Y_5^+$ の様に対隣接する場合は $Y_1^- = Y_3^+$ の場合と同様にコアの境界に退化辺が存在するか、主頂点のラベルと同じラベルの頂点が内部に 3 個存在して矛盾。



次に対隣接しない場合を考える。対隣接しない場合は6-bridge l_1 で、 $f^{-1}f(l_1)$ によって W_i^+ が6-gonになる様なものが存在する。 l_1 でS-moveし、 W_i^+ でG-moveした結果はmono, normal, (II)またはreducibleである。



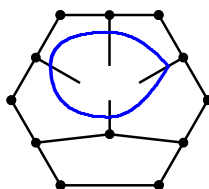
次に l が proper の場合を考える。

$Y_1^+ (= Y_2^+)$ が4-gon のときは3-bridgeが存在するが、reducible でなければ、この3-bridge は trivial である。よってコアは6-gon 1個、4-gon 3個から

なる。6-gon は 6-point であり，外部の 6-gon と identify されるので normal node に変形可能である。

Y_1^+ が 6-gon 以上のとき， l が proper ということから Y_1^+ は 6-point 以上である。 Y_1^- が内部にあるときは l で S -move を行い， Y_1^+ を l でカットした面で G -move することにより複雑度が下がる。 Y_1^+ が外部にあるときは L_1 (の少し内側) で S -move を行い， Y_1^- で G -move することにより，reducible か normal node に変形できる。

Y_1^+ が 5-gon のとき 4-bridge l_1 が存在する。 Y_4^+ が 4-gon なら 3-bridge が存在して normal node に変形可能か reducible である。同様に Y_5^+ が 4-gon， Y_3^+ が 5-gon または Y_6 が 5-gon ならば normal node に変形可能か reducible である。



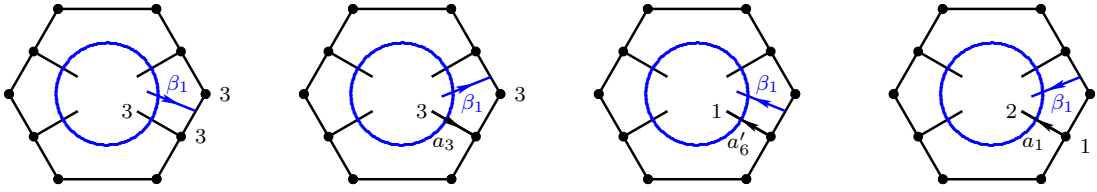
4-bridge l_1 が non-proper のときは前の議論と同様に，reducible でなければ mono, normal, または (II) に変形可能である。

よって l_1 は proper とする。このとき Y_2^- が内部にあれば， l_1 で S -move を行い， Y_2^+ の l_1 で切り取られる外の部分の面で G -move すると reducible であることが分かる。 Y_2^- が外部にあれば Y_2^+ の l_1 で切り取られる中の部分の面で G -move すると normal に変形可能か reducible であることが分かる。

- (14) type 0 が 2 つ，他がすべて type 1 のとき，次図の場合を除いて，reducible であるか (II) または (IV)，normal node に変形可能である。

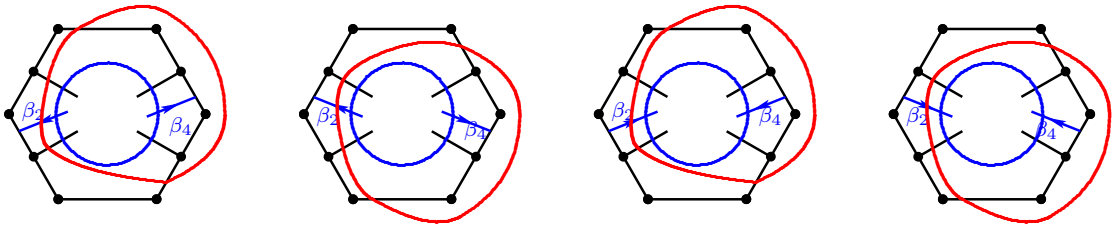


最初に X_1, X_4 が type 0 で他が type 1 の場合を考える。このとき 4-bridge l が存在するが，最初に l が non-proper なときを考える。対隣接するときは $Y_1^- = Y_3^+$ としても一般性を失わない。このときは前と同様に，コアの境界に退化辺が存在するか，主頂点のラベルをもつ頂点が内部に 3 個存在する。いずれも矛盾。

