

DS-knot 予想について

河野正晴 (北見工業大学)

ここでは次の予想を考える。

DS-knot 予想

C -既約な DS-diagram の DS-knot は homotopic zero ではない。

DS-knot 予想からはいくつかの結果が従う。たとえば、(1) Poincare 予想、(2) S^3 の C -既約な DS-diagram の非存在—これは S^3 判定のアルゴリズムを与える、などが得られる。しかし、現在の所この予想に対しどのようにアタックするのかという方法すら分かっていない。

予想の結論を「trivial knot でない」に弱めた予想を「弱い version の予想」と呼ぶことにする。我々は少し強い仮定のもとでこの弱い version の予想の証明を試みる。

geniralized DS-diagram の定義は [1], [7] を、 G -move, S -move, GS -deformation, C -変形, B -変形, C -既約等の用語のきちんとした定義については [2], [6] を参照して下さい。ここでは必要な範囲でアバウトな説明をしておく。 $\Sigma = (S, G, f)$ を geniralized DS-diagram とする。ここで $S = S_1^2 \cup \dots \cup S_s^2$ は s 個の 2-sphere からなる。 $B = B_1^3 \cup \dots \cup B_s^3$ を $\partial B = S$ となる s 個の 3-ball とする。 $f : S \rightarrow P$ を $f : B \rightarrow M(\Sigma)$ まで拡張しておく。 τ を geniralized DS-diagram から定まる $S - G$ 上の involution とする。 S 上に loop ℓ を考える。 $\ell \cap G$ が k 個の点からなるとき、 ℓ を k -bridge と呼ぶ。 $f(\tau(\ell - G) \cap \ell) \cup f(\ell \cap G)$ の個数が p のとき、この bridge ℓ を p -point であるという。この loop ℓ を境界にもつ B の proper な 2-disk D が存在する。この D で B をカットすることにより新しい geniralized DS-diagram Σ' が得られる。この変形を S -move と呼ぶ。この変形でスパインの頂点数は p 個増える。

Σ の面 \overline{X} が 2-disk と同相で、 $X \subset S_i^2, \tau(X) \subset S_j^2$ ($i \neq j$) を満たしているとする。 S を X と $\tau(X)$ で貼り合わせると geniralized DS-diagram Σ'' ができる。この操作を G -move という。 X を k -gon とする。 X の頂点全体の集合を $V(X)$ とする。 $f(V(X))$ の個数を p とするとき、この k -gon X は p -point である。この変形でスパインの頂点数は p 個減る。

$\Sigma = (S^2, G, f)$ を DS-diagram とする。 S^2 上の p_1 -point の k -bridge ℓ で S -move を行って geniralized DS-diagram Σ' が得られたとする。 Σ' の面である p_2 -point k' -gon X で G -move を行って DS-diagram Σ'' が得られたとする。 $p_1 - p_2 < 0$ のとき、この連続する 2 つの変形を行った変形を C -変形と呼ぶ。 $p_1 - p_2 = 0$ のとき、この連続する 2 つの変形を行った変形を B -変形と呼ぶ。面 X は Σ の面になっている場合もあるし、 Σ の面 Y を $\ell \cup \tau(\ell - G)$ でカットした成分の場合もある。 X が D のコピーの場合を除くと X は Σ の面または面の一部である。 X が D のコピーの場合は何もしない変形になる。 ℓ は S^2 を 2 つの成分に分けるが、 X が一方の成分に含まれ、 $\tau(X)$ が他方の成分に含まれている。この条件を満たす Σ の面または面の一部を ℓ によって分離される

という。DS-diagram 上の p_1 -bridge ℓ と ℓ によって分離される面または面の一部 X で, p_2 -point なものが存在して $p_1 < p_2$ を満たすとき, C -変形が可能である。このとき Σ は C -既約ではない。 Σ と Σ' が B -変形で移りあうとき B -同値であるという。

定義 1 $\Sigma = (S^3, G, f)$ を DS-diagram とし, $\partial B^3 = S^2$ とする。 X を Σ の面とする。 ℓ を B^3 の trivial な proper arc で, $X \cap \ell = 1\text{-point}$, $\partial \ell = p \cup q$ とするとき $f(p) = f(q)$ となるものとする。このとき $f(\ell)$ は $M = M(\Sigma)$ の knot になるが, この knot を (X に対応する, または $f(X)$ に対応する) Σ の **DS-knot** という。

定義 2 Σ を geniralized DS-diagram とする。 Σ と B -同値な任意の geniralized DS-diagram Σ' が C -既約のとき, Σ を 強 C -既約と呼ぶ。

以下我々は $\Sigma = (S^3, G, f)$ が強 C -既約であることを仮定する。この仮定の下で弱い version の予想に反例が存在したとし, (Σ, k, D) をその反例とする。ただし, k は $M = M(\Sigma)$ 内の trivial な DS-knot で, D は $\partial D = k$ となる 2-disk とする。

向き付け不可能な多様体 M に反例 (Σ, k, D) が存在したとする。 $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ を M の orientable double cover とする。 $\pi^{-1}(k) = k_1 \cup k_2$, $\pi^{-1}(D) = D_1 \cup D_2$ とする。ただし $\partial D_i = k_i$ ($i = 1, 2$) とする。 M の DS-diagram Σ から \widetilde{M} の geniralized DS-diagram $\widetilde{\Sigma}$ を自然に構成することができる。 X を $\widetilde{\Sigma}$ の面で $f(X) \cap k_1 = 1\text{-point}$ となる面とする。この面を消さないように $\widetilde{\Sigma}$ を DS-diagram に変形することができる。この DS-diagram を Σ' とすると, (Σ', k_1, D_1) は反例であり, $M(\Sigma')$ は orientable である。よって orientable の場合に証明すれば十分である。以下多様体は orientable を仮定する。

以下 $D \cap f(V(G)) = \emptyset$ で D は $f(G)$ と transversal に交わっているとする。 (Σ, k, D) の複雑度 $c(\Sigma, k, D)$ を $(\#f(V(G)), \#(D \cap f(G)), \#f(G))$ で定義する。ただし $\#f(V(G))$ はグラフ $f(G)$ の頂点数, $\#(D \cap f(G))$ は D と $f(G)$ の交点数, $\#f(G)$ はグラフ $f(G)$ の成分数で, 順序は辞書式順序とする。強 C -既約という仮定の下で弱い version の予想が正しくないとする。反例が存在するが, (Σ, k, D) を複雑度最小の反例とする。

$\Sigma = (S^2.G.f)$ を DS-diagram とする。 $\partial B^3 = S^2$ となる 3-ball B^3 をとり, 写像 f を $f : B^3 \rightarrow M(\Sigma)$ まで拡張しておく。一般に閉曲面 F が多様体 $M = M(\Sigma)$ 内にあるとき, isotopy で少し動かすことにより, $f(V(G))$ とは交わらず, $f^{-1}(F) \cap S^2$ は球面上の有限個の loop であるとしてよい。これらの loop はグラフ G の辺によりいくつかの arc に分割されるが (分割されないときもある), この arc が 1 つの頂点に隣接するグラフの 2 つ辺の間を結んでいるとき **corner connection** と呼ぶ。この arc が同じ G の辺の間を結んでいるとき **edge connection** という。edge connection が存在するとき, 曲面を isotopy で変形して, intersection を図 1 の様にできる。このとき $f^{-1}(F) \cap S^2$ と G の intersection は小さくなる。ただし, 図では τ を DS-diagram から定まる involution とするとき, 面 X に対し $X' = \tau(X)$ としている。

corner connection が存在するとき, 曲面を頂点のまわりで isotopy により変化させると, corner connection は図 2 の様に変化する。ただし図の頂点はすべて $f(S^2)$ では同じ頂点である。この変形で G との交点数は変わらないが, corner connection の位置が変化する。corner connection が 2 つ連続しているときはこの変形を行うと edge connection が発生する。よって corner connection が 2 つ連続していると G との交点数を下げる変形が可能である。

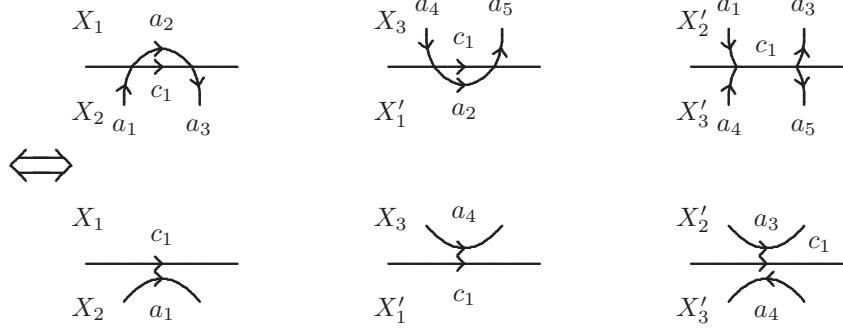


図 1

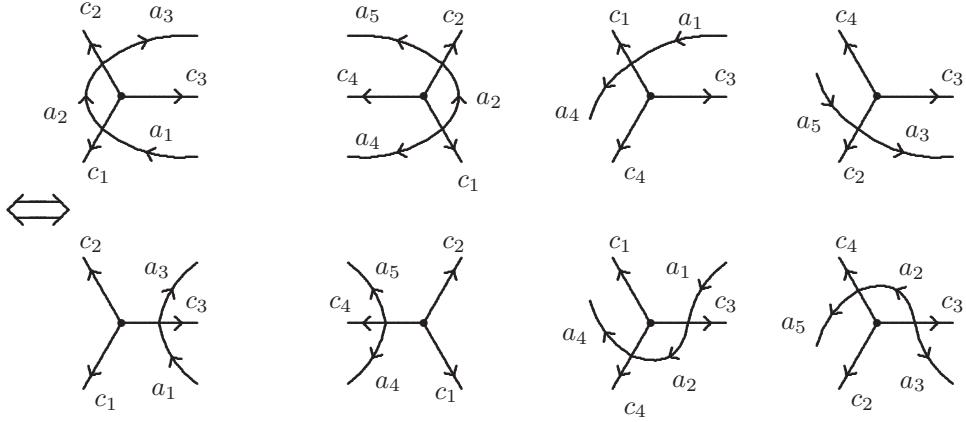


図 2

(Σ, k, D) に対し $T = (D \cap f(S^2)) \cup \partial D$ とおくと, T は 3-regular graph である。 $D - T$ の component で ∂D と「交わる」ものを U_0 とし, U を U_0 以外の component とする。 $\overline{f^{-1}(U_0)} \cap S^2$ および $\overline{f^{-1}(U)} \cap S^2$ は arc および loop になっている。これらを $\partial_\Sigma U_0$ および $\partial_\Sigma U$ と書くことにする。

