DS–diagram の surgery (2)

河野正晴 (北見工業大学)

1　surgery

2011 年の箱根セミナーでは DS–diagram の surgery について考えた。ここではその続きとして辺の分布について考える。定義等については 2011 年の箱根セミナー記録 ([1]) を参考にして下さい。

昨年は低い頂点の surgery については目の子で探したが，その後見落しがあることが分かった。ここでは surgery を組織的に見つけることを考える。surgery を組織的に見つけるには,

(1) 辺の分布を組織的に見つける

(2) 辺の分布に対し (すべての)surgery を見つける方法を見つける

ことが必要であろう。ここでは (1) について考える。

DS–diagram の surgery について確認しておく。$\Sigma = (S^2, G, f)$ を DS–diagram とする。$f(G)$ の loop C を考える。$W = U(C; f(S^2))$ とする。ただし $U(A; X)$ は X における A の regular neighborhood とする。$f_1 = f_{|f^{-1}(W)}, f_2 = f_{|S^2 - \mathrm{Int}\, f^{-1}(W)}$ とおく。このとき Σ は 2 つの DS–diagram $(f^{-1}(W), f^{-1}(W) \cap G, f_1)$ および $(S^2 - \mathrm{Int}\, f^{-1}(W), S^2 - \mathrm{Int}\, f^{-1}(W) \cap G, f_2)$ の和になる。

(F, H, g) を $\partial(F, H, g) = \partial(f^{-1}(W), f^{-1}(W) \cap G, f_1)$ を満たす DS–diagram とする。このとき (F, H, g) と $(S^2 - \mathrm{Int}\, f^{-1}(W), S^2 - \mathrm{Int}\, f^{-1}(W) \cap G, f_2)$ の和が構成できるが，これを Σ' とする。Σ を Σ' に変える変形を surgery と呼ぶ。

この操作を surgery と呼ぶのは次の事情による。$M = M(\Sigma)$，$V = U(C, M)$ とする。$M' = M(\Sigma')$ とすると，M' は $M - \mathrm{Int}\, V$ と V を別の貼りあわせで貼りあわせて得られる。V は solid torus なので M' は M から surgery で得られる。

$(f^{-1}(W), f^{-1}(W) \cap G, f_1)$ のように $f_1(f^{-1}(W) \cap G)$ が “ひげの生えた”loop になっている DS–diagram をここでは local な DS–diagram と呼んでおく。

2　辺の分布

$\Sigma = (S^2, G, f)$ を DS–diagram とする。$f(G)$ の simple loop C を考える。ここで C は orientation preseving cureve とする。あるいは $M = M(\Sigma)$ が orientable であることを仮定する。C は n 個の辺からできているとする。$f^{-1}(C)$ を考えると次の 2 つの場合がある。

(1) 成分の中に loop がある。

(2) すべての成分が arc である。

(1) の場合最短のものを考えることにより，loop は S^2 上で面の境界になっているとしてよい。このとき成分は，長さ n の loop 2 個と長さ 1 の arc が $n-2$ 個からなる。この場合一般には surgery はできない。

以下 loop が存在しない場合を考える。最初はさらに次の $(*)$ の元で考える。

$(*)$ 長さ n 以上の arc が存在する。

$f(G)$ の loop C を先に選ぶとこれらの条件を満たさない場合はあるが，DS–diagram 上の arc を先に選ぶとするならば，条件 $(*)$ をつけても制限にならないことを注意しておく。DS–diagram 上で端点が同じラベルを持つ G 内の arc ℓ を選ぶ。$f^{-1}(f(\ell))$ が loop をもつときは ℓ の内部に同じラベルの頂点をもつので，さらに短い arc で端点が同じラベルのものを選ぶ。これを繰り返していき，最終的に得られる arc を ℓ とする。このとき $C = f(\ell)$ とおくと，C は条件 $(*)$ をみたす。

命題 1 条件 $(*)$ を満たす $f(G)$ の loop C に対し，(n, e, N) が対応する。ここで $N \subset \{2, 3, ..., n\}$ であり，$\sharp N = k$ とする。$n - k$ が奇数のとき $e = n$ または $e = n + 2$ であり，$n - k$ が偶数のとき $e = n$ または $e = n + 1$ である。

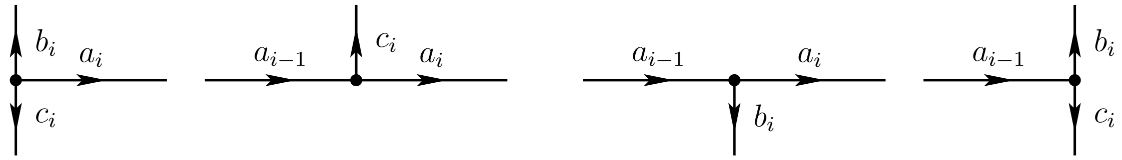
対応は次のようにする。C の辺を $a_1, a_2, ..., a_n$ とする。長さが n 以上の arc 成分が存在するが，その長さを e とする。長さ最長の arc がラベル a_1 辺から始まるようにラベル a_i の cyclic な付け替えを行う。長さ 1 の成分がラベル a_j 辺を含むとき $j \in N$ とする。