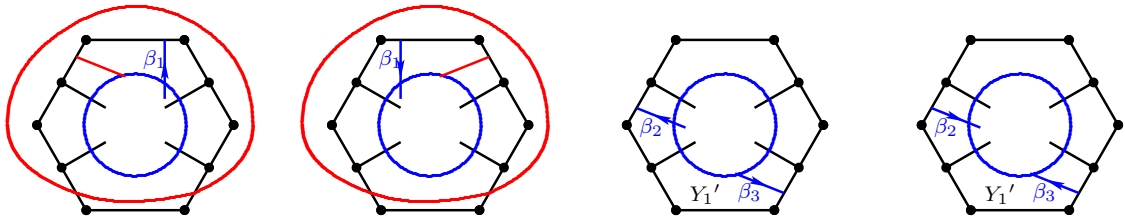


よって対隣接しない場合、即ち $Y_3^- = Y_6^+$ と $Y_1^- = Y_4^+$ を考える。

$Y_3^- = Y_6^+$ の場合は次図のように 6-bridge l_1 が存在して $f^{-1}f(l_1)$ により W_i^+ が 6-point になる。 l_1 で S -move を行い、 W_i^+ で G -move を行って得られる DS-diagram は normal か (II) になる。



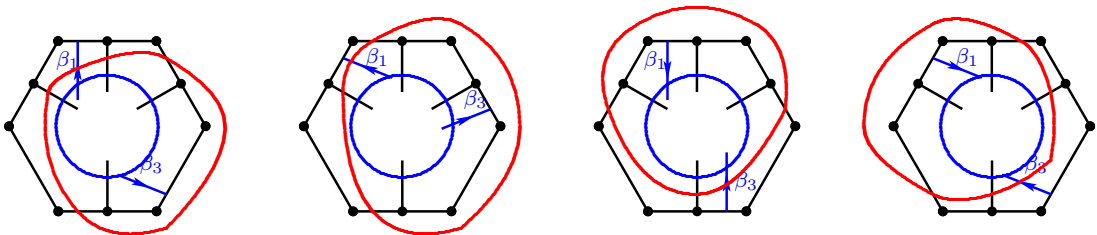
$Y_1^- = Y_4^+$ のとき、最初に出てきた変形不可能な 2 つの場合を除くと次図の様になっている。左 2 つは l_1 で S -move を行い、 W_1^+ で G -move を行う。右 2 つは l で S -move を行い、 $Y_1'^+$ で G -move を行う。いずれも reducible であることが分かる。



l が proper な場合は (IV) でなければ normal に変形可能か reducible である。

次に X_2, X_6 が type 0 で他が type 1 の場合を考える。4-bridge l が存在するが proper な場合は、normal に変形可能でなければ reducible である。

non-proper なとき、対隣接であれば、前と同様にコアの境界に退化辺が存在するか、主頂点のラベルをもつ頂点が内部に 3 個存在する。対隣接でなければ $Y_2^- = Y_5^+$ としても一般性を失わない。



l_1 で S -move を行い, W_i^+ で G -move を行うことにより, (II) または normal でなければ reducible であることが分かる。

(15) type 0 が 3 個, type 1 が 3 個のときは (III) でなければ reducible である。

3-bridge が存在するが, この bridge が trivial なら (III) であり, そうでないなら reducible である。

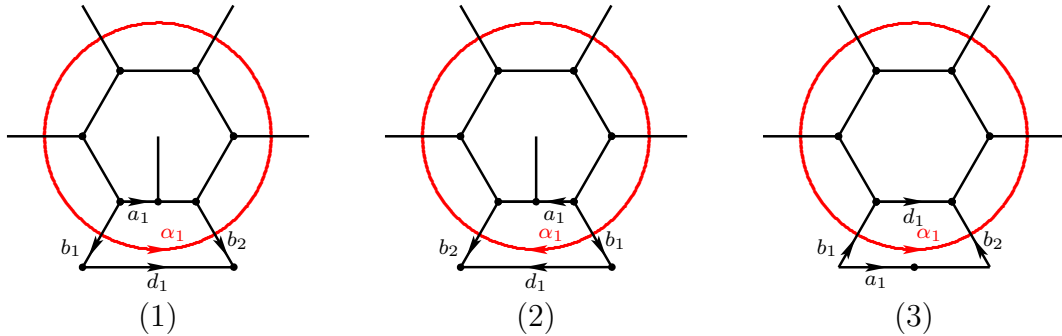
以上により terminal 6-node は type 0 を持たないか, mono, normal, (II), (III), (IV) または (14) で出てきた 2 つのいずれかであることが分かる。