$\partial_\Sigma U$ は S^2 を 2 つに分離する。その component を E_1, E_2 とする。 E_i の面で $\partial_\Sigma U$ と交わらないすべての面を X_1, X_2, \dots, X_{m_i} とする。 $m = \min \{ m_1, m_2 \}$ とするとき, U は m 面であるという。 U が 0 面のとき, U は zero であるという。 U が 1 面のとき, U は mono であるという。以下では E_1, E_2 の一方を「内側」他方を「外側」と呼ぶことが多い。

D は閉曲面ではないが, 閉曲面の場合と同様に edge connection や corner connection の変形を行うことができる。ただし, arc component $\partial_\Sigma U_0$ の端点部分を変形すると, k が DS-knot でなくなる可能性があるので, その変形は一般には行わない。そのため arc の端点が存在して, edge connection や corner connection が存在するのに変形できない場合も生じる。

Σ が C -変形で頂点数を下げられるとき, Σ は **reducible** であるという。 B -変形または isotopy の変形で DS-diagram の頂点数はそのままで, $\sharp(D \cap f(G))$ を減らせるとき D は **reducible** で

あるという。ただし一般の B -変形の場合 S -変形のための loop が $\text{arc } \partial_\Sigma U_0$ と交わると, knot k が変形後の DS-diagram の DS-knot でなくなることがある。 D の reducible 性を導く B -変形は DS-knot を保つという条件を満たしている必要がある。 $\partial_\Sigma U$ に parallel な loop で B -変形をする場合はこの条件を満たしている。単に reducible と言ったらどちらかを意味する。最小反例の (Σ, k, D) に対してはどちらの意味でも reducible ではない。

$\partial_\Sigma U - G$ の component e を $\partial_\Sigma U$ の辺という。 $\partial_\Sigma U_0$ に対しても同様に辺を定義する。辺 e が $f(e) = a$ を満たすとき, e のラベルは a という。ただし a は向きも考えにいれた T の辺である。 $\partial_\Sigma U$ および $\partial_\Sigma U_0$ の辺の中で同じラベルを持つものは 2 つ存在する。

現在のところ以下のことが分かっている。

(1) T は hoop を含まない。

hoop ℓ を含んだとする。 ℓ は D を 2 つに分けるが, open 2-disk である component を d とする。 $\partial f^{-1}(d)$ は DS-diagram 上で 1 つの面 X に含まれる。 d が T と交わらなければ, isotopy で ℓ を消すことができる。 $\partial f^{-1}(d)$ は S^2 上で disk d' を張るが, $d' \cap f^{-1}(T) = \emptyset$ ならば d を張り替えることにより hoop ℓ を消すことができる。 $f(d')$ と交わる T が存在するときは, innermost なものを考える。これはやはり hoop であり消すことができる。よって hoop はない。

(2) U は 2-disk である。

2-disk でない U が存在したとする。 $\partial_\Sigma U = \ell_1 \cup \dots \cup \ell_k$ とする。loop $\ell = \ell_i$ と S^2 上の 2-disk d で $d \cap (\ell_1 \cup \dots \cup \ell_k) = \ell$ となるものが存在する。 d を少し内側に押し込んだ disk を d' とする。 $d' \cap f^{-1}(U) = \partial d'$ が ℓ と parallel になっているとする。 $\overset{\circ}{d'} \cap f^{-1}(D) = \emptyset$ のときは disk の張替えにより共通部分を減らすことができる。よって $\overset{\circ}{d'} \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$ のときを考える。 $\overset{\circ}{d'} \cap f^{-1}(D)$ は d' 内の何個かの loop であるので innermost なものを考える。 U でない $D - T$ の component U' が 2-disk と同相なときは, $f^{-1}(\overline{U})$ は境界 S^2 の近くにあるとしてよく, d' と交わらないとしてよい。 U_0 の場合も同様である。よって $\overset{\circ}{d} \cap f^{-1}(U') \neq \emptyset$ となるものが存在するとき U' は 2-disk と同相でなく, U_0 でもない。このとき U' について同様の議論すればよい。以上により 2-disk でない component はないとしてよい。

(3) \overline{U} は 2-disk である。

\overline{U} が 2-disk でないとする。このとき D 上に loop k' が存在して $k' \cap T = 1\text{-point}$ となっている。 k' は D を 2 つに分けるが, 2-disk と同相の方を D' とする。 k' は DS-knot で $\partial D' = k'$ となっているが, $c(\Sigma, k', D') < c(\Sigma, k, D)$ となるので矛盾。

(4) $\partial_\Sigma U$ の辺のラベルを a_1, a_2, \dots, a_k とすると, $a_i \neq a_j^\pm$ ($i \neq j$) である。 $\partial_\Sigma U_0$ についても, 端点を含む 2 つの辺を除いて同様に成立する。(端点を含む 2 つの辺のラベルは等しい。)

$a_i = a_j^\pm$ ($i \neq j$) のとき \overline{U} は 2-disk ではないので, (4) が成立する。 $\partial_\Sigma U_0$ の端の辺でない 2 つの辺が同じラベルを持ったとする。このとき D 上に k とは別の DS-knot k' が存在する。 D 内で k' で囲まれる部分を D' とすると, k' は trivial であり, $c(\Sigma, k', D') < c(\Sigma, k, D)$ となり最小性に反する。

(5) U は 1-gon ではない。

1-gon があれば $\overline{U'}$ が 2-disk にならない様な $D - T$ の U_0 以外の component U' が存在する。

(6) U は zero でない。

U が zero だとする。 $S^3 - \partial_\Sigma U$ の component を E_1, E_2 とする。このとき E_1 の方が 1 つも面を含まないとする。 E_1 が他の loop component $\partial_\Sigma U'$ を含んでいるとき、 U' も zero である。innermost なものを考えることにより、 E_1 は他の loop component $\partial_\Sigma U'$ を含まないとしてよい。

最初に E_1 が $\partial_\Sigma U_0$ を含まない場合を考える。このとき次の性質をもつ edge connection または corner connection が存在することを示す：edge connection の場合は edge connection と 1 つの辺（の一部）で囲まれる領域が E_1 に含まれている。corner connection の場合は corner connection と 2 つの辺（の一部）と頂点で囲まれる領域が E_1 に含まれる。

前述のことが成立しないとする。3-regular graph $(E_1 \cap G) \cup \partial E_1$ を考える。 E_1 にすっぽり含まれる G の辺を内部の辺、 ∂E_1 に含まれる辺を境界の辺、それ以外の辺を接続辺と呼ぶ。edge connection で上の性質を持たないものが存在するとき、 G の 1 つの辺が 2 つ以上の接続辺に分かれことがある。しかし、上の性質をもつ edge connection がないので、接続辺は必ず境界の点と内部の点を接続している。内部の辺は少なくとも 1 つ存在するのでそれを e_1 とする。その頂点を 0 と 1 とする。 e_1 が面 Y_1 と面 Z_1 の共通部分になっているとする。 e_1 の内点を p とする。面 Y_1 は E_1 の境界と交わるので p と ∂E_1 の点を結ぶ $Y_1 \cap E_1$ 内の arc α_1 が存在する。同様に p と ∂E_1 の点を結ぶ $Z_1 \cap E_1$ 内の arc β_1 が存在する。 $f_1 = \alpha_1 \cup \beta_1$ とする。 $E_1 - f_1$ は 2 つの成分に分かれるが、頂点 1 を含む成分を R_1 とする。頂点 1 に接続する他の 2 つの辺が共に接続辺のとき、 $R_1 - \overline{Y_1 \cup Z_1}$ 内に頂点がなければ上の性質をもつ corner connection が存在する。よって頂点が存在するが、これに接続する辺がすべて接続辺なら上の性質を持つ corner connection が存在する。故に内部の辺が存在する。この辺を対象に同様の議論をすればよいので、頂点 1 に接続する辺の中で少なくとも 1 つ内部の辺が存在するとしてよい。この辺を e_2 とし、 e_2 のもう 1 つの頂点を 2 とする。 e_2 に対し上と同様に f_2 を選ぶ。 $R_1 - f_2$ は 2 つの成分に分かれるが、頂点 2 を含む成分を R_2 とする。以下同様の議論を進めることができる。この議論は無限には続かないで、上の性質を持つ corner connection が存在する。

$\partial_\Sigma U - G$ の component を e_1, e_2, \dots, e_k とすると zero であることから、この中に上の性質をもつ edge connection または corner connection が存在する。edge connection が存在すると、変形で intersection を減らせるので、最小性に反する。よって corner connection が存在するとしてよい。(4) より e_i のラベルの中に同じものはないので、変形を実行すると、edge が 1 つ少なくなって $\partial_\Sigma U - G$ が e_1, \dots, e_{k-1} となる。この操作を続けて実行すると、いつか連続する corner connection が生じて、edge connection が発生するので reducible である。

