

generalized DS-diagram の C -変形とリフトについて

河野正晴 (北見工業大学)

複雑度を下げる C -変形と、複雑度を上げることになるが Heegaard diagram に関連する変形である「リフト」を定義し、その性質について議論する。 C -変形は [3], [5] で述べたものから変更しました。リフトも箱根で述べたものから一部変更しました。

1. 定義

generalized DS-diagram の定義は [1],[6] を、 G -move, S -move, GS -deformation については [2],[6] を参照して下さい。

generalized DS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ を考える。ここで $S = S_1^2 \cup S_2^2 \cup \dots \cup S_p^2$ とする。このとき $s(\Sigma) = p$ を Σ の球面数 (s -number) と呼ぶ。 $c(\Sigma) = \#\{f(v) \mid v \in V(G)\}$ を Σ の頂点数 (vertex number) と呼ぶ。ここで $\#A$ は集合 A の要素の個数を意味する。 $c(M) = \min\{c(\Sigma) \mid M(\Sigma) \cong M\}$ が Matveev complexity である。 $\mathcal{C}(\Sigma) = (c(\Sigma), s(\Sigma))$ を generalized DS-diagram の複雑度 (complexity) と呼ぶ。順序は辞書式順序とする。 $B = B_1^3 \cup B_2^3 \cup \dots \cup B_p^3$ を 3-ball の union とし、 $\partial B = S$ とする。 f を内部では一対一になる様に B まで拡張すると、 f は B から $M(\Sigma)$ への写像に拡張できる。 τ を Σ により定まる involution とする。以下 Σ, S, G, f, τ は断りなしに使うことがある。

X を Σ の面とする。 $\overline{X} \cap \overline{\tau(X)} \neq \emptyset$ が成立するとき、 X は対隣接する (coadjacent) という。対隣接しているとき、2つの面の (closure の) 共通部分になっている辺を対隣接辺と呼ぶ。 X が対隣接する場合、対隣接辺のラベルを持つ辺が少なくとも2つ ∂X に存在する。

X が open 2-disk とする。 \overline{X} が 2-disk でないとき、 X は自己隣接する (self-adjacent) という。 X が自己隣接するとき、その辺の両側がともに面 X である様な辺が存在する。この辺は G の辺としては1つであるが、 X の境界の辺と考えた場合は2つあるものとする。この辺を自己隣接辺と呼ぶ。

X が対隣接または自己隣接するとき ∂X には同じラベルを持つ辺が2つ以上存在する。逆に ∂X に同じラベルを持つ辺が2つ以上存在するとき、 X は対隣接するか、自己隣接する。 ∂X に向きをつけ境界のラベルを読んでいったとき、自己隣接の場合2つのラベルの方向は逆になっており、多様体の向き付け可能性を仮定すると、対隣接の場合2つのラベルの方向は一致している。1つの面で自己隣接と対隣接が同時に起こる場合もある。

2つのラベル A, B が $A = B$ または $A = B^{-1}$ の関係にあるとき $|A| = |B|$ と書く。頂点 v に対し $f(v)$ をその頂点のラベルと呼ぶ。辺 e の頂点を v_1, v_2 とするとき、 $f(v_1) = f(v_2)$ となる辺を退化辺 (degenerate edge) と呼ぶ。退化辺のラベルを A とすると $f(G)$ で A はループになっている。ラベル A 辺の中にループがなければ3つのラベル A 辺は隣接している。 n 辺形が退化辺を含むとき、退化 n 辺形 (degenerate n -gon) と呼ぶ。

定義 1.1 Σ の面 X (open 2-disk と同相を仮定) が n 辺形だとする。 $\#\{f(v) \mid v \text{ は } X \text{ の頂点}\} = k$ であるとき, X を k 点 n 辺形 (k -point n -gon) または k 点形 (k -point-gon) と呼ぶ。

S_i^2 上の loop ℓ が以下の条件を満たすとき n -橋 (n -bridge) であるという。

- (1) ℓ は Σ に関し general position である ([2] 参照)。
- (2) $\#(\ell \cap G) = n$ 。
- (3) $S_i^2 - \ell = R_1 \cup R_2$ とするとき, R_1 および R_2 は少なくとも $n - 1$ 個の頂点を含む。

$k = \#(f(\ell) \cap f(\tau(\ell - G))) + n$ とおく。このとき ℓ を k 点 n 橋 (k -point n -bridge) または k 点橋 (k -point-bridge) とよぶ。またこのとき R_1 および R_2 を k 点 n -領域 (k -point n -region) または k 点領域 (k -point-region) または n -領域 (n -region) と呼ぶ。 $\ell \cap e \neq \emptyset$ となる G の辺 e を ℓ の足 (foot) と呼ぶ。

k 点 n 橋 ℓ に沿った S -move で Σ から得られた generalized DS-diagram を Σ' とする。 Σ' の中には次をみたす m 点形 X が存在するとする。

- (1) $m > k$ 。
- (2) $X \in R_1$ かつ $\tau(X) \notin R_1$ が成立するか $X \in R_2$ かつ $\tau(X) \notin R_2$ が成立する。
- (3) X および $\tau(X)$ は自己隣接しない。

このような k 点 n 橋を良い橋 (good bridge) と呼び, 面 X を ℓ に関する良い面 (good face) と呼ぶ。上の条件の (2) のみ満たす面は ℓ に関して分離されていると言う。良い n 橋 ℓ が存在するとき, これに沿って S -move し, 良い面 X で G -move を行うと頂点数は $m - k$ 下がる。この変形を C_n -変形 (C_n -move) と呼ぶ。また k 点 n 橋 ℓ が (1) の代わりに (1') $m = k$ を満たすとき許容可能な橋 (admissible bridge) といい, ℓ に沿って S -move し, その後 X で G -move する変形を B_n -変形 (B_n -move) と呼ぶ。 B_n -変形を行っても頂点数は変化しない。

ここで generalized DS-diagram に名前をつけておこう。 p, q を $p \geq 4, p \geq 2q$ となる互いに素な自然数とする。このとき lens space $L(p, q)$ を実現する DS-diagram として横山の標準形 ([7],[8]) が知られているが, この DS-diagram を $\Sigma(p, q)$ と書くことにする。これを $p \leq 3$ の場合にも拡張しておく。 $\Sigma(3, 1)$ を球面数 1 で, triple type の hoop を 1 個持つ generalized DS-diagram とする。 $\Sigma(2, 1)$ を球面数 1 で, $G = \emptyset$ となる generalized DS-diagram とする。 $\Sigma(1, 0)$ を球面数 2 で, $G = \emptyset$ となる generalized DS-diagram とする。 $\Sigma(0, 1)$ を球面数 1 で, normal type の hoop を 3 つ持ち, $M(\Sigma(0, 1)) \cong S^2 \times S^1$ となる generalized DS-diagram とする。このとき $q \leq 3$ の場合も含め $M(\Sigma(p, q)) \cong L(p, q)$ が成立する。 $\Sigma(S^3; s = 3)$ を球面数 3 で各球面上に 1 個 normal type の hoop をもつ generalized DS-diagram とする。所謂「池田のアワビ」を awabi と書く。[5] で示した様に $f(G)$ が 2 重辺のみからなるとき DS-diagram は一意的に定まる。 $f(G)$ の頂点数が n のときこの DS-diagram を $\Sigma(Q_{4n})$ と表す。

定義 1.2 $\Sigma \neq \Sigma(0, 1)$ であって Σ が境界を 2 つ以上持つ面を含むとき, Σ は分離可能 (separable) であるという。generalized DS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ が分離可能で $M(\Sigma)$ が向き付け可能であるとき, 次の性質をもつ loop L が S 上に存在する。

- (1) $L \cap G = \emptyset$ 。

(2) L が S 上で張る disk は G と交わる。

(3) $L \cap \tau(L) = \emptyset$ 。

この loop L に対し B 内の proper な 2-disk D, D' で $\partial D = L, \partial D' = \tau(L), D \cap D' = \emptyset$ となるものが存在する。

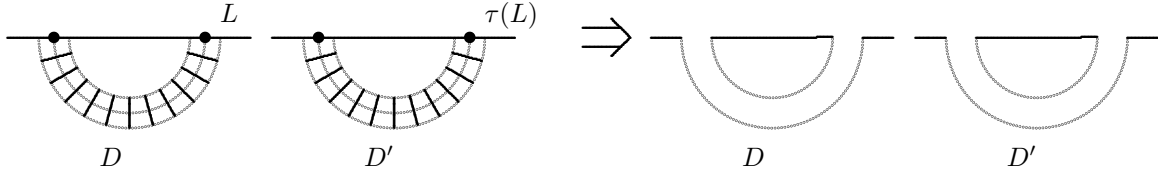


図 1.1

$U(D) = D \times [-1, 1], U(D') = D' \times [-1, 1]$ を D および D' の正則近傍とする。ただし $\tau(\partial D \times \{\pm 1\}) = \partial D' \times \{\pm 1\}$ とする。このとき $S' = S - (\partial D \times (-1, 1) \cup \partial D' \times (-1, 1)) \cup D \times \{-1\} \cup D \times \{1\} \cup D' \times \{-1\} \cup D' \times \{1\}$, $G' = G$ とおく。 $S' - G'$ 上の involution で τ' を次の様に定義する。 $S' - (\partial D \times (-1, 1) \cup \partial D' \times (-1, 1))$ 上では τ と一致する。 $h: D \rightarrow D'$ を $x \in \partial D$ に対して $\tau(x, \varepsilon) = (h(x), \varepsilon)$ ($\varepsilon = \pm 1$) を満たす同相写像とすると、 $D \times \{-1, 1\} \cup D' \times \{-1, 1\}$ 上では $\tau'(x, \varepsilon) = (h(x), \varepsilon)$ が成立する。このとき generalized DS-diagram $\Sigma' = (S', G', f')$ が定まる。