逆に (n, e, N) を考える。ただし $n - \sharp N = 1, 2$ のときは $e = n$ は除外する。(n, e, N) に対し，ラベルが $a_1, a_2, ..., a_n$ で上の対応で (n, e, N) になる local な DS–diagram が一意に存在する。

辺の分布について調べながら命題 1 を証明する。

条件 $(*)$ を満たす $f(G)$ の loop C を考える。辺を向きもこめて順に $a_1, a_2, ..., a_n$ とする。ラベル a_i 辺の始点のラベルは i，終点のラベルは $i + 1$ とする。ただし頂点，辺のラベルは $\mod n$ で考える。

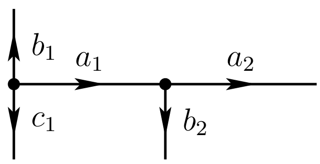
ラベル a_i 辺とラベル a_{i+1} 辺はラベル i 頂点に接続している。それ以外にラベル i 頂点に接続する辺のラベルを b_i, c_i とする。ただしラベル b_i, c_i 辺の始点のラベルは i とし，次図の様に決める。



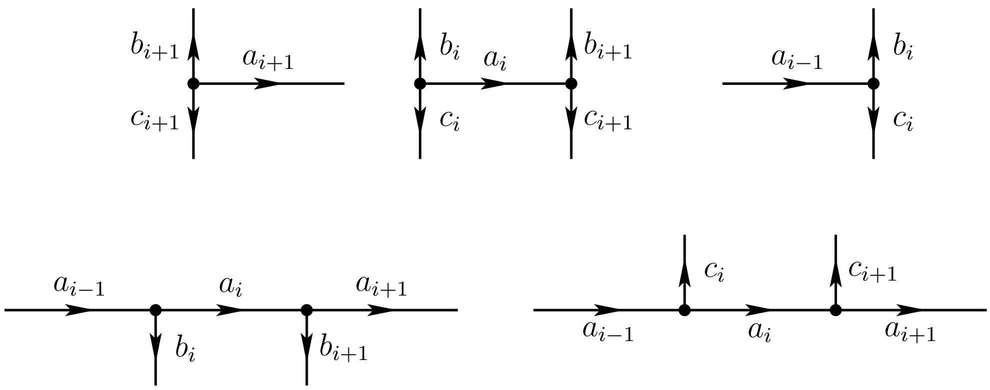
必要なら cyclic にラベルを付け替えて長さ n 以上の $f^{-1}(C)$ の成分がラベル 1 頂点から始まっているとしてよい。以下 S^2 上の図に描くときラベル a_i 辺は右向き水平に書く。

$f^{-1}(C)$ の成分の内部の頂点を始点とするラベル a_k 辺以外について，上向きならラベル c_k 辺，下向きならラベル b_k 辺である。$f^{-1}(C)$ の端の頂点を始点とする辺について，上向きならラベルは b_k，下向きならラベルは c_k である。

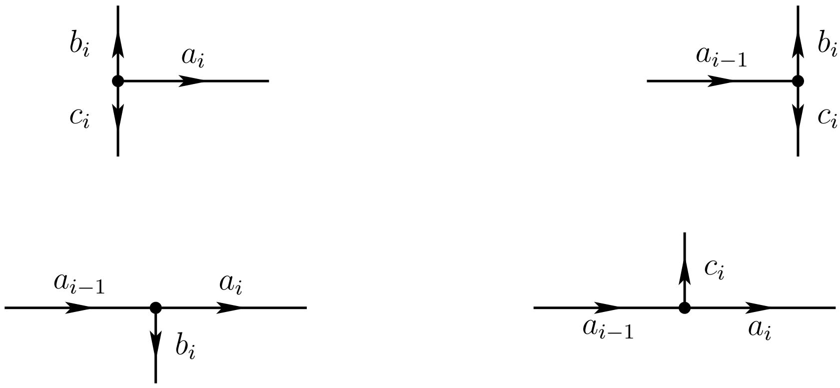
長さ n 以上の成分の始めの部分のラベル 2 頂点から出ている辺のラベルが c_2 のとき，即ち上向きになっているとき，S^2 の orientation を逆にして，ラベル b_k と c_k を入れ替えることにより，次図のようになっているとしてよい。



長さが 1 の $f^{-1}(C)$ の成分が存在するとき，S^2 上では次図の様になっている。



この長さ 1 の成分を消し，他のラベル a_i 辺はつぶし，この辺に隣接するラベル b_i 辺とラベル b_{i+1} 辺を重ね新たにラベル b_i 辺とし，もう一つのラベル a_i 辺に接続する c_i 辺，c_{i+1} 辺に関しても同様の操作を行う。更に $i+1$ 以上の k に対しラベル a_k, b_k, c_k をラベル $a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}$ に変更する。このとき n が 1 つ少なくなった新たな local DS–diagram が構成されている。この操作を 1-cut と呼ぶ。1-cut を行って得られる DS–diagram は次図のようになっている。