次に E_1 が $\partial_\Sigma U_0$ を含む場合を考える。 $\partial_\Sigma U_0$ の端点を p, q とする。edge connection や corner connection が端点 p, q などで邪魔をされ変形できない場合がある。そうでない場合は前と同様に変形可能である。邪魔をされる場合を考える。 p を含む Σ の面を X_1 とすると、 $q \in X'_1$ が成立している。 $W_1 = X_1 \cap E_1, W_2 = X'_1 \cap E_1$ とおくと、 $\tau(W_1) \subset W_2$ または $\tau(W_2) \subset W_1$ のいずれかが成立する。ただし τ は Σ から定まる involution である。 $\tau(W_1) \subset W_2$ としても一般性を失わない。 W_1 および W_2 は境界の一部に edge connection または corner connection を含む。 W_1 の edge connection または corner connection のラベルを a_1 とすると、 W_2 はラベル a_1 辺を含んでいるが、この辺は $\partial_\Sigma U$ の一部ではないので、 $\partial_\Sigma U_0$ の一部である。 W_1 がラベル a_1 辺と p を端点とする arc 以外の辺を含むと、その辺のラベルと同じラベルを持つ辺が W_2 に存在する。これは(4)に矛盾する。よって W_1 には他の辺は持たない。 $\partial_\Sigma U_0$ 上の点で q から見て最初に ∂W_2 と交わる点を r_1 とする。 W_2 上のラベル a_1 辺の境界の点のうち、 r_1 の乗っている G の辺と同じ辺に乗っている点を r_2 とし、つなぐ辺の r_1 から r_2 の部分を β とする。また $\partial_\Sigma U_0$ の r_1 と r_2 を α とする。

$\alpha \cup \beta$ は 2-disk を張る。これに前と同様の議論を適用すると、 α の一部としてラベル a_1 辺以外の edge connection か corner connection が存在する。edge connection が存在すれば reducible なので、corner connection が存在する。この corner connection を変形していけば edge connection が発生するのでやはり reducible である。

(7) U は 2-gon ではない。

もし存在すると (6) より $\partial_\Sigma U$ は 2-bridge であり、しかも 2-point 2-bridge なので Σ は reducible である。

(8) U は 3-gon でない

もし存在すると $\partial_\Sigma U$ は 3-bridge であり、しかも 3-point 3-bridge なので Σ は reducible である。

(9) U は 4-gon でない

4-gon U が存在したとして矛盾を導く。 $\partial_\Sigma U$ の辺のラベルを a_1, a_2, a_3, a_4 とする。ラベル a_i 辺の属している面を X_i とする ($i = 1, \dots, 4$)。 $\partial_\Sigma U$ と交わる G の辺のラベルを c_1, c_2, c_3, c_4 とする。ただしラベル c_i 辺は X_i と X_{i-1} の共通辺 ($\text{mod } 4$) とする。 $\partial_\Sigma U$ は S^2 を 2 つに分ける「内側」の component を E_1 、「外側」の component を E_2 とする。 c_i のラベルの向きは E_1 から E_2 に向う向き同調する様に選んでおく。ただし、 $c_2 = c_1^{-1}$ 等のことは起こっても構わない。

ラベル c_i 辺の端点とラベル c_{i+1} 辺の端点が同じ点の場合を考える。 $\partial_\Sigma U_0$ の端点が邪魔をしなければ corner connection の変形で消せるが、一般には邪魔をする場合もある。端点が同じ点のときは G と 3 点で交わる loop が存在する。この loop が 3-bridge でないとき $\partial_\Sigma U$ は zero になるので 3-bridge である。 D は reducible ではないので退化辺が存在するが、この 3-bridge は図 3 のタイプ以外は 3-point であることが分かる。図 3 のときは $\partial_\Sigma U$ の少し外側に loop ℓ をとる。このとき図 3 の W に対応する面は ℓ によって分離される 5-gon であり 4-point である。よって ℓ に沿って S -move を行い、 W に対応する面に沿って G -move を行った変形は DS-diagram の頂点数を変えないので B -move である。しかしこの変形でラベル a_2 辺はなくなるので、 $D \cap f(G)$ の数は少なくなる。これは複雑度最小に矛盾する。以下図では $\partial_\Sigma U$ は灰色で表す。

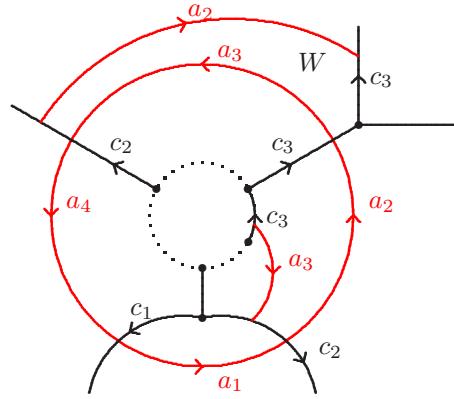


図 3

よってラベル c_i 辺の端点は異なっているとする。最初に面 X_1 に対し $\tau(X_1) \neq X_i$ ($i \neq 1$) の場合を考える。面 X_1 は $\partial_\Sigma U$ のラベル a_1 辺で 2つ分けられる。これを W_1, W_2 とすると、どちらかは $\partial_\Sigma U$ によって分離されるので、 W_1 が $\partial_\Sigma U$ によって分離されると仮定する。

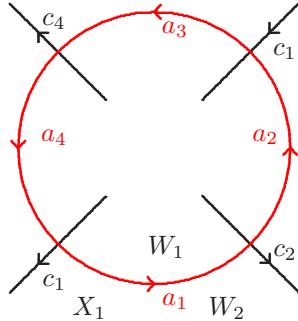


図 4

c_1 および c_2 の始点のラベルが異なるとき、 W_1 は 4-point 以上になる。このとき $\partial_\Sigma U$ と平行な少し外側の loop を ℓ とする。 ℓ で S -move に引き続き W_1 に対応する面で G -move を行った操作は W_1 が 5-point 以上なら C -move、4-point なら B -move になる。この変形で $c(\Sigma, k, D)$ の複雑度が下がるので c_1 の始点と c_2 の始点のラベルは同じである。このとき X_1 は退化辺をもつので、 W_1 が $\partial_\Sigma U$ によって分離されないか、 $\tau(X_1) = X_i$ となる。 i が存在する。これは仮定に矛盾するので、この場合は示された。

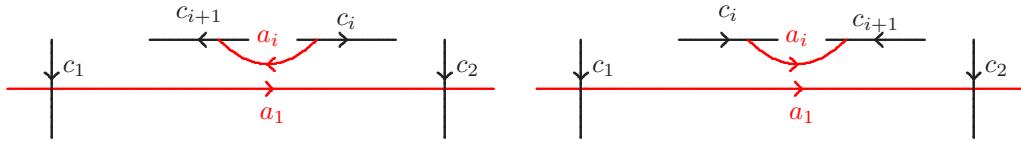


図 5

$\tau(X_1) = X_i$ となる面 X_i が存在するときは対称性により、面 X_1 は図 5 の様になっているとしてよい。このときも、 C -move または B -move になる 4-point 以上の分離する面が存在するので同様に示すことができる。

(10) U が 5-gon なら mono である。

mono でない 5-gon U が存在したとして矛盾を導く。 $\partial_\Sigma U$ の辺のラベルを a_1, \dots, a_5 とする。ラベル a_i 辺の属している面を X_i とする ($i = 1, \dots, 5$)。 $\partial_\Sigma U$ と交わる G の辺のラベルを c_1, \dots, c_5 とする。ただし c_i は X_i と X_{i-1} の共通辺 ($\text{mod } 5$) のラベルとする。 $\partial_\Sigma U$ は S^2 を 2つに分ける「内側」の component を E_1 、「外側」の component を E_2 とする。 c_i のラベルの向きは E_1 から E_2 に向う向き同調する様に選んでおく。

ラベル c_1 辺の始点とラベル c_2 辺の始点が同じ点の場合を考える。 $\partial_\Sigma U_0$ の端点が邪魔をしなければ corner connection の変形で消せるが、一般には邪魔をする場合もある。

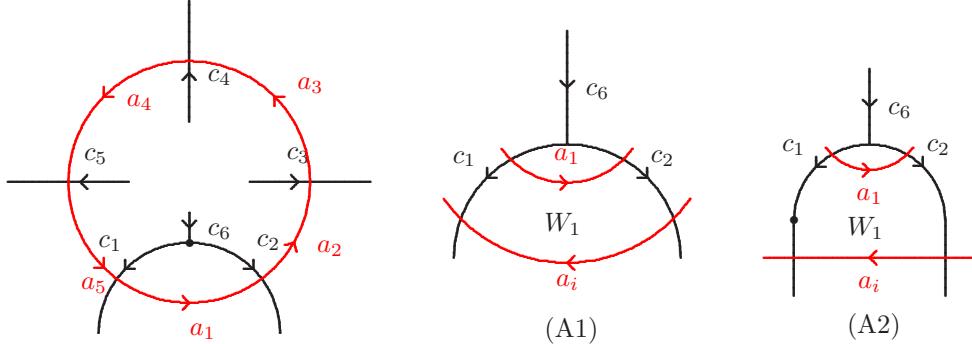


図 6

このとき図 6 左の様になっている。面 X_1 はラベル a_1 辺を含んでいるが、この面 X_1 が他のラベル $a_i (i \neq 1)$ 辺を含む場合を (A) とする。面 X_1 は $\partial_\Sigma U_0$ の端点を含んでいるので、 $X'_1 = \tau(X_1)$ は内部に存在する。図 6 の (A1), (A2) 以外は $\partial_\Sigma U$ に分離される W_1 が 5-point 以上の面になるので (A1) と (A2) の場合を考える。

(A1) の場合 $i = 4$ または $i = 3$ である。 $i = 4$ のときは $c_5 = c_1$ となり、面 X_5 はラベル c_1 辺およびラベル c_1^{-1} 辺を持つので、 $X'_5 = \tau(X_5)$ は自己隣接面になり矛盾。 $i = 3$ の場合は $X'_2 = \tau(X_2)$ が自己隣接面になる。

(A2) のとき W_1 が 5-point でないためには $i = 2$ または $i = 5$ である。 $i = 2$ のときは identification がおかしくなる。よって $i = 5$ であり、このときラベル c_1 辺は退化辺になり、DS-diagram は図 7 のようになる。このとき 3-bridge が存在するが、この bridge は 3-point なので reducible である。