$M(\Sigma)$ は連結だとする。 $M(\Sigma')$ が連結のとき $M(\Sigma) \cong M(\Sigma') \sharp (S^2 \times S^1)$ となり、 $M(\Sigma')$ が非連結のとき $M(\Sigma') = M_1 \cup M_2$ とすると、 $M(\Sigma) \cong M_1 \sharp M_2$ となる。このとき Σ' を 2 つの generalized DS-diagram Σ_1, Σ_2 に分け、 $M_1 = M(\Sigma_1), M_2 = M(\Sigma_2)$ となる様にする。この様に Σ が分離可能なとき Σ から Σ' または Σ_1 および Σ_2 を作り出す操作を分離 (separation) と呼ぶ。

分離を可能な限り実行することにより次が得られる。

命題 1.3 Σ が分離可能で $M(\Sigma)$ は向き付け可能であるとする。このとき分離不可能な generalized DS-diagram $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ が存在して次を満たす。

$$\begin{aligned} M(\Sigma) &\cong M(\Sigma_1) \sharp \dots \sharp M(\Sigma_n) \sharp k(S^2 \times S^1) \quad (k \geq 0) \\ c(\Sigma) &= c(\Sigma_1) + \dots + c(\Sigma_n) \\ s(\Sigma) &= s(\Sigma_1) + \dots + s(\Sigma_n) - 2(n + k - 1) \end{aligned}$$

以下 generalized DS-diagram は分離不可能で、 $M(\Sigma)$ は連結で向き付け可能であると仮定する。

2. 1-gon の解消

1-bridge が存在することと自己隣接する面が存在することは同値である。1-gon が存在すれば 1-bridge が存在するので、最初に 1-gon について議論する。

命題 2.1 1-gon が存在すれば次に述べる変形により頂点数を下げるができる。

1-gon のラベルを A とする。loop でないラベル A 辺がつなぐ面を X, X' とする (図 2.1 参照)。このとき $X' = \tau(X)$ である。いくつかの場合に分けて考える。

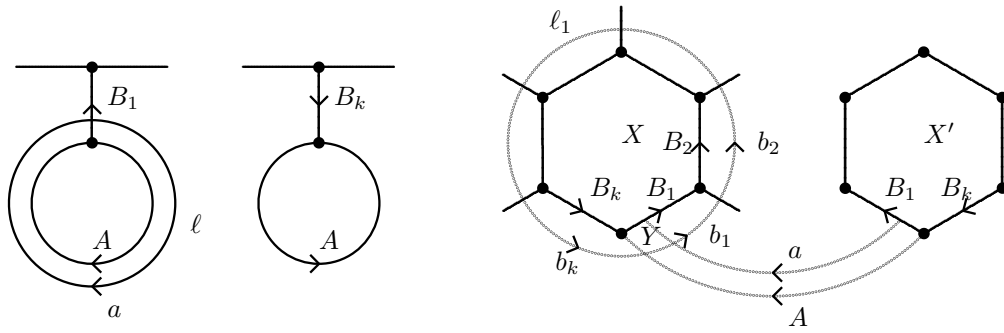


図 2.1

(A) general case : X および X' が自己隣接および対隣接をしていない場合。

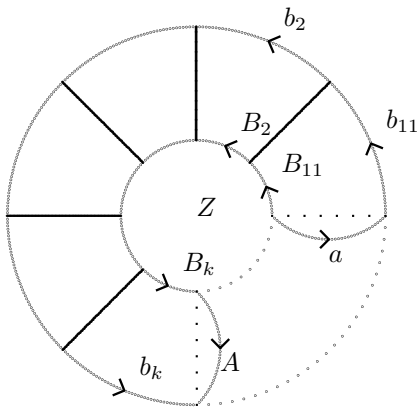


図 2.2

図 2.1 の様に一方の 1-gon の少し外側の loop を ℓ とし, ℓ のラベルを a とする。 X のラベルを B_1, \dots, B_k とし, X の少し外側の loop を ℓ_1 とする。 ℓ_1 のラベルを b_1, \dots, b_k とする。 Σ に ℓ で S -move を行ってできる generalized DS-diagram を Σ' とすると, ラベル b_1 辺は Σ' ではラベル a 辺により 2 つの辺 (ラベル b_{11} 辺, ラベル b_{12} 辺) に分割される。 ラベル B_1 辺は Σ' ではラベル a 辺により 2 つの辺 (ラベル B_{11} 辺, ラベル B_{12} 辺) に分割される。 GS 変形を ℓ で S -move $\implies \ell_1$ で S -move $\implies Y$ で G -move $\implies Z$ で G -move の順で実行する。 ただし Y はラベル a 辺とラベル b_1 辺により切り取られて発生した 4 辺形で, Z は Y での G -move の結果発生した多边形とする。

X が Σ で q 点 k 边形とすると変形後の Σ' では $q+1$ 点 $k+1$ 边形である。 Y で G -move してできる generalized DS-diagram を Σ'' とする。 X に接続する辺の中にラベル B_1, \dots, B_k のいずれかを持つ辺が存在する場合, X は更に辺数が増える。 この様な辺個数を t とすると 2 度目の変形後の Σ'' では ∂X は $q+t+1$ 点形になる。

2 回の S -move で発生した点はすべて Y および Z の境界上にあるので, 2 回 G -move を実行すると, 発生した点はすべて消えている。

また最初から X にあった点 (Σ における X の頂点) も全て Y および Z の境界上にあるので消える。 結局頂点は q だけ少なくなる。 即ち X が q 点形するとき, この操作で頂点は q 個少なくなる。 また, G -move と S -move の回数は同じなので, 球面数は変化しない。

(B) special case (1) : 次に X または X' が自己隣接または対隣接する場合を考える。 最初に $|A|, |B_1|, |B_2|, |B_k|$ がすべて異なる場合または $|A|, |B_1|, |B_k|, |B_{k-1}|$ がすべて異なる場合を考える。 対称性により $|A|, |B_1|, |B_2|, |B_k|$ がすべて異なる場合を考える。

最初に「前処理」として図 2.3 のループ ℓ に沿って S -move を実行する。 この変形で頂点数は 4 つ上がる。 この結果できた generalized DS-diagram は general case になっているので, (A) general case で定義した変形を実行する。 これで 4 頂点下がる。 この変形で「前処理」の結果新たに得られた球面上には 1-gon が存在しているので, これに沿って G -move を実行する。 これを「後処理」

という。後処理では頂点数は1つ下がるので、全体としては頂点数が1下がっている。球面数は変わらない。

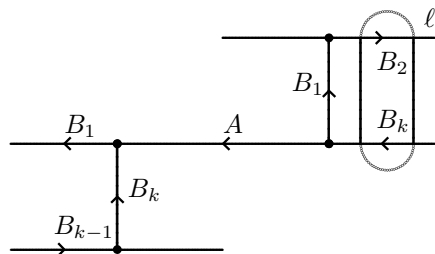


図 2.3

(C) special case (2) : 自己隣接または対隣接が存在する場合で special case (1) 以外の場合は Σ が awabi であることを示す。

ラベル A 辺の中には 1-gon があるので、 $|A| \neq |B_1|$ となる。同様に $|A| \neq |B_k|$ となる。 $|B_1| = |B_k|$ のとき $B_1 = B_k$ となる。このときは X が 1-gon になるか、 Σ は awabi である。1-gon の場合は general case である。以上により awabi の場合を除くと $|A|, |B_1|, |B_k|$ はお互いに異なることが分かる。

$|B_2|$ が $|A|, |B_1|, |B_k|$ のどれとも異なる場合 special case (1) なので、どれかは $|B_2|$ と等しい。 $|B_2| = |A|$ のとき、ラベル B_1 辺は退化辺であり、このとき Σ は awabi である。 $|B_2| = |B_1|$ のとき $B_2 = B_1$ であり、ラベル B_1 辺は退化辺であり、ラベル B_1 辺の中に 1-gon は存在しない。この diagram は実現不可能である。よって $|B_2| = |B_k|$ としてよい。 $B_2 = B_k^{-1}$ のときラベル B_1 辺は退化辺となり、この diagram は実現不可能なので $B_2 = B_k$ である。このとき diagram は図 2.4 の様になっている。

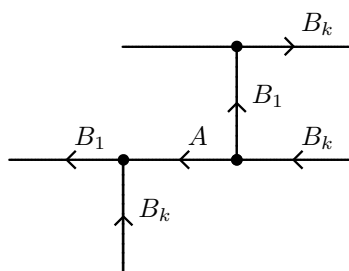


図 2.4

図 2.4 の 3 つのラベル B_k 辺の 2 つが同じ辺の場合を考える。 X が 2-gon のときは general case なので、図 2.5 の様になっている。このとき $|A|, |B_1|, |B_k|, |B_{k-1}|$ は異なるので special case (1) が起こっている。