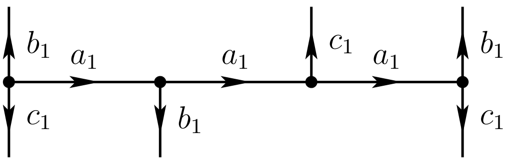


この操作は逆も可能である。逆操作を 1-add と呼ぶ。

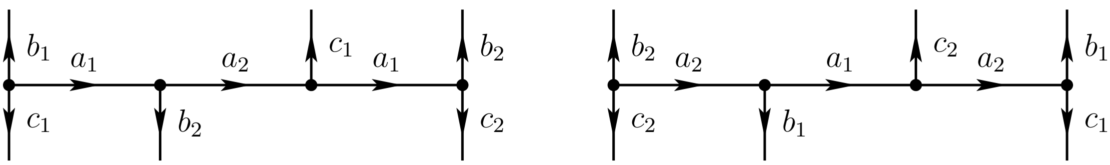
最長の長さの成分の長さを e とする。$f^{-1}(C)$ の長さ 1 の成分のラベルを $a_{n(1)}, \ldots, a_{n(k)}$ とするとき，$N = \{\, n(1), ..., n(k) \,\}$ とする。

長さ 1 の成分が存在するとき 1-cut 可能である。1-cut によって長さ n 以上の成分は長さ $n-1$ 以上になる。可能な限り 1-cut を行う。よって各分の長さが 2 以上の local な DS–diagram を考える。

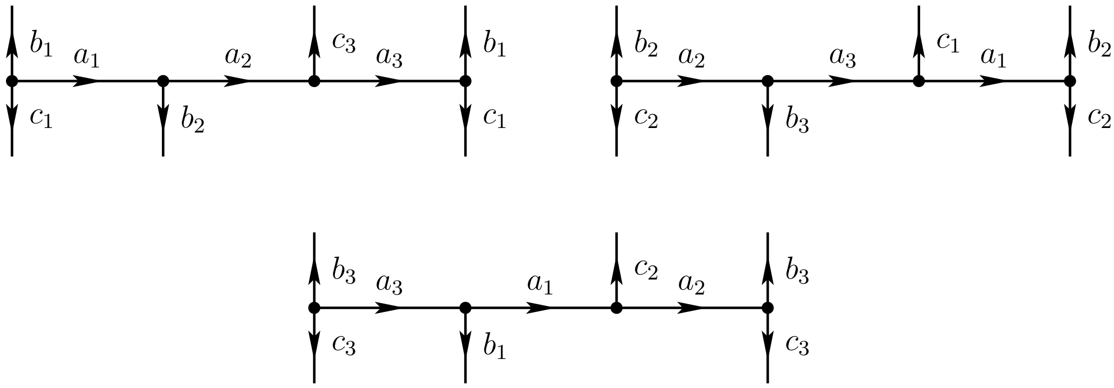
n が小さいときの状況を見る。$n = 1$ のとき local な DS–diagram は次図の様になっている。この local な DS–diagram を $B[1]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(1, 3, \emptyset)$ である。



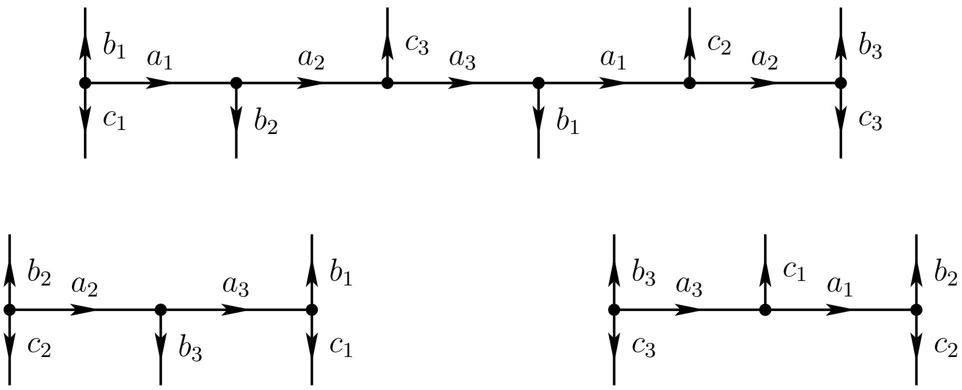
$n = 2$ のとき長さ 1 の成分を持たない local な DS–diagram は次図の様になっている。この local な DS–diagram を $B[2]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(2, 3, \emptyset)$ である。