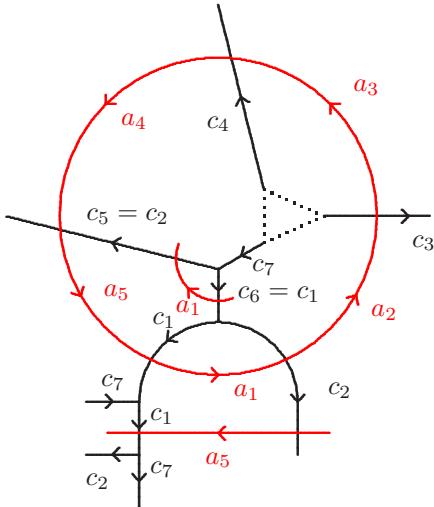


図 7

残った場合を更に場合分けをする。(B) ラベル c_3, c_4, c_5, c_6 辺の始点の中に同じ点がある場合と、(C) ない場合に分ける。(B) の場合を考える。ラベル c_3 辺の始点とラベル c_4 辺の始点が一致しているとき、 X_3 にも corner connection が存在する。これを corner connection の変形で消せないためには、 X_3 に $\partial_\Sigma U_0$ の端点が存在する必要がある。このとき $c_3 = c_2$ となり $X'_2 = \tau(X_2)$ が自己

隣接する。 c_4 と c_5 の場合も同様である。よって対称性により c_5 の始点 = c_6 の始点とする。このとき 3-bridge が存在するがこれが 3-point でないためには、図 8 のどちらかになっている必要がある。

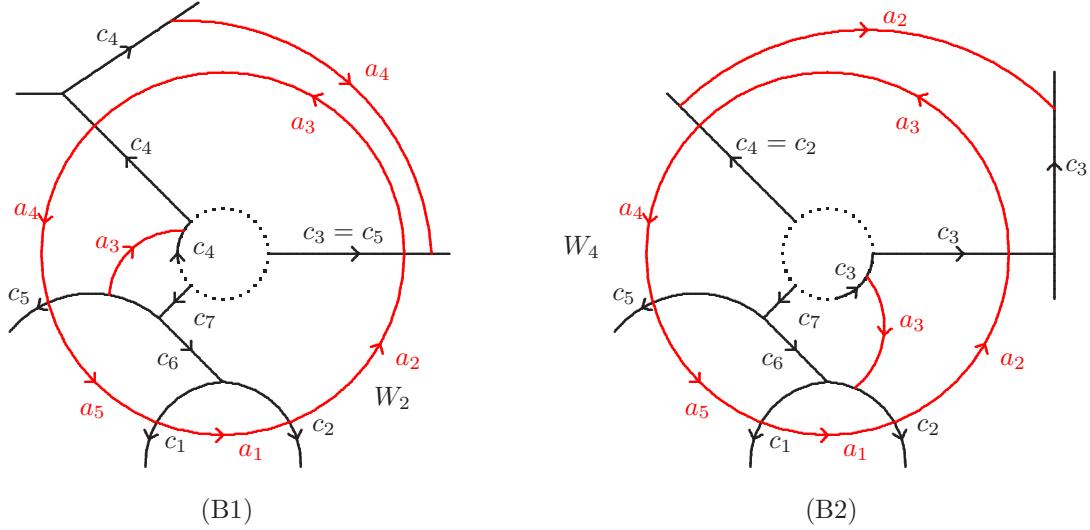


図 8

(B1) の場合を考える。 X_2 は頂点数が多いので $X'_2 = \tau(X_2)$ は内部にある。このとき W_2 は $\partial_\Sigma U$ によって分離される。 X_2 が外部に退化辺を持って X'_2 は内部に存在できない。よって W_2 は退化辺を持たず 5-point 以上である。この場合 reducible である。(B2) の場合は W_4 が 5-point 以上になる。よって (B) の場合は reducible である。

(C) はラベル c_3, c_4, c_5, c_6 辺の端点を共有しない場合である。このとき中央部に 4-bridge が存在する。面 X_1 はラベル a_1 により 2 つに分けられるが、外側の面を W_1 とする。 W_1 は $\partial_\Sigma U$ により分離される。また W_1 は退化辺を含まない。面 X_1 が 6-gon 以上のとき W_1 は 5-gon 以上になるので reducible である。

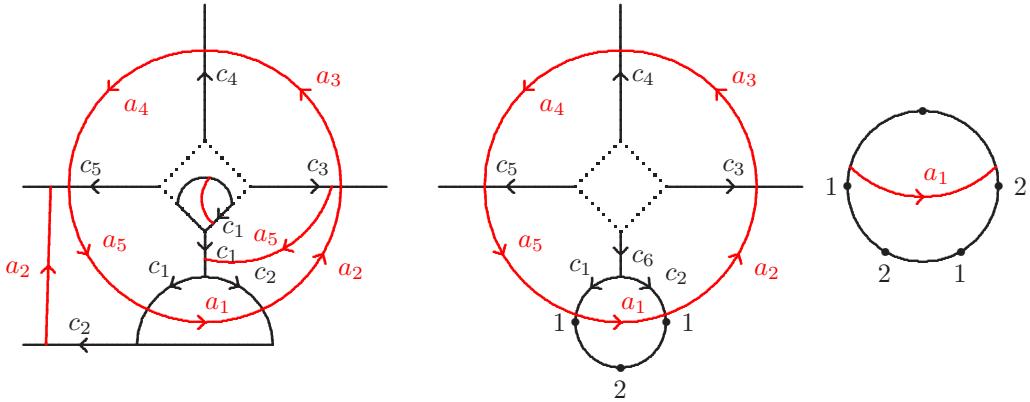


図 9

最初に X_1 が 3-gon のときを考える。 X_1 が退化辺を持たなければ Σ は reducible なので X_1 は退化辺を持つ。 X_1 は外側に退化辺を持つことはないので、ラベル c_1 辺またはラベル c_2 辺が退化辺である。ラベル c_1 が退化辺だとすると図 9 左の様になっている。このとき面 X_2 でラベル a_2 辺とラベル a_5 辺で切り取られる部分を W_2 とすると、 W_2 は $\partial_\Sigma U$ によって分離される 5-point 5-gon なので reducible である。

X_1 が 4-gon のとき外側の点のラベルがすべて異なれば W_1 は $\partial_\Sigma U$ によって分離される 5-point 5-gon になるので、ラベルは図 9 中央の様になっている。面 X_1 は 4-bridge の内部と同一視されるので、他の 2 つのラベル 1 頂点は 4-bridge の内部になる。よって $X'_2 = \tau(X_2)$ および $X'_5 = \tau(X_5)$ は 4-bridge の内部にある。このことから 4-bridge は 4-point であることが分かる。面 X_2 の 4-bridge とラベル a_2 辺で切り取られる部分を W_2 とすると、 W_2 は 4-bridge により分離される 5-point 5-gon なので reducible である。

X_1 が 5-gon のときは図 9 右の様になっている。面 X_1 は 4-bridge の内部と同一視されるので、他の 2 つのラベル 1 頂点および他の 2 つのラベル 2 頂点は 4-bridge の内部になる。このとき Σ に 2-gon が存在するので reducible である。

よってラベル c_i 辺の端点は異なるとする。場合を 3 つに分ける。

- (I) $X_5 = \tau(X_1)$
- (II) $X_3 = \tau(X_1)$
- (III) $X_j \neq \tau(X_i)$ ($i \neq j$)

最初に (I) の場合を考える。 X_1 と X_5 はラベル c_1 辺で対隣接しているので、ラベル c_1 辺をもう 1 つもつ。このとき (I) を更に 3 つの場合に分ける。

- (Ia) c_1 が退化辺のとき
- (Ib) c_1 が退化辺でなく、 X_1 のもう 1 つのラベル c_1 辺が E_1 に属するとき
- (Ic) c_1 が退化辺でなく、 $c_1 = c_2^{-1}$ のとき

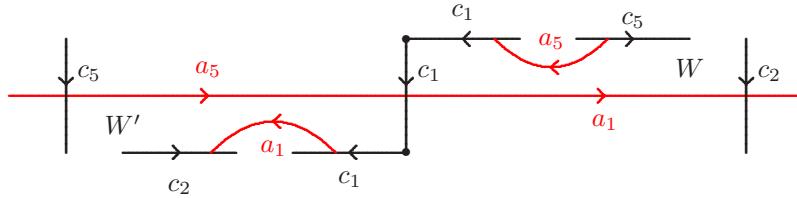


図 10

(Ia) のときは、対称性により X_1 のもう 1 つのラベル c_1 辺が内側(図では上側)にあるとしてよい。このとき図 10 の様になっている。 $c_5 \neq c_2$ のとき W は 5-point 以上になり、 D が reducible になるので、 $c_5 = c_2$ である。このとき面 X_2 と X_5 はラベル c_2 辺をもつので、 $X'_2 = \tau(X_2)$, $X'_5 = \tau(X_5)$ とおくと、この面は図 11 のようになっている。面 X_2 はラベル a_2 辺により 2 つに分けられるが内部を W_2 とする。面 X_4 はラベル a_4 辺により 2 つに分けられるが外部を W_4 とする。この部分が外部にあるときは W_2 が $\partial_\Sigma U$ により分離され、内部にあるときは W_4 が $\partial_\Sigma U$ により分離される。これらは少なくとも 5-point なので、この場合は reducible である。

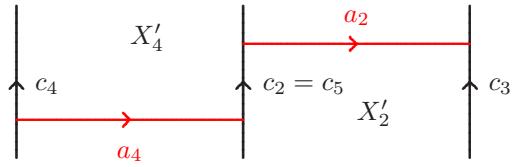


図 11

(Ib) のときは図 12 の様になっているとしてよい。このときは $c_2 = c_5$ の場合も含めて W が 5-point 以上になるので reducible である。