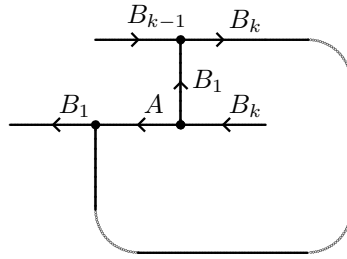


図 2.5

よって図 2.4 の 3 つのラベル B_k 辺は異なる辺である。このとき 1 つのラベル B_k 辺はラベル A の 1-gon と接続しているので、多様体が向き付け可能であることに注意すると、図 2.6 の様になっている。このとき $|A|, |B_1|, |B_k|, |B_{k-1}|$ は異なるので special case (1) が起こっている。

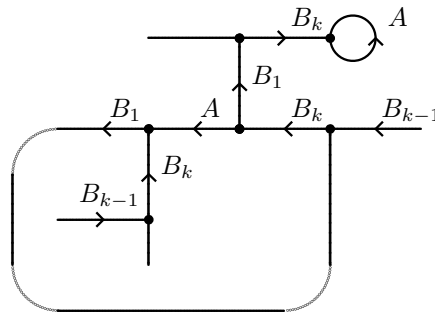


図 2.6

以上の議論により Σ は awabi であることが分かった。awabi に対しては図 2.7 の様なループ ℓ に沿って S -move を行う。頂点数は 3 上がるが、general case になる。general case を実行すると頂点数 1, 球面数 2 の generalized DS-diagram になるが general case の 1-gon が存在するので、もう一度変形を実行すると $\Sigma(0, 1)$ が得られる。■

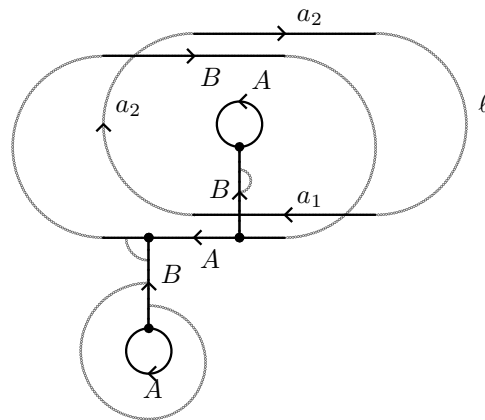


図 2.7

定義 2.2 命題 2.1 の説明中に定義した 1-gon を消す変形を D_1 -変形 (D_1 -move) と呼ぶ。
 なお Σ が awabi でない場合 D_1 -変形は球面数を変えずに頂点数のみを下げています。

3. 1-bridge の解消

命題 3.1 1-bridge が存在すれば 1-gon か good 1-bridge が存在する。

命題 3.1 を示すために補題を用意する。

補題 3.2 G のループ何個かで囲まれた領域 R が「 R 内の任意の面はその貼り合う面を R 内に持つ」とき、 R の境界上の任意の辺に対し、それと同じラベルを持つ異なる辺が R の境界上に存在する。

証明 R の境界すべてに B で proper な disk $D = D_1 \cup \dots \cup D_p$ を張る。このとき $f(D)$ は $M(\Sigma)$ を 2 つに分離する。同じラベルを持つ辺が境界上に 2 つ存在しない場合分離できないので補題が成立する。 ■

補題 3.3 G のループ 1 個で囲まれた領域 R が境界の外側を自己隣接辺をもつ面 X に囲まれているとする。 $R' = S - (\overline{R \cup X})$ とするとき、 R 内の面 Y でその貼り合う面 Y' が R' 内に存在するものがある。

証明 $\tau(X) = X'$ とおく。最初に $X' \subset R'$ の場合を考える。補題の様な面 Y が存在しないとすると、このとき R 内の任意の面はその貼り合う面を R 内に持つ。

∂R 上の任意の辺を e_1 とし、そのラベルを B_1 とする。補題 3.2 より e_1 とは異なるラベル B_1 辺 d_1 が ∂R 上に存在する。このとき $\partial X'$ 上にラベル B_1 辺が存在するが、ラベル B_1 辺は高々 3 個なので $\partial X'$ 上の辺は自己隣接辺である。よって ∂X 上で見た e_1 と d_1 のラベルの方向は逆になっており、 e_1 と d_1 は隣接していない。 e_1 と隣接する辺 e_2 をラベル B_1 の方向にとり、その辺のラベルを B_2 とする。ただし B_2 の向きは B_1 と同じ向きに調節しておく。補題 3.2 より e_2 とは異なるラベル B_2 辺 d_2 が ∂R 上に存在する。このとき $\partial X'$ 上にラベル B_2 辺が存在するが、ラベル B_2 辺は高々 3 個なので $\partial X'$ 上の辺は自己隣接辺である。よって ∂X 上で見た e_2 と d_2 のラベルの方向は逆になっている。また X' では対隣接辺が連続しているので、 ∂X 上で見た辺の順序は $e_1, e_2, \dots, d_2, \dots, d_1$ となっている。また e_2 と d_2 が隣接していることはない。同様に e_3, d_3 を選ぶことができる。この操作は無限に続けられるが、これは矛盾。よって R 内の面 Y で $Y' = \tau(Y) \subset R'$ となるものが存在する。

次に $X' \subset R$ の場合を考える。補題の様な面 Y が存在しないとすると、 $R_1 = \overline{R \cup X}$ とおくと R_1 内の任意の面はその貼り合う面を R_1 内に持つ。 ∂R_1 上の辺 e_1, d_1 について前と同様の議論を行うと同じ様に矛盾が生じる。よって補題は成立する。 ■

補題 3.4 G のループ p 個で囲まれた領域 R が境界の外側を自己隣接辺をもつ面 X_1, \dots, X_p に囲まれているとする。 $X'_i = \tau(X_i)$ ($i = 1, \dots, p$), $R' = S - (\overline{R \cup X_1 \cup \dots \cup X_p})$ とする。このとき次のいずれかが成立する。

- (1) $\exists X'_i ; X'_i \subset R$,
- (2) $\exists X'_i ; X'_i$ は自己対隣接している,
- (3) $\exists X'_i, X'_j$ ($i \neq j$); X'_i と X'_j は隣接している,

(4) R 内の面 Y でその貼り合う面 Y' が R' 内に存在するものがある,

証明 (1) および (4) が起こってないとすると, R 内の面は R 内の面どうして貼り付いている。補題 3.2 より必ず同じラベルをもつ境界の辺が 2 つは存在する。同じ境界上にその辺があった場合は (2), 異なる境界に辺があったときは (3) が起こる。■

命題 3.1 の証明: 1-gon も good 1-bridge も存在しなければ自己隣接面が無限に存在することを示す。

自己隣接面が存在するのでそれを X_1 とおき, 貼り合う相手を X'_1 とする。 $S - X_1 = R \cup R'$ とするとき (X_1 に 2 つ以上自己隣接辺があると 3 つ以上の component に分かれるが, この様な面は多いほど議論が楽なので 2 つの場合で考えるか, あるいは R' が連結でないと考えればよい), 補題 3.3 により $Y \subset R, Y' \subset R'$ となる面が存在する。1-gon は存在しないので Y は 2-gon 以上である。 Y, Y' が共に自己隣接しないとき, X_1 内に good 1-bridge が存在するのでどちらかは自己隣接面である。自己隣接面の方を X_2 , 自己隣接面ではないかもしれない方を X'_2 とする。

$S - (X_1 \cup X_2) = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ とする。 R_i の中には X'_1 および X'_2 を含まない領域が少なくとも 1 つ存在する。それを R とする。最初に R が円板領域のときを考える。 ∂R に隣接する面を X_1 と仮定する。補題 3.3 より面 $Y \subset R$ で $Y' = \tau(Y) \not\subset \overline{R \cup X_1}$ となる面が存在する。 Y および $\tau(Y)$ が自己隣接しなければ X_1 内に good 1-bridge が存在するので, どちらかは自己隣接面である。新たな自己隣接面を X_3 , 自己隣接でないかもしれない面を X'_3 とおく。

円板領域でないときは, R に補題 3.4 を適用する。(1) は起こらない。(4) が起こったとすると, 前の議論と同様に新たな自己隣接面が存在するので, X_3, X'_3 を同様に定義する。

(3) が起こったとすると, X'_1 と X'_2 は同じ領域に属している。このときは円板領域で X'_1 および X'_2 を含まない領域が存在する。

(2) が起こったときは $Y_1 = X'_1$ とおく。 $S - (X_1 \cup X_2 \cup Y_1) = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ とおき, これに対し同様の議論を行うことにより新たな自己隣接面 X_3 が存在することが分かる。

自己隣接面 X_1, X_2, \dots, X_n まで見つけたとすると, Y_1, \dots, Y_m を X'_i の中で自己隣接面であるものとする ($m = 0$ の場合もある)。 $S - (X_1 \cup \dots \cup X_n \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_m) = R_1 \cup \dots \cup R_{n+m+1}$ とする。 R_i の中には X'_i ($i = 1, \dots, n$) を含まない領域が存在する。これを R とおく。 R が円板領域なら $Y \subset R, Y' \subset R'$ となる面が存在する。 Y, Y' が共に自己隣接しないとき, good 1-bridge が存在するのでどちらかは自己隣接面である。自己隣接面の方を X_{n+1} , 自己隣接面ではないかもしれない方を X'_{n+1} とする。