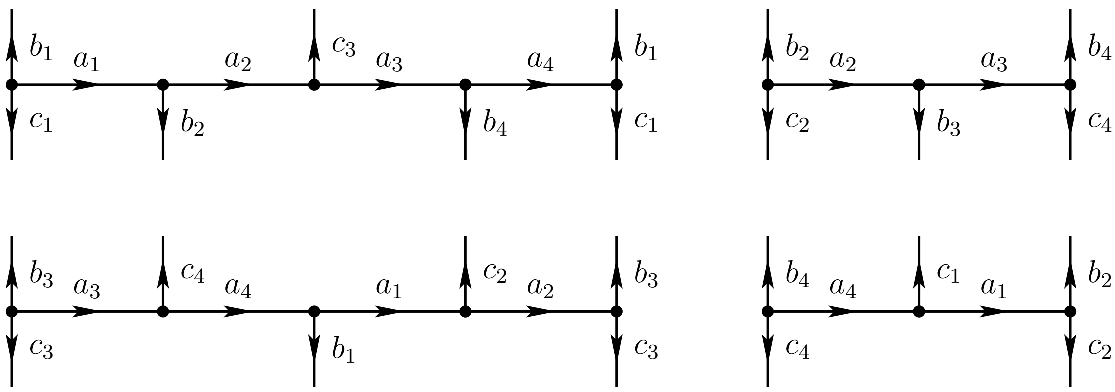
$n = 3$ から 2 つのタイプが出てくる。次図の local な DS–diagram を $A[3]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(3, 3, \emptyset)$ である。



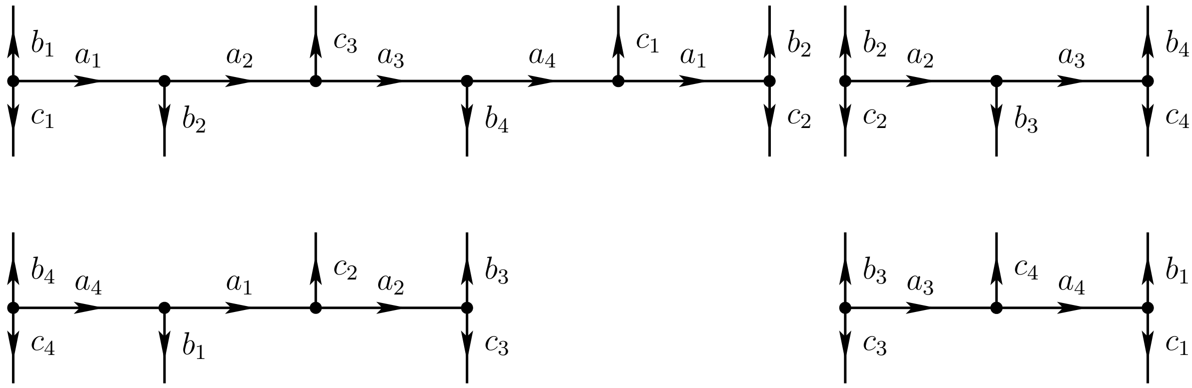
$n=3$ のもうひとつのタイプは次図の local な DS–diagram で $B[3]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(3,5,\emptyset)$ である。



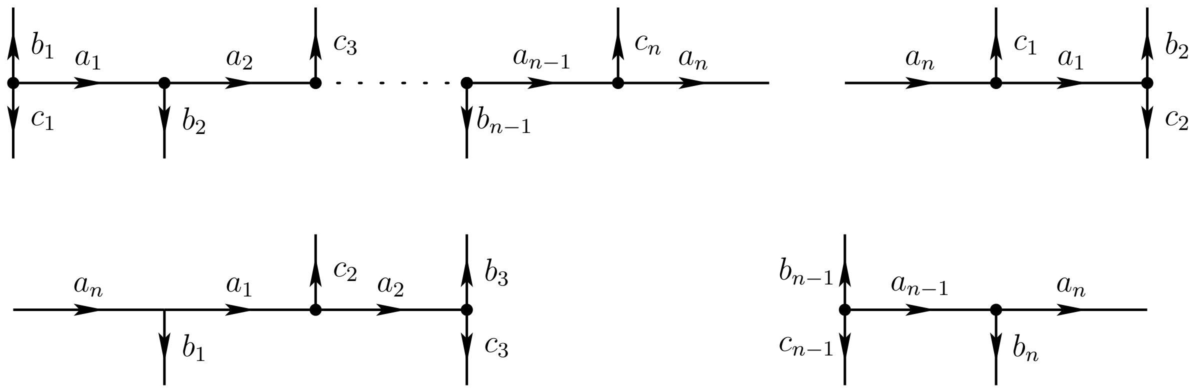
$n=4$ で次図の local な DS–diagram を $A[4]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(4,4,\emptyset)$ である。



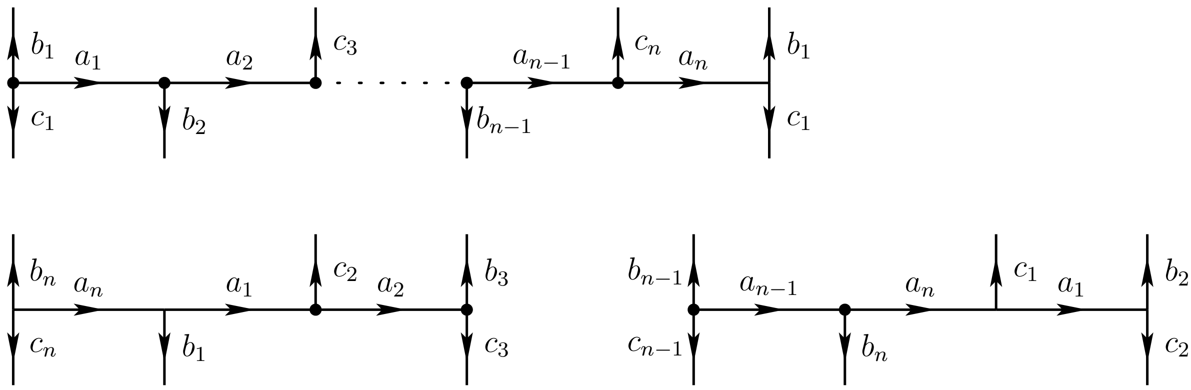
$n=4$ のもうひとつのタイプは次図の local な DS–diagram で $B[4]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(4,5,\emptyset)$ である。