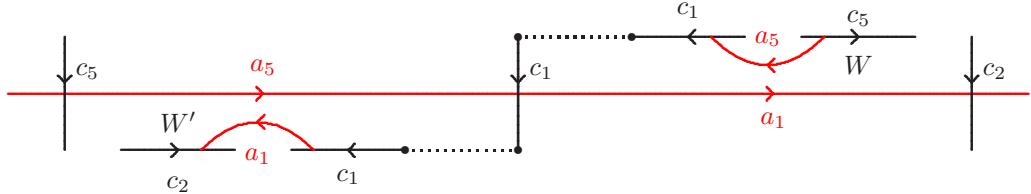


図 12

(Ic) の場合, $c_5 = c_1^{-1}$ の場合と $c_5 \neq c_1^{-1}$ の場合に分ける。 $c_5 \neq c_1^{-1}$ の場合, 上下の対称性によりラベル c_1 辺は X_5 の下辺にあるとしてよい。このとき図 13 の様になっている。

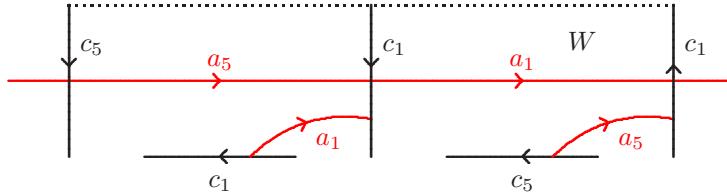


図 13

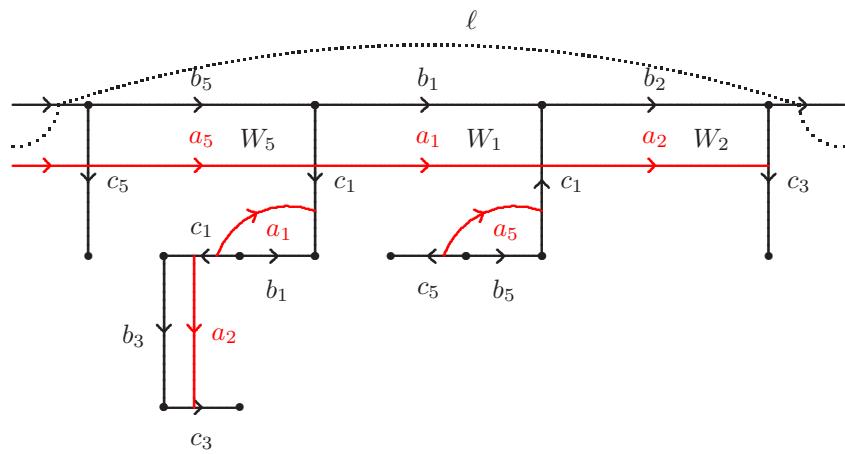


図 14

$\partial_\Sigma U$ で分離されるラベル a_i 辺を境界にもつ面で 5-point 以上のものがあれば reducible である。図 14 の W_1, W_2, W_5 はその条件を満たしているので、4-gon でなくてはならない。このとき G と 3 点で交わる loop ℓ が存在する。この ℓ は 3-bridge なので、reducible でないためには退化辺と交わっている必要がある。このとき条件を満たす辺はラベル c_4 辺のみである。このとき $X_5 = \tau(X_4)$ となり、 X_4 に関して (Ia) case であるが、この場合の処理は終わっている。

$c_4 = c_1^{-1}$ のとき $\partial_\Sigma U$ はラベル c_1 辺と 3 回交わるが、すべて異なる点でなくてはならない。このとき上下の対称性および左右の対称性から図 15 のようになっているとしてよい。 ℓ を $\partial_\Sigma U$ の少し外側の loop とすると、 W に対応する面 W_1 は 5-point 以上になるので Σ は reducible である。

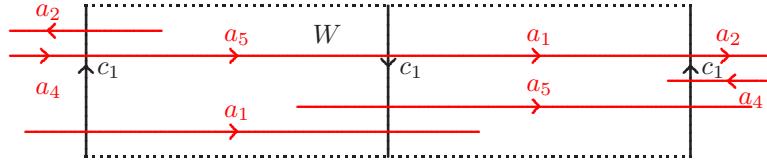


図 15

(II) $X_3 = \tau(X_1)$ のときラベル c_1 辺が ∂X_3 上に存在する。ラベル c_1 辺が $\partial_\Sigma U$ と交わるとき、 $c_4 = c_1$ または $c_3 = c_1^{-1}$ である。 $c_3 = c_2$ となると X'_2 が自己隣接するので、 $c_3 \neq c_2$ である。 $\partial_\Sigma U$ と交わらないときは対称性より「外側」にあるとしてよい。よって次の 4 つの場合に分ける。

- (IIa) $c_4 = c_1$
- (IIb) ラベル c_1 辺は外側にある。
- (IIc) $c_3 = c_1^{-1}$ かつ $c_4 = c_2^{-1}$
- (IId) $c_3 = c_1^{-1}$ かつ $c_4 \neq c_2^{-1}$

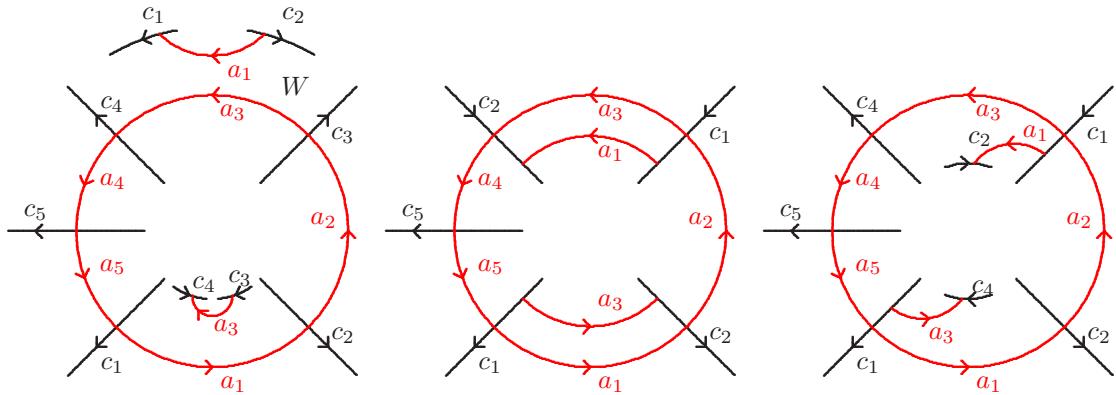


図 16

(IIa) のとき面 X_1 のラベル a_1 辺とラベル a_3 辺で切り取られる部分を W_1 とすると W_1 は $\partial_\Sigma U$ によって分離される 5-point 以上の面なので reducible である。(IIb) のときも同様である(図 16 参照左)。

(IIc) の場合は対称性により、図 16 中央の様になっているとしてよい。このとき X'_2 の周りは図 17 左の様になっている。この部分が内部にあっても、外部にあっても $\partial_\Sigma U$ で分離される 5-point 以上の面が存在するので reducible である。

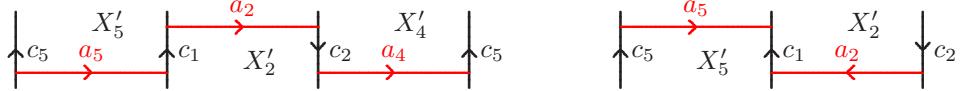
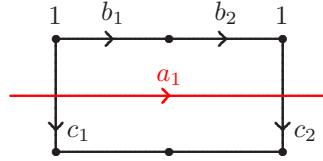


図 17

(IId) の場合は対称性により、図 16 右のようになっているとしてよい。面 X_1 のラベル a_1 で切り取られる外側の面を W_1 とすると、 W_1 は $\partial_\Sigma U$ によって分離されているので 4-point 以下である。このときラベル c_1 の終点とラベル c_2 の終点は 1 つの辺で接続している。面 X_3 に関しても面 X_1 と同様なのでラベル c_3 辺(ラベル c_1^{-1} 辺)の終点とラベル c_4 辺の終点は 1 つの辺で接続している。 $X'_2 = \tau(X_2)$ の周りは図 17 右の様になっている。この部分が外部にあると 5-point の面が存在するので、内部に存在する。このとき面 X_2 においてラベル c_2 辺の終点とラベル c_3 辺(ラベル c_1^{-1} 边)の終点は 1 つの辺で接続している。面 X_4 においてラベル c_4 边の終点とラベル c_5 边の終点が 1 つの辺で接続していなければ、2-bridge が存在する。今の場合 2-bridge と交わる G の辺は退化辺ではないので reducible である。以上によりこの場合は mono であることが分かる。



(A)

図 18

以下 (III) $X_j \neq \tau(X_i)$ ($i \neq j$) の場合を考える。最初に図 18 の様に内部・外部共に 2 辺以上の面 X_i が存在する場合を (A) とする。 $i = 1$ とする。面 X_1 はラベル a_1 辺によって 2 つの面に分かれるが、内部の面(図 18 では上)が外部(図 18 では下)と同一視されるとする。内部の面を W_1 とすると、 W_1 が 5-point 以上なら reducible なので、 W_1 の頂点の中にラベルが同じものが存在する。 W_1 に退化辺が存在すると、内部と同一視されるか、(I) または (II) の場合になるので、退化辺はないとしてよい。このときラベル c_1 边の始点とラベル c_2 边の始点のラベルは同じである。頂点のラベルを 1 とする。 W_1 の他の辺のラベルを図 18 の様に b_1, b_2 とする。ラベル 1 頂点に隣接する辺のラベルは c_1, c_2, b_1, b_2 の 4 つですべて異なる。

面 X_2 のラベル 1 頂点を始点とするラベル c_2 边でない辺のラベルは c_1 か b_1 である。 b_1 のときは左右を入れ替えて議論すればよいので、ラベルは c_1 とする。