R が円板領域でない場合は補題 3.4 を適用する。(1) は起こらないし, (4) が起これば新たな自己隣接面が存在する。

X'_i が自己隣接している場合, ある j について $Y_j = X'_i$ となっているので (2) は起きない。

(3) が起こったとすると R 以外に X'_i ($i = 1, \dots, n$) を含まない領域 $R_{(1)}$ が存在する。この領域に補題 3.4 を適用する。(3) が起こったとすると, この操作を繰り返す。無限には続かないのである k に対し $R_{(k)}$ が円板領域になる。いずれにしても新たな自己隣接面が存在する。これを X_{n+1} とおく。この操作は無限に続けられるので矛盾。よって命題が成立する。■

命題 3.1 より, 自己隣接が存在すれば D_1 -変形または C_1 -変形が実行可能なので, 自己隣接を消し複雑度を下げることができる。

4. C-変形

次が C-変形の定義である。

定義 4.1 generalized DS-diagram Σ, Σ' に対し, generalized DS-diagram $\Sigma_i (i = 0, \dots, k)$ と変形 $\Sigma_{i-1} \Rightarrow \Sigma_i$ が存在して次を満たすとき, この変形の有限列を C-変形 (C-deformation) と呼ぶ。

- (1) $\Sigma \cong \Sigma_0, \Sigma' \cong \Sigma_k$,
- (2) 各変形 $\Sigma_{i-1} \Rightarrow \Sigma_i$ は G-変形または D_1 -変形, C_n -変形 ($n \geq 1$) である。勿論 n は i 毎に異なってよい。

generalized DS-diagram Σ が C-可約 (C-reducible) であるとは C-変形 $\Sigma \implies \Sigma'$ が存在することをいう。C-可約でないとき C-既約 (C-irreducible) であるという。

Σ と Σ' に対し, $\Sigma_i (i = 0, \dots, k)$ と変形 $\Sigma_{i-1} \Rightarrow \Sigma_i$ が存在して次を満たすとき, Σ と Σ' は B-同値 (B-equivalent) であるという。

- (1) $\Sigma_0 \cong \Sigma, \Sigma_k \cong \Sigma'$,
- (2) 各変形 $\Sigma_{i-1} \Rightarrow \Sigma_i$ は B_n -変形 ($n \geq 1$) である。

DS-diagram でない generalized DS-diagram のほとんどは C-既約ではない。即ち次が成立する。

命題 4.2 Σ が generalized DS-diagram であり, DS-diagram でないとする。このとき次のいずれかが起こる。

- (1) $\Sigma \cong \Sigma(0, 1), \Sigma(1, 0), \Sigma(2, 1), \Sigma(3, 1)$,
- (2) Σ に 1-bridge が存在する。
- (3) Σ は G-move 可能である。

証明 generalized DS-diagram が DS-diagram でないのは, (1) 頂点が存在しない, (2) 面が open 2-disk でない, (3) 球面数が 2 以上, のどれかが成立しているときである。頂点が存在しないときは (1) が起こる。面が open 2-disk でないのは, 分離不可能を仮定しているので, $\Sigma(0, 1), \Sigma(1, 0), \Sigma(2, 1)$ のいずれかである。球面数が 2 以上である場合は 1-bridge が存在しなければ, 任意の面に関し \bar{X} は 2-disk なので G-move 可能である。■

$\Sigma(0, 1), \Sigma(1, 0), \Sigma(2, 1), \Sigma(3, 1)$ を例外形と呼ぶことにしよう。命題 4.2 を言い換えると「例外形を除く DS-diagram でない generalized DS-diagram は C-可約である」となる。

5. 2-bridge

命題 5.1 C-既約な Σ に 2-bridge が存在すれば次のいずれかである。

- (1) $\Sigma \cong \Sigma(4, 1)$ 。
- (2) 2-bridge は図 5.1 の様である。

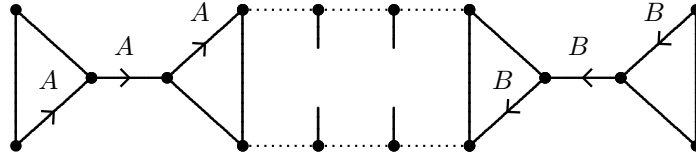


図 5.1

証明 2-bridge を ℓ とし, ℓ の足を e, d とする。1-bridge が存在すれば C -既約ではないので 1-bridge は存在しない。 ℓ により定まる 2-region の中に ℓ とは本質的に異なる 2-bridge が存在する場合もある。 ℓ としてこのような意味で最小のものをとる。 $e = d$ なら Σ は分離可能になるので $e \neq d$ である。 e と d が隣接している場合 1-bridge が存在するので, e と d は隣接していない。 e のラベルを A , d のラベルを B とする。 $|A| = |B|$ のときは図 5.2 の様になっている。このとき Z は 3-point 以上なので ℓ は good 2-bridge である。よって $|A| \neq |B|$ とする。

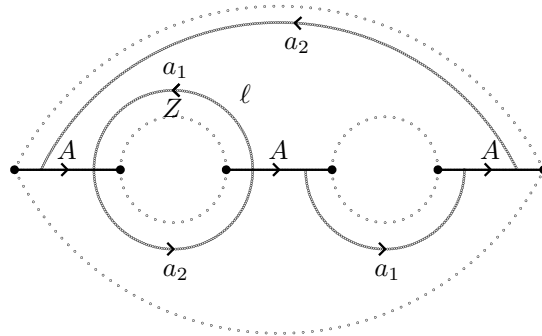


図 5.2

ℓ が乗っている面を X および Y とする。最初に $\tau(X) \neq Y$ のときを考える (図 5.3 左参照)。このとき ℓ は 2-point である。 ℓ は X を 2 つの region に分ける。これを X_1, X_2 とする。 X_1 および X_2 は変形後の Σ' で 3-point 以上である。 X_1 または X_2 は ℓ で分離されるので, ℓ は good 2-bridge である。

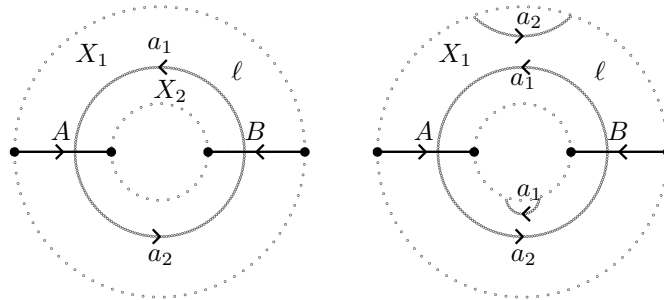


図 5.3

次に $Y = \tau(X)$ であって ℓ が 2-point の場合を考える。 X にラベル A 辺が 2 つ存在するので 図 5.3 右のようになっている。 図の X_1 は 3-point 以上であって、 ℓ は good である。

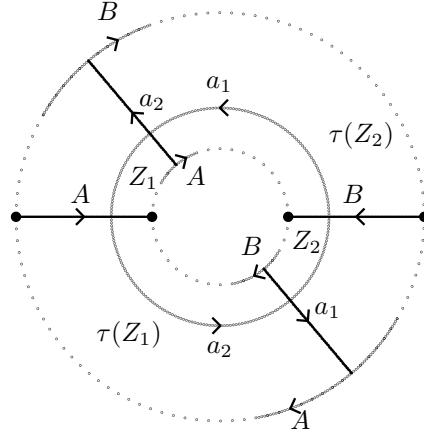


図 5.4

最後に 2-bridge ℓ が 3-point である場合を考えると 図 5.4 のようになっている。 2 つのラベル A 辺が接続していなければ、 Z_1 は 4-point 以上になるので、隣接しているとする。 同様に 2 つのラベル B 辺も隣接していて、ラベル A 辺およびラベル B 辺は退化辺である。ラベル A 辺とラベル B 辺が隣接しているとき $\Sigma \cong \Sigma(4, 1)$ となる。この場合を除くと隣接していない。ラベル B 辺を境界に 1 つ持つ Σ の面を W とする。 W が 3-gon でなければ、 W は変形後の Σ' においては 4-point 以上になり、 ℓ は good になる。よって W は 3-gon である。 B に関しても同様なので 図 5.1 のようになっている。 ■

非退化 2-gon が命題 5.1 の (2) になることはないし、 $\Sigma(4, 1)$ は非退化 2-gon を持たないので次が成立する。

系 5.2 generalized DS-diagram が非退化 2-gon を含めば C -可約である。

定義 5.3 系 5.2 の様に非退化 2-gon を消す特別なタイプの C_2 -変形を D_2 -変形 (D_2 -move) と呼ぶ。

注意 5.4 2 重対隣接が起こると 2-bridge が発生する。よって 2 重対隣接辺のどちらかが退化辺でなければ reducible である。

最初に generalized DS-diagram Σ は non-separable を仮定したが、変形によって separable になる場合もある。例えば同じラベルの辺を 3 つもつ面が存在したとき (証明中の $|A| = |B|$ の場合)、 2-point 2-bridge が存在する。このとき命題 5.1 の操作を実行すると、separable な generalized DS-diagram Σ' になるが

$$M(\Sigma') \cong M(\Sigma(3, 1)) \# M(\Sigma_1)$$

となるので Σ_1 に関して考察すればよい。

6. 3-bridge

命題 6.1 C -既約な generalized DS-diagram Σ に 3-bridge が存在すれば、 2-bridge が存在するか、 3-bridge は 図 6.1 のようになっている。ただし図において α または β は 1 つの辺である。