一般に n が 3 以上のときを考える。最初に n が奇数のときを考える。n が奇数なのでラベル a_n 辺の周りは次図のようになっている。

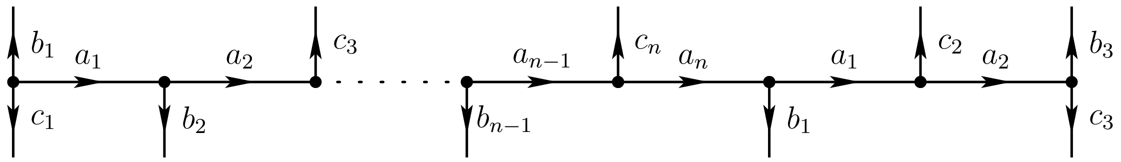


ラベル a_n 辺が 4 つ出てきているのでどれかは同じ辺である。長さ 1 の成分がないことに注意すれば次の 2 つの場合しか起こらない。

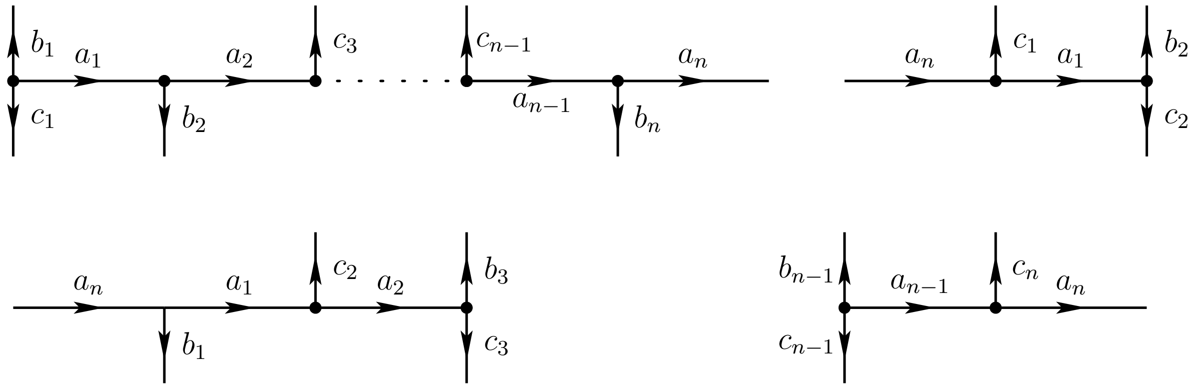


前図は長さ n の成分が 1 つ，長さ 3 の成分が 2 つ，他の成分はすべて長さ 2 である。このlocal な DS–diagram で $A[n]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(n, n, \emptyset)$ である。

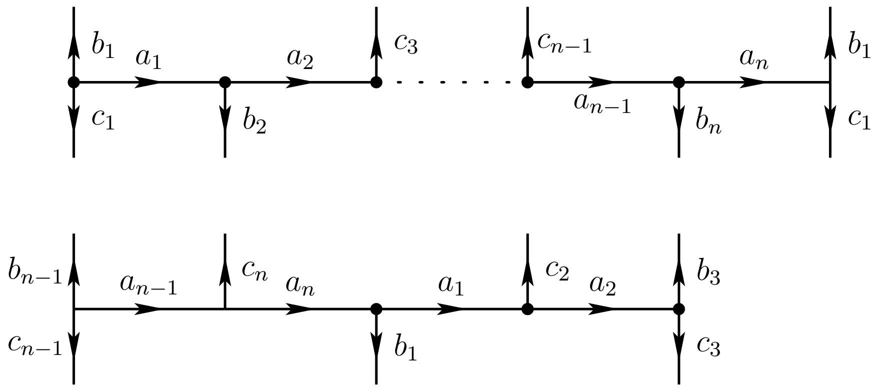
次図は長さ $n+2$ の成分が 1 つ，他の成分はすべて長さ 2 である。この local な DS–diagram で $B[n]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(n, n+2, \emptyset)$ である。