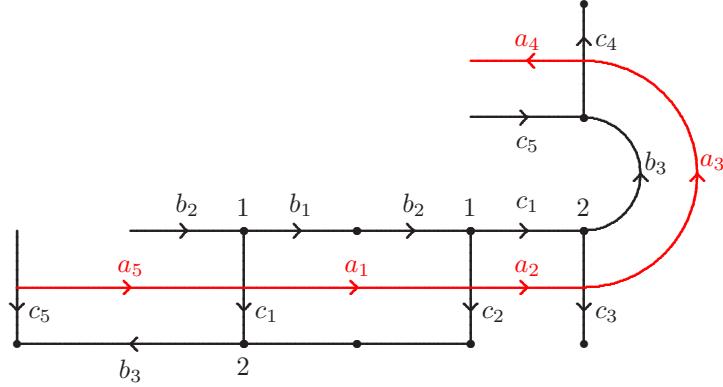


図 19

ラベル c_1 頂点の終点のラベルを 2 とする。面 X_2 をラベル a_2 辺で切り取った内部は $\partial_\Sigma U$ によって分離される。 X_2 は (A) のタイプにはなれないで、 X_2 においてラベル c_2 辺の始点とラベル c_3 点の始点は 1 つの辺で接続されている。面 X_5 をラベル a_5 辺で切り取った外部は $\partial_\Sigma U$ によって分離される。 X_5 は (A) のタイプにはなれないで、 X_5 においてラベル c_1 辺の終点とラベル c_5 点の終点は 1 つの辺で接続されている。よって図 19 の様になっている。このとき $X'_4 = \tau(X_4)$ が自己隣接するので (A) は起きないとしてよい。

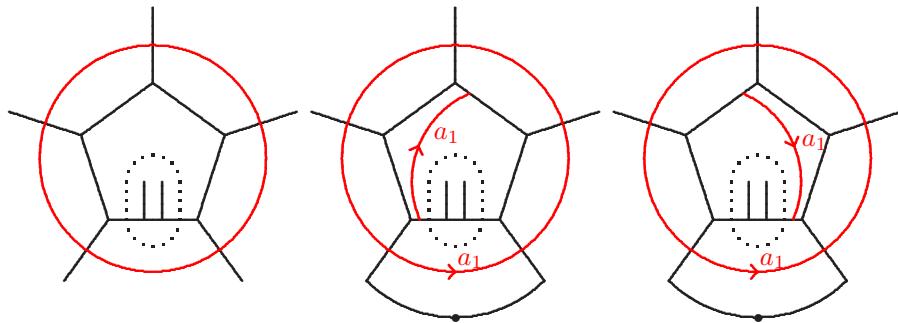


図 20

ラベル c_i 辺の始点とラベル c_{i+1} 辺の始点が 1 つの辺で接続していることが 4 連続で起こっているときを (B) とする。mono でないので図 20 左の様に 2-bridge が存在する。2-bridge は点線で描いてある。2-bridge が退化辺と交わらなければ reducible なので、退化辺と交わる。このとき同一視ができるためには、図 20 の中央または右の様になっている必要がある。(A) が起こっているので矛盾。(B) も起こらない。

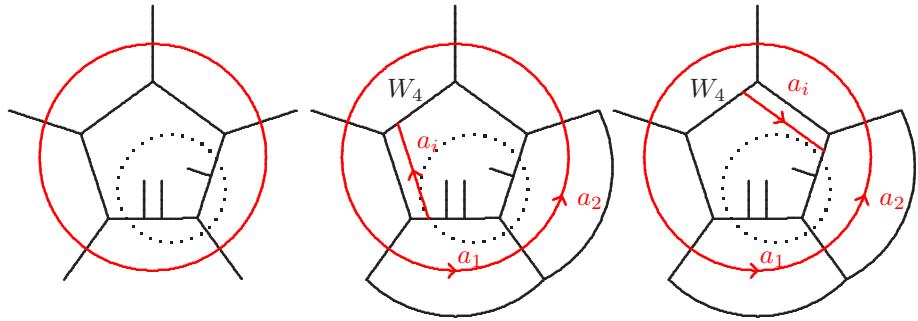


図 21

ラベル c_i 辺の始点とラベル c_{i+1} 辺の始点が 1 つの辺で接続していることが 3 連続で起こっているときを (C) とする。(B) でないとすると、図 21 左の様に 3-bridge が存在する。3-bridge は点線で描いてある。3-bridge が退化辺と交わらなければ reducible なので、退化辺と交わる。このとき中の面は面 $X'_1 = \tau(X_1)$ または $X'_2 = \tau(X_2)$ になっており、図 20 の中央または右の様になっている。ただし図の a_i は a_1 または a_2 である。このとき W_4 は $\partial_\Sigma U$ で分離される 5-point 5-gon なので、reducible である。

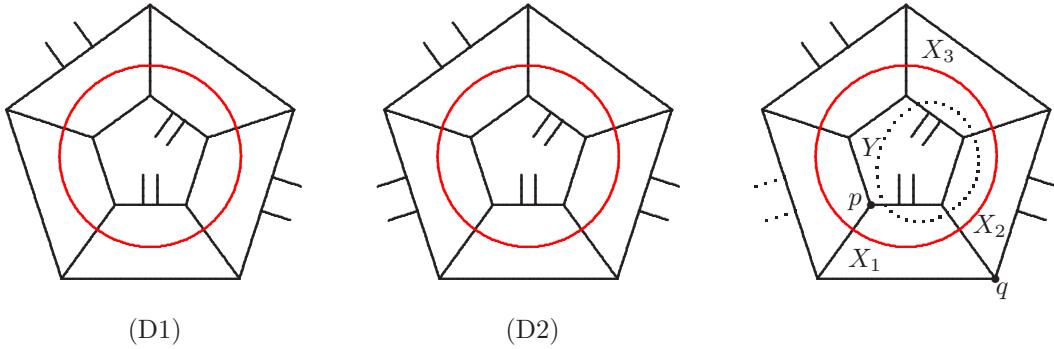


図 22

残った場合を考える。(A) はなく、ラベル c_i 辺の始点とラベル c_{i+1} 辺の始点が 1 つの辺で接続していることが連続して起こったとしても高々 2 連続である。内部でも、外部でもその様な状況である必要があるので、図 22 の (D1) または (D2) になる。下の面を X_1 として、その左の面を X_5 とする。(D1)において $X'_5 = \tau(X_5)$ は内部または外部にあるが、対称性により外部にあると仮定する。(D2) の場合は X'_5 は外部にある。

図 22 右の様に 4-bridge ℓ が存在するがこれが 4-point の場合を最初に考える。 $Y = \tau(X_1)$ または $Y = \tau(X_3)$ という可能性があるが、両方同時に成立しないので $Y \neq \tau(X_1)$ とする。ラベル a_1 辺で切り取られた面 X_1 の外側を W_1 とすると、 W_1 は ℓ により分離される 5-gon である。これが 5-point なら reducible である。よって W_1 は同じラベルの頂点を 2 つ持つが、このとき図 22 右において $p = q$ となる。ここで p, q は頂点のラベルである。 $X'_1 = \tau(X_1)$ は内部にあるので内部に 2 点ラベル p 頂点が存在する。 $X'_2 = \tau(X_2)$ は外部にありラベル p 頂点を持つが、 X_2 のラベル p 頂

点と同じ頂点ではあり得ない。よってラベル p 頂点が 5 個以上存在するので矛盾。 ℓ は 4-point ではない。

ℓ が 4-point でないとき Y, X_1, X_2, X_3 の中に同一視される面が存在する。 $X'_2 = \tau(X_2)$ は外側にある。また $X_j \neq \tau(X_i)$ ($i \neq j$) である。よって $Y = \tau(X_1)$ または $Y = \tau(X_3)$ であるが、対称性により $Y = \tau(X_1)$ とする。ラベル a_1 辺で切り取られた面 X_1 の内側を W_1 とする。 Y の中にラベル a_1 辺があるが、ラベル a_1 辺が図 23 の (a)～(d) のとき、 W_4 または W_5 は $\partial_\Sigma U$ で分離される 5-point 5-gon になるので reducible である。

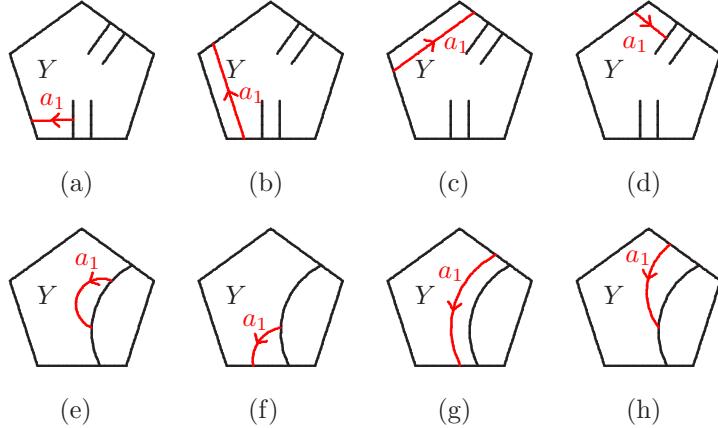


図 23

(g) は X_1 が 5-gon のときのみ起きる。(e)～(g) のとき、 ℓ は 4-point になるのすでに処理してある。残るのは (h) であるが、(h) のときは図 24 のように X'_4 が内部に存在する。これは仮定に反する。以上で証明が終了する。

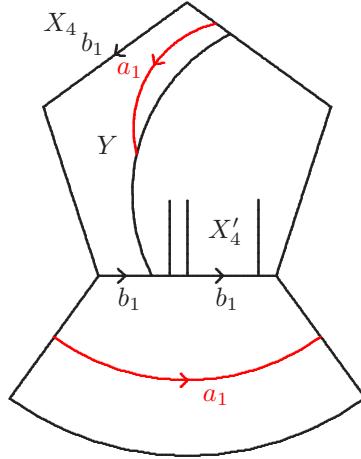


図 24

(11) k -gon U が mono のとき、内部の面は k -point k -gon である。

$\partial_\Sigma U$ として内部に他の $\partial_\Sigma U_1$ を含まないもの (innermost) を選んでおく。内部の面を Y とする。 Y を k -gon とし、 Y が k -point でないとすると、同じラベルをもつ異なる頂点が存在する。この