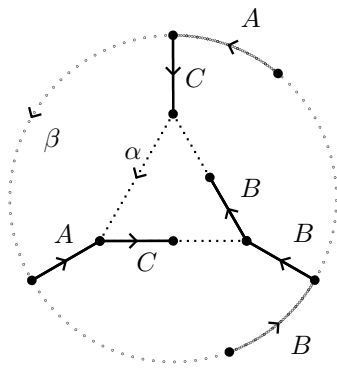


図 6.1

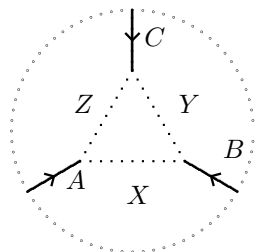


図 6.2

証明 自己隣接面が存在すると 1-bridge が存在するので Σ に自己隣接面はないとしてよい。3-bridge を l とし, l の足を e_1, e_2, e_3 とし, そのラベルを A, B, C とする。 $e_i = e_j$ ($i \neq j$) となる辺が存在するとき 1-gon の一部になっている。よって $e_i \neq e_j$ とする。 $i \neq j$ に対し e_i と e_j が隣接しているとき 2-bridge の一部になっている。よって e_i と e_j は隣接していないとする。 l がのっている面を X, Y, Z とすると図 6.2 の様になっている。

最初に X, Y, Z がお互いに貼り合わないときを考える。 X は l により 2 つの成分に分けられるがこれを X_1, X_2 とする。 $\tau(X_1)$ が l の内側にあれば $\tau(X_2)$ も l の内側にある。よって X_1 または X_2 は l を分離する。 X_1 および X_2 が 4-point 以上ならば l は good である。 X_1 または X_2 は 3-point であるとする。

このときラベル A 辺の終点とラベル B 辺の終点は同じラベルをもつか, A 辺の始点とラベル B 辺の始点が同じラベルをもつ。 Y, Z についても同様である。よって e_1, e_2, e_3 の終点または始点の中に同じラベルをもつ組が 2 組はある。よって e_1, e_2, e_3 終点または終点は同じラベルをもつ。

今終点が同じラベルをもつとする。このとき図 6.2 の内部の「3 辺形」(辺上の頂点が存在する場合はもっと辺数が多い) の 3 つの「頂点」は同じラベルをもつ。また辺上に他に頂点があった場合もこれらと同じラベルでなくてはならない。このとき「3 辺形」上の辺は退化辺になる退化辺が 3 辺形または 4 辺形をなすので矛盾。この場合は good である。

次に X, Y, Z の中に貼り合うものがあるときを考える。 $Y = \tau(X)$ とする。ラベル A, B, C の中に同じラベルがあるとする。このとき $|A| = |B|$ である。 $A = B$ なら 1-bridge が存在するので $B = A^{-1}$ である。

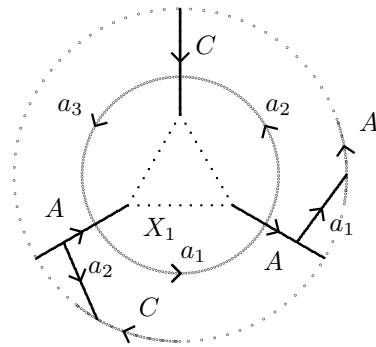


図 6.3

必要なら内部と外部を入れ替えることにより, 図 6.3 の様になっているとしてよい。ラベル A 辺の始点と終点と同じラベルをもてば, ラベル A 辺は退化辺になるがこれは矛盾。このとき図の面 X_1 は ℓ により分離され 4-gon 以上なので ℓ は good である。

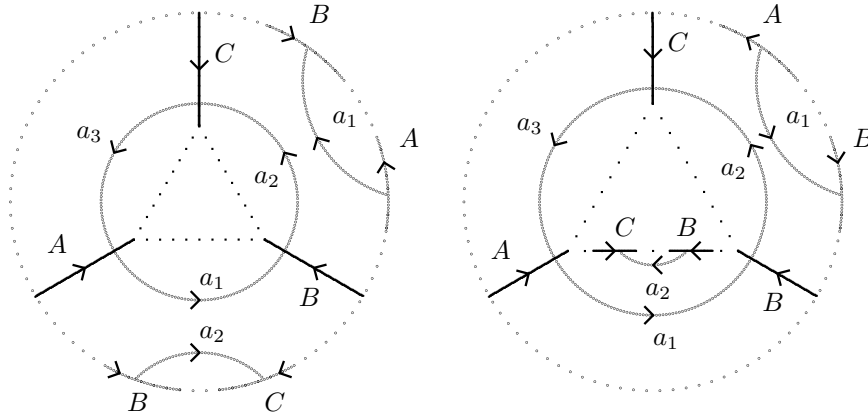


図 6.4

ラベル A, B, C は逆も含め異なっているとす。 ℓ が 3-point のときは必要なら内部と外部を入れ替えることにより, 図 6.4 の様になっているとしてよい。このときいずれの場合も 4-point 以上で ℓ により分離される面が存在するので, ℓ は good である。

ℓ が 4-point のときは必要なら内部と外部を入れ替えることにより, 図 6.5 の様になっているとしてよい。 ℓ を分離する面 W で, 5-point 以上であるものが存在すれば good である。

ラベル A 辺とラベル C 辺が隣接していない場合 W_2 は ℓ により分離される 5-gon 以上の面である。これが 4-point であるためには A の終点と C の始点と同じで, ラベル A 辺とラベル C 辺の間に頂点がないことが必要である。このときラベル A 辺とラベル C 辺をつなぐ辺が退化辺になるが, これは矛盾。よってラベル A 辺とラベル C 辺は隣接している。

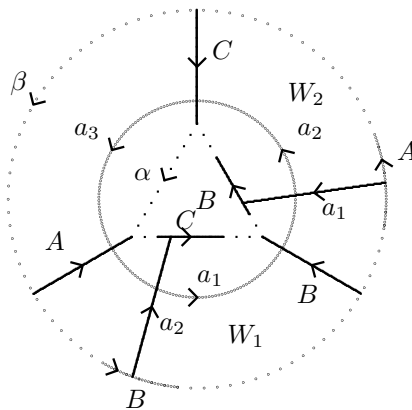


図 6.5

ラベル B 辺同士が接続していないとする。このとき図 6.5 の面 W_1 は ℓ によって分離される 5-gon 以上の面である。ラベル B 辺の間に頂点があれば 5-point 以上になるからラベル B 辺が退化辺と接

続するので、間に頂点はなく 4-point であるとしてよい。このとき ℓ で S -move を行い W_1 に沿って G -move を行うと、 B_5 -変形なので頂点数は変化しないが非退化 3-gon が発生する。この周りで C_3 -変形が実行可能なのでこの場合 C -可約である。よってラベル B 辺は接続している退化辺とする。

$Z-\ell$ の 2 つの成分に分かれるが、どちらかは ℓ により分離される。今内側が分離されるとする。

ラベル A 辺の終点とラベル C 辺の終点が $f(S)$ で同じ点なら、ラベル C 辺は退化辺になり矛盾。よって分離面は少なくとも 4-point である。 α 上にラベル A 辺およびラベル C 辺の終点と $f(S)$ 上で異なる頂点があれば 5-point になるので、頂点が存在しないか、同じ頂点ラベルである。同じ頂点ラベルのときは 1-gon が存在する。以上によりこの場合は図 6.1 が起こることが分かる。■

系 6.2 generalized DS-diagram が非退化 3-gon を含めば C -可約である。

定義 6.3 系 6.2 の様に非退化 3-gon を消す特別なタイプの C_3 -変形を D_3 -変形 (D_3 -move) と呼ぶ。

7. 隣接 4 辺形

3-bridge と同様に 4-bridge についても若干の議論はできるが、good であるための見やすい条件はなかなか見つからない。そこで 4-bridge の typical な場合として 4-gon が隣接してできる図形について考える。

命題 7.1 C -既約な Σ に隣接する 4-gon が存在するとき次のいずれかである。

- (1) $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4n}), \Sigma(4n, 2n-1), \Sigma(2n+5, 2)$
- (2) 図 7.1 の②～⑥のタイプの 4-region が存在する。
- (3) 図 7.2 のⒶ また Ⓑ のタイプの 4-region が存在する。