次に n が偶数のときを考える。n が偶数なのでラベル a_n 辺の周りは次図のようになっている。

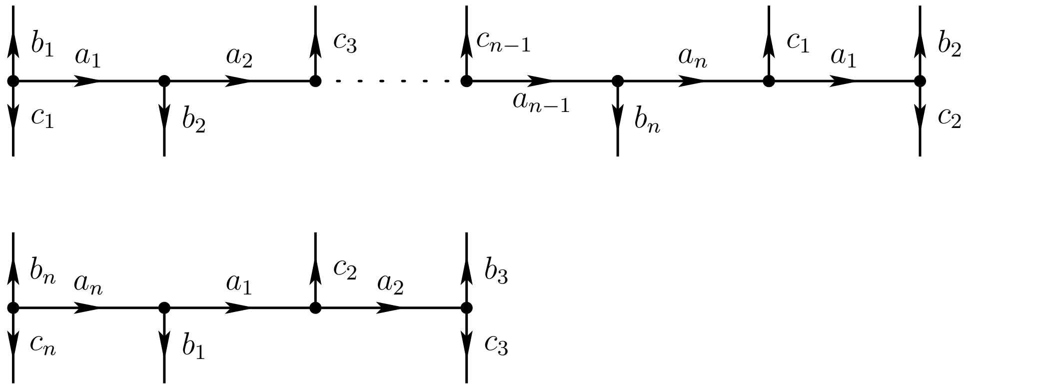


ラベル a_n 辺が 4 つ出てきているのでどれかは同じ辺である。長さ 1 の成分がないことに注意すれば次の 2 つの場合しか起こらない。



前図は長さ n の成分が 1 つ，長さ 4 の成分が 1 つ，他の成分はすべて長さ 2 である。この local な DS–diagram で $A[n]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(n, n, \emptyset)$ である。

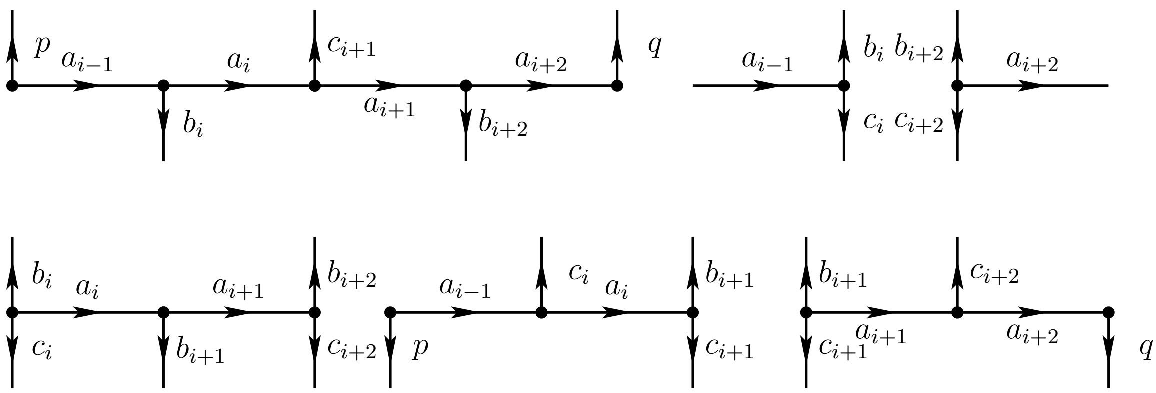
次図は長さ $n+1$ の成分が 1 つ，長さ 3 の成分が 1 つ，他の成分はすべて長さ 2 である。この local な DS–diagram で $B[n]$ と呼ぶ。命題 1 の記号で表すと $(n, n+1, \emptyset)$ である。



最長の長さの成分が2つあるのは，$B[2], A[3], A[4]$ であり，どの最長の成分の先頭をラベル1にしても同型である。

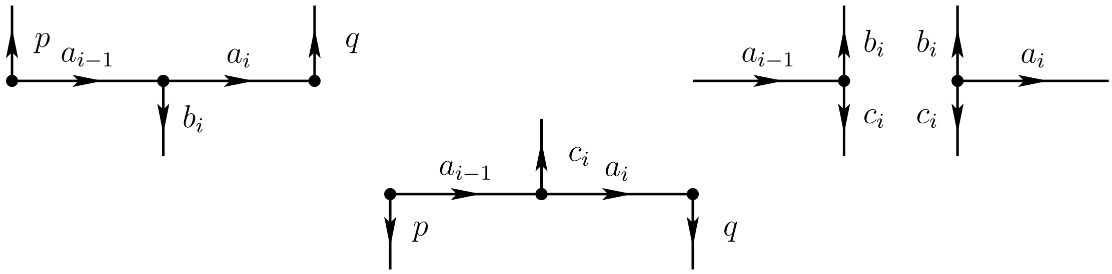
条件 $(*)$ を満たす loop C に対し定義される local な DS–diagram に対し (n, e, N) が決まるが，$1 \notin N$ である。また可能な限り 1-cut をした local DS–diagram は $A[n-k]$ または $B[n-k]$ に同型なので，$n-k$ の偶奇に従って e に条件がつく。

逆に (n, e, N) が与えられているとする。$n = e$ のときは $A[n-k]$ を $n \neq e$ のときは $B[n-k]$ を考える。小さい順に，N の各成分に対応して 1-add を実行すると，local DS–diagram が得られる。よって命題1が示された。