4 5-node とラベル共有する terminal 6-node

5-node とラベル共有する terminal 6-node について次が成立する。

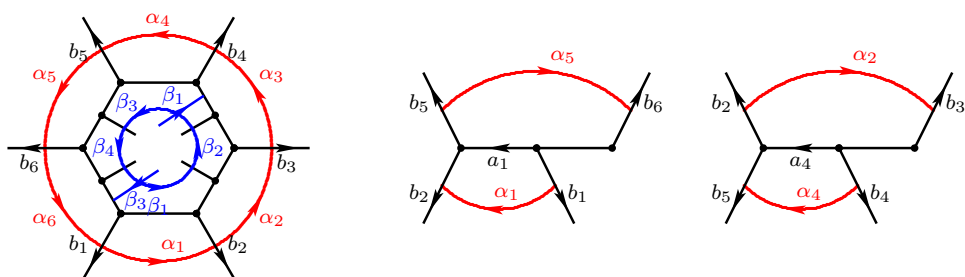
命題 5-node とラベル共有する terminal 6-node は mono, (II), (III), (IV) のいずれかに変形可能である。

2 つの node がラベル共有するとき, コアの辺どうしが identify されるタイプを +type と呼び, そうでないタイプを -type と呼ぶ。次図でいうと (1) と (2) が identify されるとき +type, (1) と (3) が identify されるとき -type である。

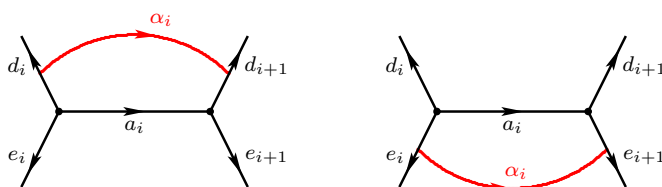


normal node が 5-node とラベル共有しないことは [7] で示したので, 前節の結果より type 0 を持たない場合と (14) の場合は 5-node とラベル共有しないことを示せばよい。

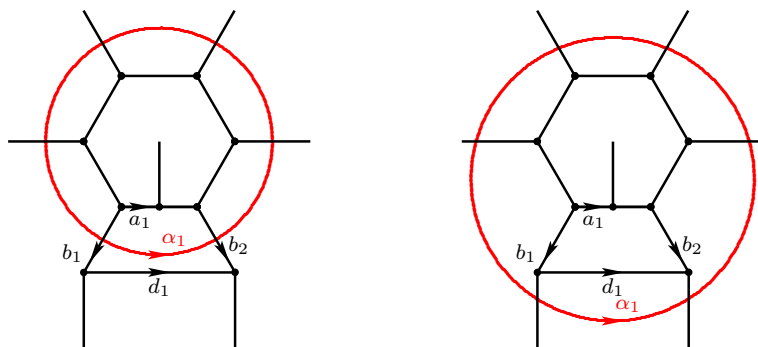
L_1 とラベル共有する 5-node を L_2 とする。5-node は normal である。 L_1 が (14) の場合, 対称性より下図左として一般性を失わない。ラベル共有するラベルが α_1 または α_4 の場合 +type の共有をすることはない。また X_i^+ が type 0 でないとき α_i で +type の共有をすることはないので, (14) の場合共有のタイプは -type である。またすべてが type 0 でない場合も共有のタイプは -type である。



ここで **normal node の移動** を定義する。 L_i を normal node とすると、コアは 1 個の面 Y^+ からなる。このとき L_i (の少し外側の loop) で S -move を行い Y^+ で G -move を行うと、 Y^+ の主頂点のラベルがすべて異なることより、 B -変形になる。この B -変形を normal node の移動と呼ぶ。この移動で L_i は Y^+ のまわりから Y^- のまわりに移動するが、 L_i とラベル共有している node も変形される。ラベル共有している辺は次図の様に DS-diagram の辺を跨いで移動する。



L_1 は 5-node L_2 とラベル α_1 を共有しているとする。共有タイプは $-$ type なので、 normal node L_2 の移動を行うと、 L_1 は次図のように変形される。



normal node の移動で L_1 はラベル共有する部分の隣の X_i が type u から type $u+2$ に変わる。 L_1 の中に 2 つ離れている X_i と X_j がともに type 0 ということはないので、変形後は必ず type 3 以上の部分が存在するので reducible である。 ■

mono, (II), (III), (IV) が normal node とラベル共有しているとき、 normal node の移動を実行すると次の様に変化する。 $+$, $-$ はラベル共有のタイプを表す。例えば

mono が +type のラベル共有すれば reducible なので mono のラベル共有は -type としてよい。同様に (IV) のラベル共有は +type としてよい。

reducible \iff +mono- \iff +(II)- \iff +(III)- \iff +(IV)- \iff reducible

参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [4] Kouno, M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [5] Kouno, M, DS-diagram の generator, 箱根セミナー 2008 記録
- [6] Kouno, M, generalized DS-diagram の C -変形とリフトについて, 箱根セミナー 2009 記録
- [7] Kouno, M, DS-knot 予想について, 箱根セミナー 2010 記録
- [8] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, Tokyo J. of Math., Vol 34, No 1 , pp. 165–183 (2011)
- [9] Yamashita, M, DS-変形の生成元について, 箱根セミナー 1998 記録