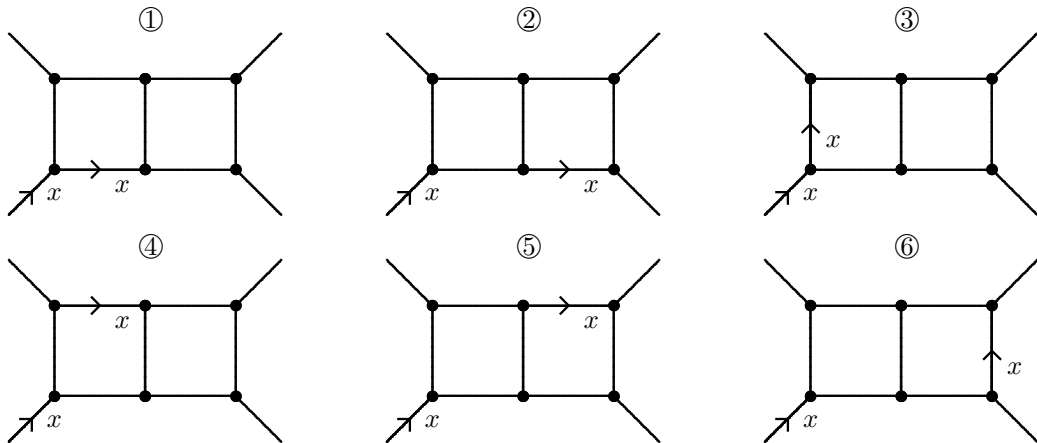


図 7.1

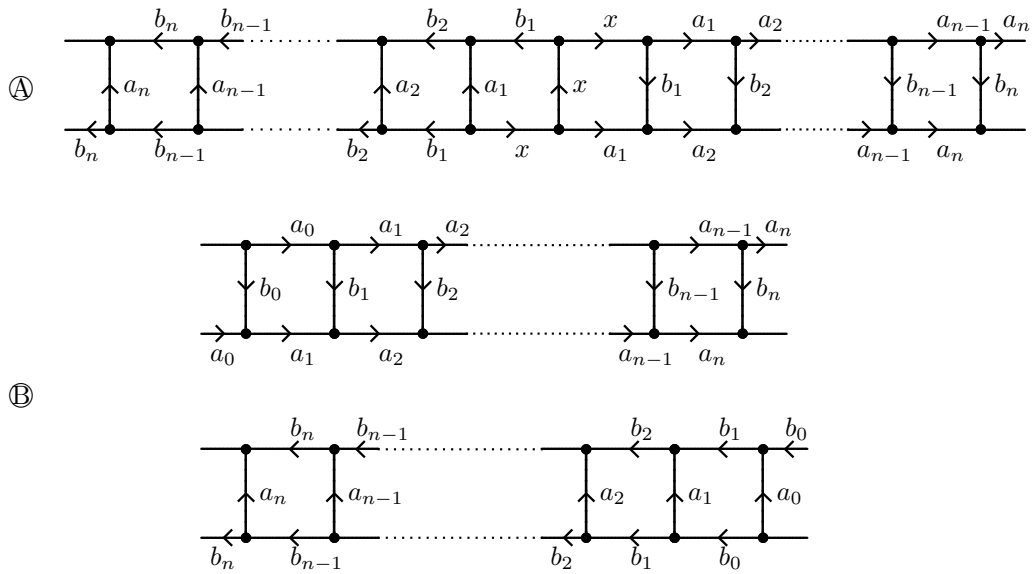


図 7.2

以下いくつかの補題を証明しながら命題 7.1 の証明をする。図 7.3 の様に 4-gon が横に m 個隣接した図形を D_m と呼ぶ。ここで $m \geq 2$ である。 D_m において右側と左側が隣接した図形を E_m と呼ぶ。また 4-gon 4 個で「2-bridge」をつくる図形を R_2 , 4-gon 3 個で「3-bridge」をつくる図形を R_3 とする。4-gon が隣接してできる図形は以上すべてである。 R_2 にはその一部として R_3 が存在する。 E_4 にはその一部として R_2 が存在する。 E_4 の一部である R_2 は 2-bridge ではないし, E_4 の一部である R_3 は 3-bridge ではない。よって 4-gon が隣接してできる図形として極大である図形を考えることにする。

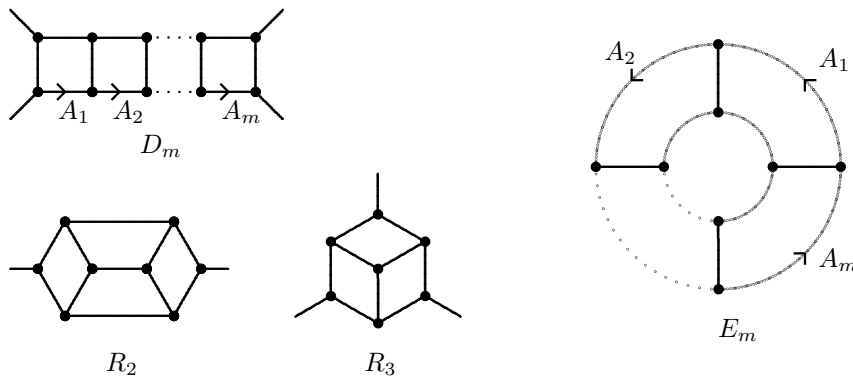


図 7.3

R_2 が極大であれば R_2 の周りに 2-bridge が存在する。命題 5.1 よりこの 2-bridge は good である。 R_3 が極大であれば R_3 の周りに 3-bridge が存在する。命題 6.1 よりこの 3-bridge は good である。補題の形で書いておこう。

補題 7.2 generalized DS-diagram が極大な R_2 または R_3 を含めば C -可約である。

4-gon の対隣接に関して次が成立した ([3])。

補題 7.3 4-gon が対隣接するとき, C -既約であれば退化 4-gon である。

最初に E_m を含むときを考える。このときは次が成立する。

補題 7.4 C -既約な generalized DS-diagram Σ が E_m ($m \geq 2$) を含むとき, $m = 2n$ となる自然数が存在して次のいずれかがである。

- (1) $\Sigma \cong \Sigma(4n, 2n - 1)$ 。
- (2) $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4n})$ ($n \geq 2$)。

証明 E_m を含むので Σ は例外形ではない。 Σ が DS-diagram でなければ C -可約なので, Σ を DS-diagram とする。このとき m は偶数なので, $m = 2n$ とおく。 m 辺形の辺でない辺を内部の辺と呼ぶ。 $m = 4$ のときは適当な面のペアを m 辺形と指定して考える。 E_m の辺の中に退化辺が存在するときそのラベルを A とする。 1-gon が存在すれば C -可約なので, ラベル A 辺は 3 辺が接続しているとしてよい。真ん中の辺を e とすると e は内部の辺である ($m = 4$ のときはそうなる様に m 辺形を指定する)。この両側の 4-gon が貼り合わされる。 E_m の形より退化辺の両側から順に同一視が決定されていく。このとき $\Sigma \cong \Sigma(4n, 2n - 1)$ となる。よって E_m に退化辺は存在しないとす。

$m = 2$ のときは退化辺が存在するので $m \geq 4$ とする。補題 7.4 より 4-gon は対隣接しないとしてよい。よって $m = 4$ の場合も含めて m 辺形同士は貼り合っている。

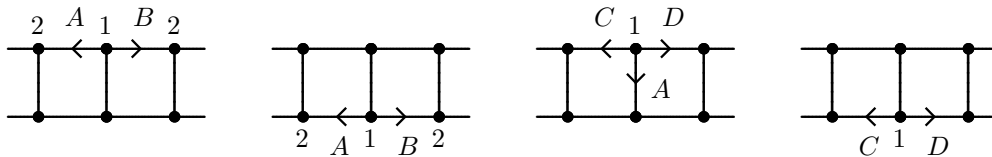


図 7.4

$f(G)$ に 2 重辺が存在するときを考える。この辺のラベルを A, B とする。ラベル A 辺 e_1 とラベル B 辺 e_2 が隣接している外部の辺であるとし, e_1 と e_2 の共通頂点のラベルを 1 とする。向きを調節して 1 は A および B の始点であるとする。また A, B の終点を 2 とする。1 を始点にする他の $f(G)$ の辺を C, D とする。

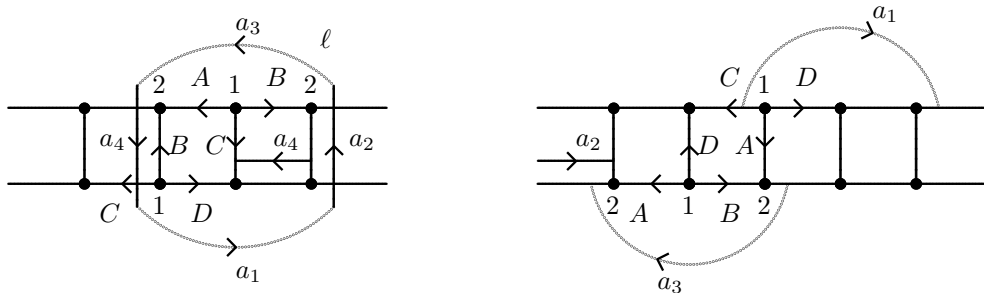


図 7.5

必要なら上下の交換により図 7.4 の様に、ラベル A 辺を下向きとしても一般性を失わない。このとき図 7.5 の様になっている。 ℓ を図の様に選ぶと good でないのは C または D の終点が 2 のときで、このとき $m = 4$ で $\Sigma \cong \Sigma(Q_8)$ となる。それ以外は C -既約でない。