長さ2の $f^{-1}(C)$ の成分が存在するとき前図のようになっている。ただし p は b_{i-1} または c_{i-1}，q は b_{i+3} または c_{i+3} である。

このとき次図のように，長さ2の成分を消し，他のラベル a_i 辺，a_{i+1} 辺はつぶし，ラベル b_{i+1} 辺，ラベル c_{i+1} 辺を消去し，$k \geqq i+2$ に対し a_k, b_k, c_k を $a_{k-2}, b_{k-2}, c_{k-2}$ に変更し，新しい local DS–diagram を構成できる。この操作を 2-cut と呼ぶ。2-cut の逆操作を 2-add と呼ぶ。



条件 $(*)$ を満たす local DS–diagram は $B[1], B[2], A[3], A[4]$ から何回かの 2-add を行い，更に何回かの 1-add を行って得られる。

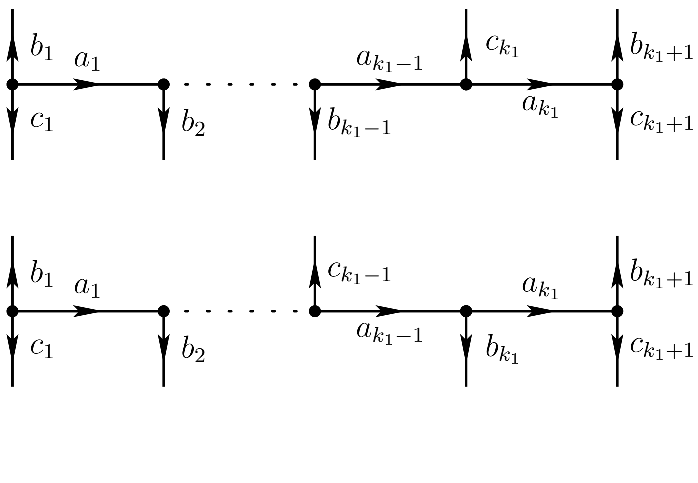
次に条件 $(*)$ をはずした場合を考える。すべての $f^{-1}(C)$ の成分の長さが 3 であるような local DS–diagram が一意に存在するので，これを $C[n]$ と呼ぶ。$C[1] = B[1]$, $C[2] = B[2]$，$C[3] = A[3]$ である。

このときすべての $f^{-1}(C)$ 成分が arc であるような local DS–diagram は $B[1]$, $B[2]$，$A[3]$，$A[4]$，$C[n]$ $(n \geqq 4)$ から何回かの 2-add を行い，更に何回かの 1-add を行って得られることが分かる。

条件 $(*)$ があるときは 1-add，2-add は最長の成分に関して行われるので，行われる番号を指定するだけで決まるが，条件 $(*)$ をはずした場合は 2-add をする場所も指定する必要がある。この様な定式化では分類は複雑になる。そこで別の対応を考える。

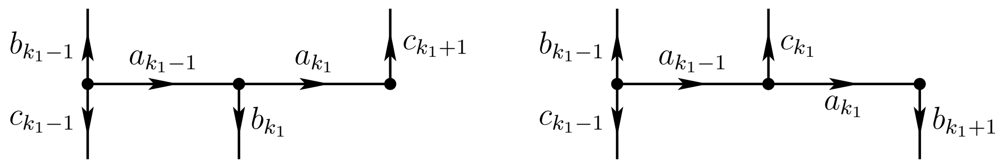
C が条件 $(*)$ を満たさないが，$f^{-1}(C)$ がすべて arc の場合を考える。長さ 1 の arc がある場合は 1-cut を行い，長さ 1 の arc はないものとする。$f^{-1}(C)$ は $3n$ 個の辺からなるので，長さ 3 以上の arc が存在する。

1 から始まる成分が長さ 3 以上だとする。その長さを k_1 とする。この成分ではラベル 2 頂点にはラベル b_2 辺が接続しているとしても一般性を失わない。k_1 が奇数のとき次図上，偶数の時次図下である。



ラベル k_1 頂点と接続する辺のラベルが c_{k_1} のときこの成分をタイプ A と呼ぶ。タイプ A のとき $k_1 \equiv (-1)^1 \pmod 2$ となる。

このときラベル a_{k_1-1} 辺から始まる成分を考える。k_1 の偶奇により下図のいずれかになる。ラベル c_i 辺が上向きなのは arc の内部から出ているときであり，ラベル b_i 辺が下向きなのは arc の内部から出ているときである。よっていずれの場合もラベル a_{k_1-1} 辺から始まる成分の長さは 3 以上である。



$k_1 - 1$ から始まる成分の長さを k_2 とする。この成分の最後の辺は $a_{k_1+k_2-1}$ (ただし　mod　n で考える) であるが，ラベル $k_1 + k_2 - 1$ 頂点から出ている辺のラベルが $c_{k_1+k_2-1}$ のときこの成分をタイプ A という。この成分がタイプ A のとき $k_1 + k_2 \equiv (-1)^2$ となっている。

以下この操作を続け，最初の a_1 から始まる成分が出てきたら操作を中止する。以上のように $k_i \geqq 3$ である整数列 $(k_1, \ldots, k_p)$ が定まる。