とき、(I) Y は $Y' = \tau(Y)$ と退化辺で対隣接する、(II) 非退化辺で対隣接する、(III) 対隣接しない、のいずれかであるが、(I) または (II) の場合は $a_i \cap a_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$) となるので、非退化辺で対隣接している。 Y の辺のラベルを b_1, \dots, b_k とする。 a_i, c_i, X_i は前と同様の記号を使用する。今 $b_i = b_1$ とすると図 25 左の様になっているとする。 Y のラベル a_1 辺をはじめとして内部に含まれる辺は loop の一部ではない。即ち $\partial_\Sigma U_0$ の一部である。 $\partial_\Sigma U_0$ の端点は Y 上にある。

以下内部の辺に corner connection がある場合変形を行うが次に注意する。連続する corner connection が存在する場合は（まあそもそも最小反例なのでそのようなものはないのですが）、変形してよいが、 $\#(D \cap f(G))$ を変えない変形の場合ラベル a_1 辺、…、ラベル a_k 辺が変わる変形は行わない。ただし、ラベル a_j 辺はラベル b_j 辺と平行であり、内部にラベル a_j 辺が存在すると、ある $j' (\neq j)$ に対し $X_{j'} = \tau(X_j)$ となっている。

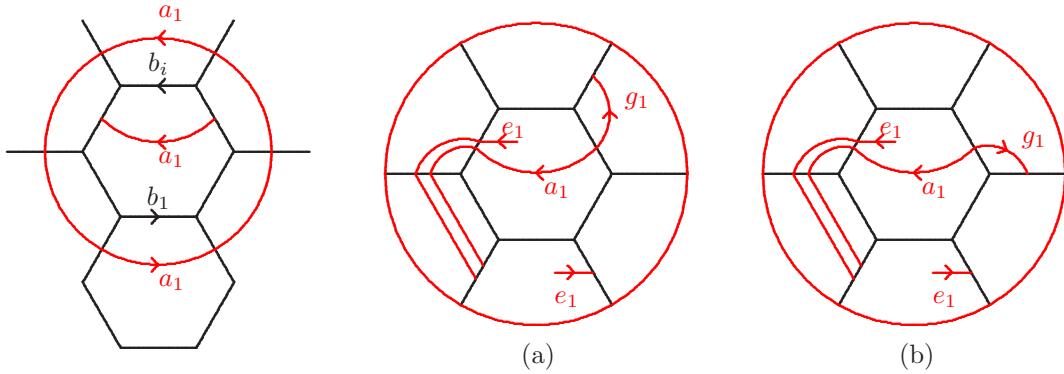


図 25

Y 上の $\partial_\Sigma U_1$ の端点から始まる arc のラベルを e_1 とする。ラベル e_1 辺の終点はラベル b_{i-1} 辺（右向き）、ラベル b_i 辺（上向き）かラベル b_{i+1} 辺（左向き）のいずれかである。上向きのとき corner connection の変形で右向きまたは左向きにできる対称性により左向きとする。ラベル e_1 と隣接している X_{i+1} の辺のラベルを e_2 とする。ラベル e_2 辺の終点がラベル c_{i+1} 辺上にないとしてよい。ラベル e_2 辺の終点がラベル b_{i+1} 辺上にあるときはラベル e_2 辺またはラベル a_1 辺に隣接する辺に edge connection が発生するので起こらない。よってラベル e_2 辺の終点はラベル c_{i+2} 上にある。この議論を続けていくと、図 25 (a),(b) のいずれかになっている。ラベル c_1 辺の始点からラベル a_1 辺の始点の間と $\partial_\Sigma U_0$ の共通部分の個数を考える。いずれの場合も、共通部分が何個あっても等しくなることはないので矛盾。よって Y は mono である。

(12) D 上で 2 つの 5-gon が 2 重隣接することはない。

5-gon が 2 重隣接すると、2-gon が存在するか、自己隣接が 2 箇所に起こる。一方は U_0 でも、もう 1 つ \overline{U} が disk でない成分が存在するので矛盾。

(13) 5-gon と mono k -gon が D 上で隣接することはない。特に、5-gon 2 つが D 上で隣接することはない。

mono 5-gon を U とし、 $\partial_\Sigma U$ のラベルを a_1, \dots, a_5 とする。内部の面を Y とし Y の辺のラベルを b_1, \dots, b_5 とする。 c_i, X_i も前と同じ記法を使う。ただし U は Y を面とする mono 5-gon の中で、mono と隣接するものとしては最も内側にあるものを選んでおく。 k -gon を U_1 とし、 $\partial_\Sigma U_1$ のラベルを $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ とする。内部の面を Y_1 とし Y_1 の辺のラベルを d_1, \dots, d_k とする。 X_i に対応

するものとして Z_i を使う。隣接しているので $a_1 = \alpha_1$ とする。ただし U_1 は Y_1 を面とする mono k -gon の中で、 $\partial_\Sigma U$ に隣接するものとしては最も内側にあるものを選んでおく。

最初に U_1 が 5-gon のとき起こる特殊状況を処理しておく。このときは $Y = Y_1$ または $Y_1 = \tau(Y)$ の可能性がある。 $Y_1 = Y$ のときラベル α_1 辺はある i が存在して X_i に含まれている。 $X_i = Z_1 = \tau(X_1)$ であり、 $b_i = d_1$ となっている。 X_1 はラベル a_i 边を含む。 $\partial_\Sigma U_1 \cap X_1$ はラベルある j に対し α_j 边であるが、 $\alpha_j = a_i$ なら (12) に矛盾するので X_1 は少なくとも 3 边含む。 X_1 においてラベル a_i 边がラベル a_1 边とラベル α_j 边の間にあれば、 U が最小に反する。ラベル a_i 边がラベル α_j 边の外側にあれば、無限個の辺の存在が必要になるいずれにしろ矛盾。

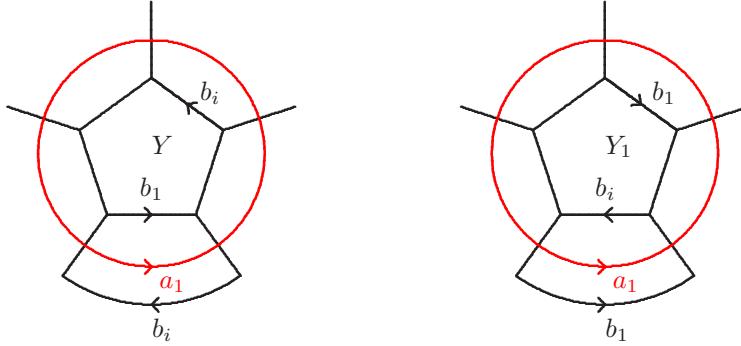


図 26

次に $Y_1 = \tau(Y)$ の場合を考える。このときある i が存在して $b_i = d_1$ となる(図 26 参照)。 X_1 内のラベル a_1 边の外側に別のラベルがある場合は次の変形を行う; $\partial_\Sigma U$ の少し内側に loop ℓ をとり、その loop に X_i における辺のラベルを e_i とする。 Z_1 におけるラベル e_1 边は $\partial_\Sigma U_1$ の外側にある。このとき $\partial_\Sigma U_1$ の内部にラベル e_i 边があれば最少性に矛盾する。 ℓ で S-move し、 Y で G-move を行うと形は同じで X_1 のラベル a_1 边の外側に別の辺がないとなる。最初から別のラベル辺がないとする。

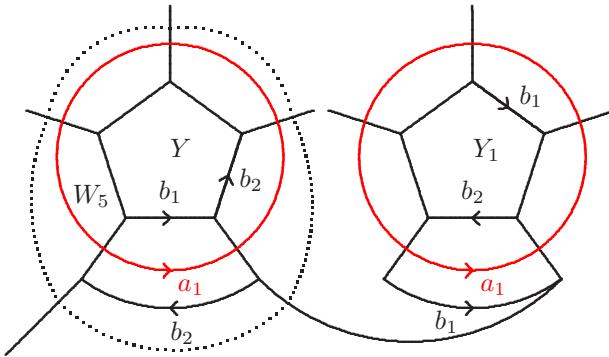


図 27

$i = 3, 4$ の場合は自己隣接があるので、 $i = 2, 5$ である。対称性から $i = 2$ とする。図 27 の点線を ℓ とすると 5-point 4-bridge で、面 W_5 は 5-point なので reducible である。

よって以下 U_1 は k -gon とし, $Y_1 \neq Y$ かつ $Y_1 \neq \tau(Y)$ とする。 (A) $b_1 = d_1$ の場合を最初に考える。この場合は U が k -gon でも成立する。

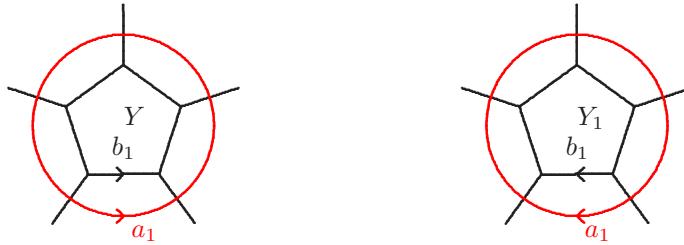


図 28

$\partial_\Sigma U$ の少し外側の loop を ℓ とし, X_i における辺のラベルを e_i とする。 $\partial_\Sigma U_1$ の内部にラベル e_i 辺がないときは, ℓ で S -move を行い, Y で G -move を行ってできる DS-diagram を Σ' とするとき, Σ' では U_1 は zero になるので reducible である。