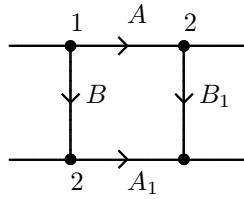


図 7.6

よってラベル A 辺とラベル B 辺の一方は内部の辺であるとしてよい。この辺を図 7.6 のラベル A_1 辺およびラベル B_1 辺とする。このとき A_1, B_1 も $f(G)$ の 2 重辺になる。ラベル A_1 およびラベル B_1 辺で始点が隣接している部分が存在する。その部分の 4-gon に同じ議論を適用すると更なる 2 重辺の存在が分かる。よってすべて 2 重辺であることが分かる。このときは [5] の命題 4.2 より $\Sigma \cong \Sigma(Q_{4m})$ になる。

最後に退化辺も 2 重辺も存在しない場合を考える。このとき good な 4-bridge が存在することを示す。

上の面と下の面が貼り付けられるので上のラベル A 辺と下のラベル A 辺の「ズレ」を見る。右にズレているとも左にズレているとも見なせるが小さい方を採用する。必要なら上下を入れ替えることにより、上の辺が右にズレているとしても一般性を失わない。ズレが 1 つのときは 2 重辺をもつので起こらない。

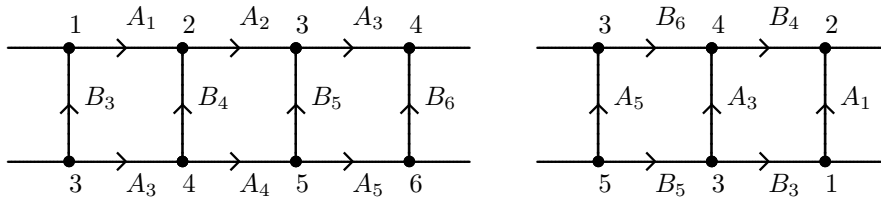


図 7.7

ズレが 2 つのときは図 7.7 左の様になっている。左図にでてこないラベル A_3 辺のまわりは図 7.7 右の様になっている。この部分も 2 個ズレているので、 $2 = 5$ または $1 = 3$ (左図の上下が逆の場合) である。このとき 2 重辺か退化辺が存在するので矛盾。

ズレ m が 3 以上のときを考える。ここで $m \leq n + 1$ である。 ℓ を図 7.8 の様にとると ℓ は 4-point-4-bridge である。図の様に W をとる。退化辺はないので $1 \neq 2$ かつ $2 \neq 3$ である。 $1 = 3$ なら 2 重辺が発生する。少なくとも 3 点は異なるので W は Σ' の中で 5-point 以上である。よって ℓ は good である。■

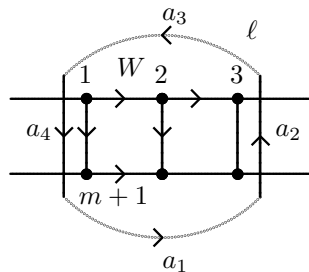


図 7.8

E_m については分かったので次に D_m について考える。

補題 7.5 C -既約な generalized DS-diagram Σ に対し G が D_m ($m \geq 2$) を含み極大であるとき次のいずれかが起こる。

- (1) $m = 2n$ で $\Sigma \cong \Sigma(2n + 5, 2)$, このとき D_m の周りは 4-region ではない。
- (2) D_m ($m \geq 2$) の周りは 4-region である。

証明 前と同様に Σ は DS-diagram としてよい D_m の外側に 3 点以上存在すれば 4-region である。2 点しかないときは 4-gon の個数は偶数なので $m = 2n$ とする。このとき G は $\Sigma(Q_{4n+4})$ または $\Sigma(4n + 4, 2n + 1)$, $\Sigma(2n + 5, 2)$ のグラフと同型になる。前 2 者の場合 G は E_{m+1} でなので後者である。

「長い」辺 (D_m のどの辺とも隣接しない辺) が退化辺ならそれに隣接する辺から順に identity が決まっていき, $\Sigma(2n + 5, 2)$ であることが分かる。退化辺でない「長い」辺のラベルを A とする。 $m + 3$ 辺形は自己隣接するのでラベル A 辺が D_m 上に 2 つ存在する。図 7.9 の様になっているとしてよい。3 辺形は 2 つしか存在しないので同一視されるが, 同一視のときラベルは $A_1 = A_k^{-1}$ または $A_1 = B_k, B_1 = A_k$ である。 $A_1 = A_k^{-1}$ の場合ラベル A 辺は退化辺になる。 $A_1 = B_k$ のとき隣接する辺のラベルが $A_k A_k^{-1}$ となる部分が存在する。 $B_1 = A_k$ のとき隣接する辺のラベルが $B_k B_k^{-1}$ となる部分が存在する。いずれの場合も矛盾。■

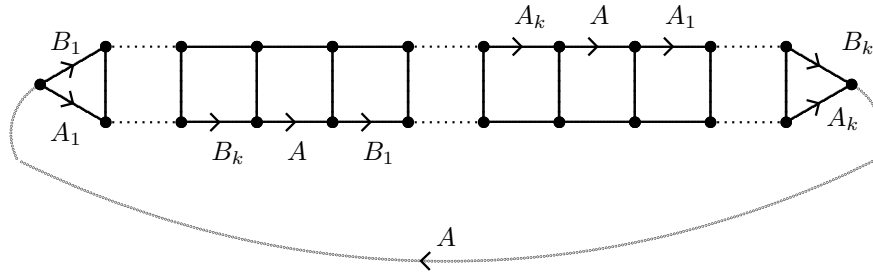


図 7.9

よって以下 4-region である D_m について考察する。 D_m の上の面または下の面が 4-gon のとき R_3 になるので, 上の面および下の面は 4-gon でないと仮定する。最初に D_2 について考察する。

補題 7.6 C -既約な generalized DS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ が極大な D_2 を含むとき図 7.1 の②~⑥のタイプの 4-region が存在する。

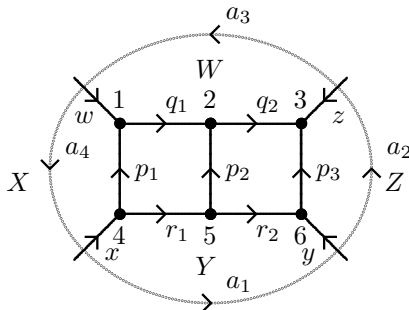


図 7.10

証明 隣接する 4-gon の周りが図 7.10 の様であるとする。ただし, $x, y, z, w, p_i, q_j, r_j$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) は辺のラベル, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ は頂点のラベル, X, Y, Z, W は面とする。 ℓ を図のような 4-bridge とし, a_1, \dots, a_4 をそのラベルとする。

x, y, z, w の中に p_i, q_j, r_j と (絶対値をこめて) 同じラベルがないとき ℓ は 4-point である。 ℓ によって切り取られる面が ℓ によって分離されないときは 1-gon が存在するので, ℓ によって分離される。よってラベル $1, 2, 3$ が異なれば ℓ は good になる。 $1 = 2$ とすると q_1 は退化辺である。 w が退化辺なら $w = q_1$ となる

ので w は退化辺ではない。 q_2 が退化辺なら W が 4-gon になるので退化辺は p_2 および r_2 である。このときは④の case である。よって $1 \neq 2$ である。同様に $2 \neq 3$ が分かる。

$1 = 3$ とするとラベル 1 頂点をもつ辺 w, z, q_1, q_2, p_1, p_3 が存在する。隣接する辺は (向きをこめて) 同じ辺ではないし, w, z は他と異なるので残りの辺は $q_1 = p_3^{-1}$ かつ $q_2 = p_1$ となる。このとき D_2 を構成する 2 つの 4-gon は対隣接するので補題 7.2 より C -可約になる。以上によりラベル 1, 2, 3 は異なる。よって ℓ が W から切り取る 5-gon は 5-point であり, よって ℓ は good である。

D_2 の足の中に辺と同じラベルをもつものがあつたとする。このラベルを x としても一般性を失わない。

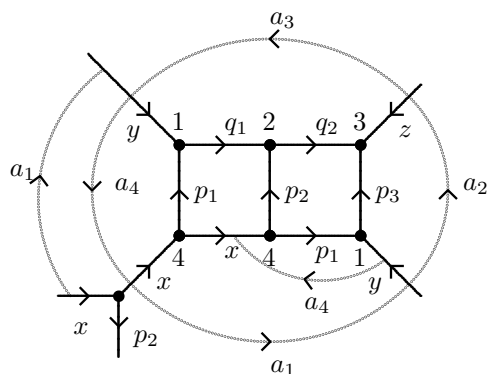


図 7.11

①の case では図 7.11 の様になっている。このとき ℓ は 4-point-4-bridge であることを示す。4-point でなければ $|y|$ または $|z|$ が 4-gon の辺 (の絶対値) と同じになる。 $|y| = |p_1|$ または $|y| = |p_3|, |y| = |q_2|$ のときラベル y 辺は退化辺になるが, 退化辺が離れて存在することはないので, これは起きない。 $|y| = |q_2|$ のときは 1-bridge が発生するので C -既約ではない。 $|z| = |q_2|$ のとき $z = q_2^{-1}$ で z は退化辺となる。 4-bridge を構成する右の 4-gon と貼り合う 4-gon と左の 4-gon と貼り合う 4-gon が連続する