最後の成分は最初の成分と貼り合う必要があるのでタイプ A である必要がある。よって $\sum_1^p k_i \equiv (-1)^p \pmod 2$ を満たす。各成分は前後に 2 個の重複があるので

$$\sum_1^p k_i - 2p = \sum_1^p (k_i - 2) = n$$

を満たす。

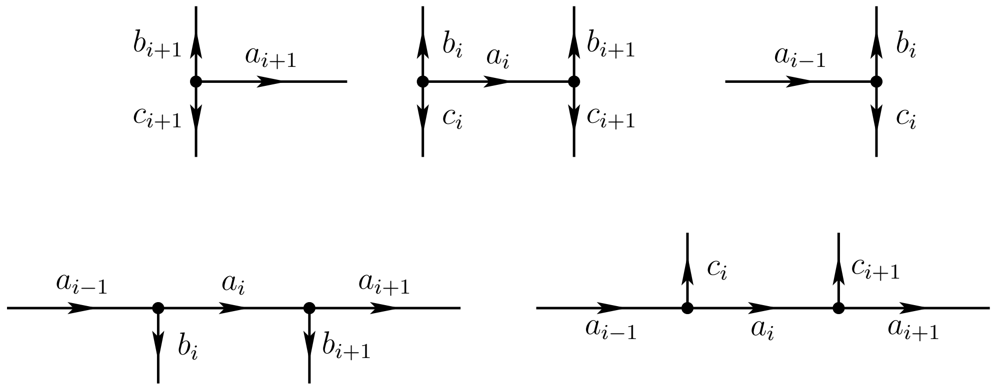
逆に条件を満たす整数列 $(k_1, ..., k_p)$ が与えられたら，local DS–diagram を構成できる。$(k_1, ..., k_p)$ を cyclic に動かしてできる整数列からできる local DS–diagram はもとのものと同型である。

以上まとめると次が得られた。

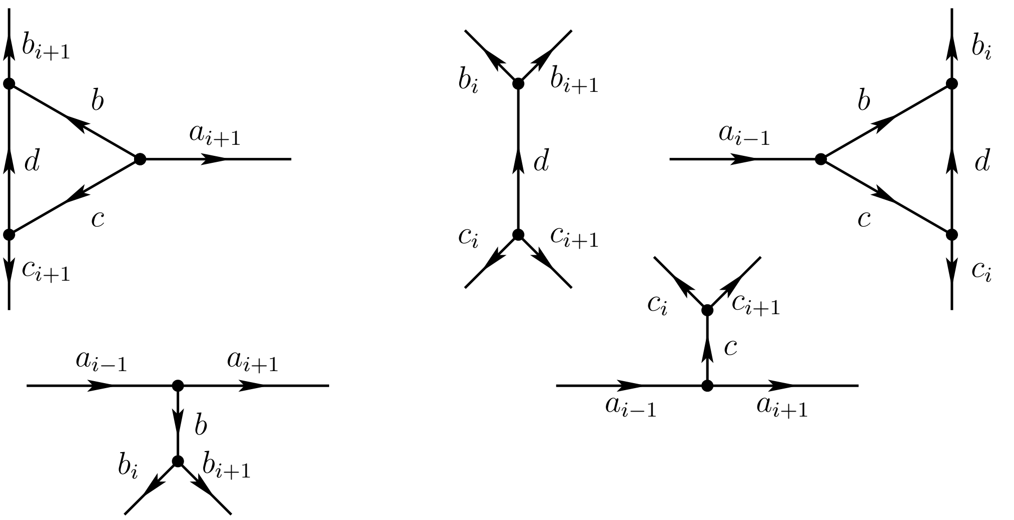
命題 2 最長の長さが n 以上という条件を外した場合，長さ 1 の成分を持たない local DS–diagram に対し整数列 $(k_1, ..., k_p)$ が対応する。ただし $k_i \geqq 3$ で，$\sum_1^p k_i = n + 2p \equiv (-1)^p \pmod 2$ を満たす。
逆に $k_i \geqq 3$ で，$\sum_1^p k_i = n + 2p \equiv (-1)^p$ を満たす整数列 $(k_1, ..., k_p)$ に対し local DS–diagram が存在する。

3　surgery

辺の分布について述べてきたが，辺の分布に対し surgery を組織的に見つける方法はほとんど分かっていない。ここでは 1-cut に対応する move を考える。



Σ を長さ 1 の成分をもつ local な DS–diagram とする。この DS–diagram を次のように変形することを考える。この DS–diagram を Σ' とすると $\partial\Sigma = \partial\Sigma'$ を満たしており，Σ' 内部に Σ を 1-cut した DS–diagram を含んでいる。このことから次の命題が従う。



命題 3 local な DS–diagram Σ を 1-cut した DS–diagram を Σ' とする。Σ' に対し頂点を 2 点以上下げる surgery が存在するならば，Σ に対して頂点を下げる surgery が存在する。

参考文献

[1] Kouno, M, DS–diagram の suegery, 箱根セミナー 2011 記録