よって $\partial_\Sigma U_1$ の内部にラベル e_i 辺が存在するとする。

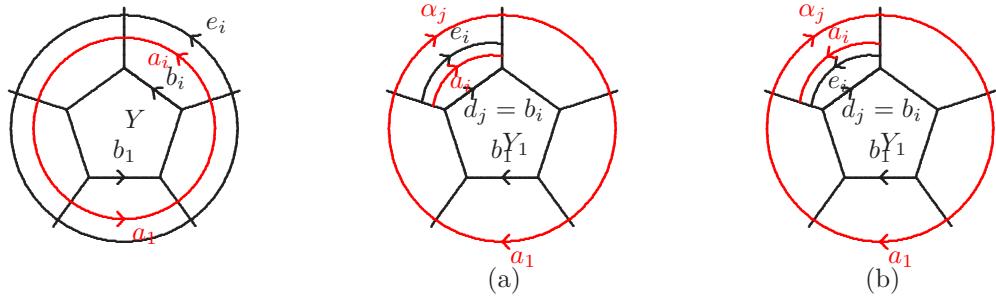


図 29

(a) のとき, 内部に loop が存在するので U_1 の選び方に反する。(b) のとき, $a_i \neq \alpha_j^{-1}$ のときはやはり内部に loop があり, U_1 の選び方に反する。 $a_i = \alpha_j^{-1}$ のときは D 上に Möbius band が存在するので矛盾。よって (A) の場合は成立する。

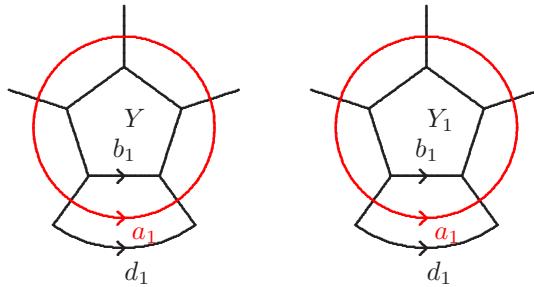


図 30

最後に図 30 の様に X_1 と Z_1 が逆に同一視されているときを考える。 $\partial_\Sigma U_1$ の少し内部に loop ℓ をとる。面 Z_i と ℓ との共通部分のラベルを e_i とする。最初に $\partial_\Sigma U$ の内部にラベル e_i 辺があると

きを考える。このときは $\partial_\Sigma U$ の内部に mono と隣接する loop が存在するか, $\partial_\Sigma U_1$ の内部に mono と隣接する loop が存在するか, D 上に Möbius band が存在するので矛盾。よって $\partial_\Sigma U$ の内部にラベル e_i 辺がないとする。

このとき図 31 右の点線のように ℓ を選ぶ。 ℓ の各辺のラベルを β_1, \dots, β_5 とする。 $1, \dots, 4, p, q$ は頂点のラベルとする。このとき次を示せば証明が完成する。

(1) ℓ は 5-point 5-gon である。(2) W_2 または W_5 は ℓ によって分離される 5-point 5-gon である。

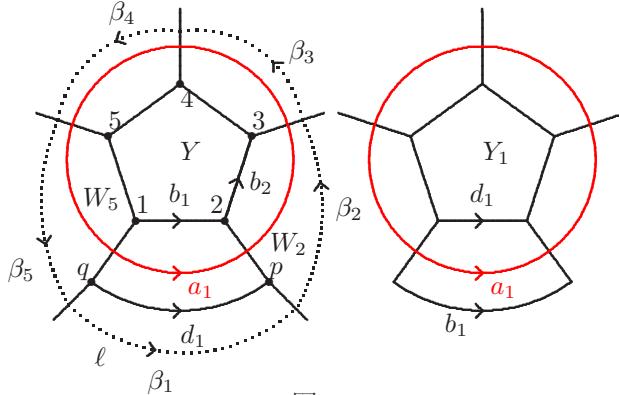


図 31

ここで X_1 のラベル a_1 辺で切り取られる下側 (W_1 とする) には $\partial_\Sigma U$ などが存在しないことを注意しておく。

(a) $\beta_1 \cap \beta_3 \neq \emptyset$ のとき ; $c_4 = d_1^{-1}$ または $c_3 = d_1$ となりラベル d_1 辺が $\partial_\Sigma U$ と交わるので W_1 が $\partial_\Sigma U$ と交わり矛盾。同様に $\beta_1 \cap \beta_4 = \emptyset$ も示される。

(b) $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \emptyset$ のとき ; d_1 が退化辺になるか $c_3 = d_1^{-1}$ となる。 d_1 が退化辺のときは Y_1 のラベル d_1 と隣接することができない。 $c_3 = d_1^{-1}$ のときは Y_1 内に $\partial_\Sigma U$ の辺が存在する。いずれも矛盾。同様に $\beta_1 \cap \beta_5 = \emptyset$ も示される。

(c) $\beta_3 \cap \beta_2 \neq \emptyset$ のとき ; W_1 と $\partial_\Sigma U$ が交わるか b_3 が $\partial_\Sigma U$ と交わるなるので矛盾。同様に $\beta_4 \cap \beta_5 = \emptyset$ も示される。

(d) $\beta_3 \cap \beta_4 \neq \emptyset$ のとき ; d_3 が $\partial_\Sigma U$ と交わる。

(e) $\beta_3 \cap \beta_5 \neq \emptyset$ のとき ; W_1 が $\partial_\Sigma U$ と交わるか b_3 が $\partial_\Sigma U$ と交わる。

(f) $\beta_2 \cap \beta_5 \neq \emptyset$ のとき ; W_1 と $\partial_\Sigma U$ が交わる。

以上で ℓ が 5-point であることが示された。 W_2 または W_5 が 5-gon であることを示す。 $p = 2$ とすると c_2 は退化辺で Y_1 の退化辺と隣接する。このとき $k = 5$ であり, $Y_1 = \tau(Y)$ となる。これはすでに処理したタイプである。よって $p = 3$ とする。このとき 3 を始点とする $f(G)$ の辺は b_2, b_3, c_2, d_1 の 2 辺でありこれらは異なる。 c_3 も 3 を頂点にもつことより, $c_3 = d_1^{-1}$ または $c_3 = c_2^{-1}$ である。このとき W_1 が $\partial_\Sigma U$ と交わる。以上により reducible であることが示された。

(14) 5-gon の中には隣接する 6-gon を 3 つ以上持つものが存在する。

k -gon の数を F_k とすると $F_5 = 7 + \sum_{k \geq 7} (k-6)F_k$ が成立している。 i 個の 7-gon 以上と隣接している 5-gon の数を f_i とすると, 5-gon と 7-gon 以上の隣接辺の数は $\sum_{i=1}^5 if_i$ である。5-gon は隣

接しないので、 k -gon に隣接できる 5-gon の数は $\left[\frac{k}{2} \right]$ 以下である。 i 個の 5-gon と隣接している k -gon の数を g_i^k とすると、

$$\sum_{i=1}^5 i f_i = \sum_{k \geq 7} \sum_{i \geq 1} i g_i^k$$

また $F_5 = \sum_{i \geq 0} f_i$, $F_k = \sum_{i \geq 0} g_i^k$ が成立している。

今仮定を否定すると $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ である。よって

$$\begin{aligned} 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 &= g_1^7 + 2g_2^7 + 3g_3^7 + g_1^8 + 2g_2^8 + 3g_3^8 + 4g_4^8 + g_1^9 + 2g_2^9 + 3g_3^9 + 4g_4^9 + \cdots \\ &\leq 3 \sum_{i \geq 0} g_i^7 + 4 \sum_{i \geq 0} g_i^8 + 4 \sum_{i \geq 0} g_i^9 + \cdots \\ &= 3F_7 + 4F_8 + 4F_9 + \cdots \end{aligned}$$

が成立するが、

$$\begin{aligned} 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 &\geq 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 \\ &= 3(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5) \\ &= 3F_5 \\ &= 3(7 + F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \cdots) \end{aligned}$$

より

$$3(7 + F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \cdots) \leq 3F_7 + 4F_8 + 4F_9 + \cdots$$

即ち

$$21 + 2F_8 + 5F_9 + \cdots \leq 0$$

が成立するが、これは矛盾。

(15) 5-gon は 7-gon に対応するのに十分多く存在する。

$$\begin{aligned} \alpha &= 3f_0 + 2f_1 + f_2 - f_4 - 2f_5 = \sum_{i=0}^5 (3-i)f_i \text{ とおく。} \\ 3F_5 &= 3\left(\sum_{i=0}^5 f_i\right) = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \alpha \\ &= \alpha + g_1^7 + 2g_2^7 + 3g_3^7 + g_1^8 + 2g_2^8 + 3g_3^8 + 4g_4^8 + g_1^9 + 2g_2^9 + 3g_3^9 + 4g_4^9 + \cdots \\ &= \alpha - \beta + 3 \sum_{i \geq 0} g_i^7 + 4 \sum_{i \geq 0} g_i^8 + 4 \sum_{i \geq 0} g_i^9 + \cdots \\ &= \alpha - \beta + 3F_7 + 4F_8 + 4F_9 + \cdots \end{aligned}$$

ここで

$$\beta = 3g_0^7 + 2g_1^7 + g_2^7 + 4g_0^8 + 3g_1^8 + 2g_2^8 + g_3^8 + 4g_0^9 + 3g_1^9 + 2g_2^9 + g_3^9 + \cdots$$

とおいた。このとき

$$\begin{aligned} 3(7 + F_7 + 2F_8 + 3F_9 + \dots) &= 3F_5 \\ &= \alpha - \beta + 3F_7 + 4F_8 + 4F_9 + \dots \end{aligned}$$

より

$$21 + 2F_8 + 5F_9 + \dots + f_4 + 2f_5 + \beta = 3f_0 + 2f_1 + f_2$$

参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [4] Kouno, M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [5] Kouno, M, DS-diagram の generator, 箱根セミナー 2008 記録
- [6] Kouno, M, genialized DS-diagram の C-変形とリフトについて, 箱根セミナー 2009 記録
- [7] Kouno, M, On genialized DS-diagram and moves, preprint
- [8] Yokoyama, K, Lens space の DS-diagram について, 数理解析研究所講究録 563(1985)
- [9] Yokoyama, K, On DS-diagrams of lens space, Topology and Computer Science, 紀伊國屋書店, 171–192 (1987)
- [10] Yokoyama, K, Extended DS diagram とその変形, 箱根セミナー 2002 記録
- [11] Yamashita, M, DS-変形の生成元について, 箱根セミナー 1998 記録