2 辺で隣接するので矛盾。 $|z| = |p_3|$ のとき $z = p_3^{-1}$ であり, $q_1 = y^{-1}$ となり y は退化辺になるが, 退化辺が離れて存在するの矛盾。最後に $|z| = |q_1|$ のときを考える。 $z = q_1$ なら 1-bridge が存在するので $z = q_1^{-1}$ であるが, のとき $p_3 = y$ となり y が退化辺になる。以上により 4-point であることが分かった。

頂点のラベル 1, 2, 3 がすべて異なれば W から切り取られる面は 5-point なので ℓ は good である。 $1 = 2$ のとき q_1 は退化辺である。 y は退化辺になれないので $q_2 = q_1$ または $p_2 = q_1^{-1}$ である。 $q_2 = q_1$ のとき $p_3 = q_1^{-1}$ となり W が 4-gon になる。 $p_2 = q_1^{-1}$ のとき $p_1 = q_1$ となり $x = y$ となり矛盾。

$2 = 3$ のとき q_2 は退化辺である。 $z = q_2^{-1}$ のときは前と同様に矛盾が発生する。 $q_1 = q_2$ のとき W は 4-gon にな。 $p_3 = q_2^{-1}$ のときも同様。 $p_3 = q_2^{-1}$ のときは $x = z^{-1}$ となり矛盾。 $1 = 3$ のとき前の議論と同様に C -可約になる。

$x = q_1^{-1}$ のときラベル w 辺にとっての③になる。 $x = q_2^{-1}$ のときはラベル w の両側が同一視されるので矛盾。 $x = p_3^{-1}$ のときはラベル y 辺にとっての②である。 $x = r_1^{-1}$ および $x = r_2^{-1}$ のときは 1-bridge が存在するので C -可約である。

これ以外は②~⑥になる。このときは 5-point になるので good ではない。尚②~⑥の場合 6-point になると④と⑥が同時に起こっている場合を除いて 1-bridge が存在するか極大でない。 ■

補題 7.7 C -既約な Σ に極大な 4-bridge D_m ($m \geq 3$) が存在すれば図 7.3 の④ また⑤のいずれかである。④ または⑤は $n = 2$ のタイプとしては④である。

証明 極大なので上下の面は 4-gon でない。最初に上下の面が 1 つズレて貼りあわされている場合を考える。図 7.13 でいうと $q_1 = x$ の場合を考える。

D_m が退化辺を含む場合はその両側の 4-gon が貼りあわされる。 $m \geq 3$ なのでそれ以外に隣接する 4-gon が存在するが、退化辺を含む 4-gon に隣接する 4-gon 同士が貼りあわされる。 4-gon が存在する限りこの操作は可能なので、この場合㉠が起こる。



図 7.12

D_m が退化辺を含まない場合補題 7.3 より対隣接しない。 4-gon が図 7.12 左の様になっているとする。このときもう 1 つのラベル a_1 辺は 4-gon 2 つの共通辺になっている。即ち図 7.12 右の様になっている。図左に 4-gon が更に隣接していれば図右にも 4-gon が隣接する。この場合㉢が起こる。これ以外はすべて C -可約であることを示す。 $m = 3$ の場合証明すれば十分である。

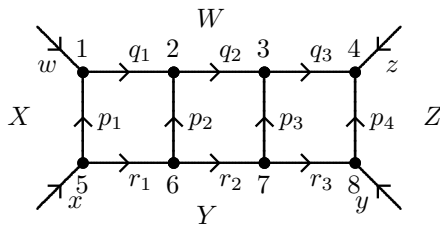


図 7.13

ラベル a がラベル $p_i, q_j, r_j (i = 1, 4, j = 1, 2, 3)$ のどれかと等しいとき a は special であるという。そうでないとき a は general であるという。 x, y, z, w がすべて general であるとき general case と呼ぶ。

4 つのラベル x, y, z, w 辺の中に同じものがあれば、2-gon が存在するか、1-bridge が存在するか、上または下の面が 4-gon になるので、すべては異なっているとしてよい。

D_3 の周りの 4-bridge を ℓ とする。 ℓ が W から切り取る 6-gon を W_1 とする。

general case のとき ℓ は 4-point である。 W_1 は 6-gon であるが 5-point 以上であることが分かれば ℓ は good である。 $1 = 2$ とすると q_1 は退化辺である。 $w \neq q_1$ なので w は退化辺ではない。 q_2 が退化辺なら W が 4-gon になるので、 $q_1 = p_2^{-1} = r_2$ である。このとき $y = q_3$ となるので general case ではない。同様に $2 \neq 3$ および $3 \neq 4$ が成立する。よって W_1 が 4-point 以下なのは $3 = 1, 4 = 2$ の場合のみである。 $q_1 = q_3$ なら W は対隣接するが W は 4-gon でないので矛盾。よって $q_1 \neq q_3$ である。このとき $f(G)$ は 3 重辺になるので D_n にはならない ([3] 補題 3.5 参照)。

よって x, y, z, w のどれかは special である。ここで x が special としても一般性を失わない。

$x = r_1$ のときはすでに $n = 2$ のときに good だったので OK。

$x = r_2$ のとき x 以外に special な辺がなければ ℓ は 4-point である。 $w = y$ なのでラベル y 辺はすでに 2 つ出ている。このとき y は general である。 $z = p_4$ のときは $y = q_3$ となり y は special になる。 $z = q_3^{-1}$ のときは $y = q_1$ となる。 $z = q_1^{-1}$ のときは $y = p_4$ となる。いずれの場合も special である。 $z = q_2^{-1}$ のときラベル z 辺の両側が貼り合わされるので矛盾。よって ℓ は 4-point である。 W_1 が 4-point にならないことは general case と同様に分かる。よって ℓ は good である。

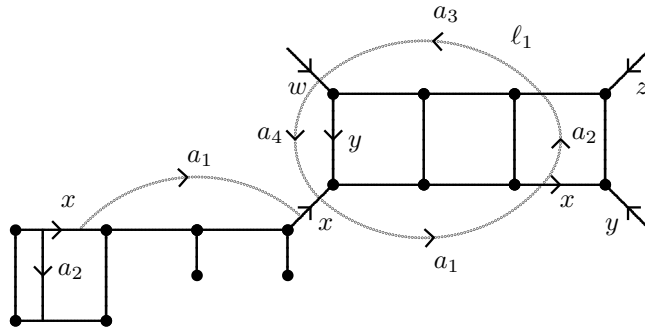


図 7.14

$x = r_3$ のときは図 7.14 の様なループを l_1 とする。 $\tau(X) = Y$ なので W の貼り合う相手は D_3 の周りにはない。よって l_1 は 4-point である。 l_1 が Y から切り取る面を Y_1 とすると general case と同様に Y_1 は 4-point ではないことが分かる。よって l_1 は good である。 $x = r_i^{-1}$ ($i = 2, 3$) のときは $\tau(Y)$ が自己隣接するので C -可約である。

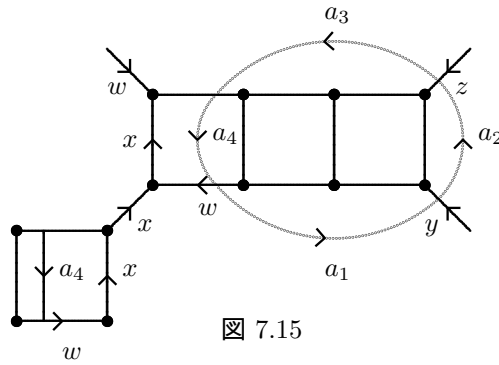


図 7.15

$x = p_1$ のときラベル w 辺はすでに 3 辺出てきているので新たに出てくるラベル w 辺はそのどれかと一致する。ループ l_1 を図 7.15 のループとする。 y, z が general のとき l_1 は 4-point である。このとき l_1 が Y から切り取る面を Y_1 とおくと Y_1 は 5-point なので l_1 は good である。

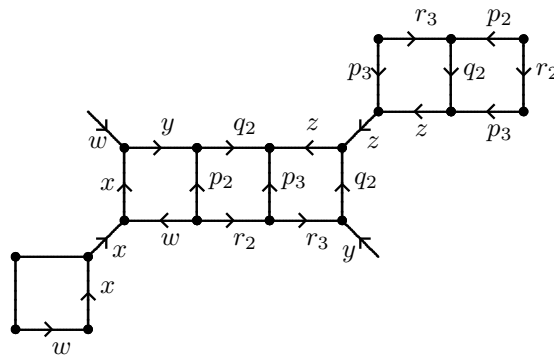


図 7.16

$y = q_1$ のときは図 7.16 の様になり、右上の D_2 の周りには good な 4-region が存在する。 $y = q_2$ のときは右上のラベル z 辺の両側が同一視されるので矛盾。

$y = q_3$ のときは図 7.17 左の様に 2-region が存在するが、命題 5.1 より good である。 $y = p_3$ のときも図 7.17 右の様に good な 2-region が発生する。よって y は general であるとしてよい。 z に関してはすでにでてきているタイプ以外は矛盾が発生するので、 z についても general、よってこの場合は成立する。

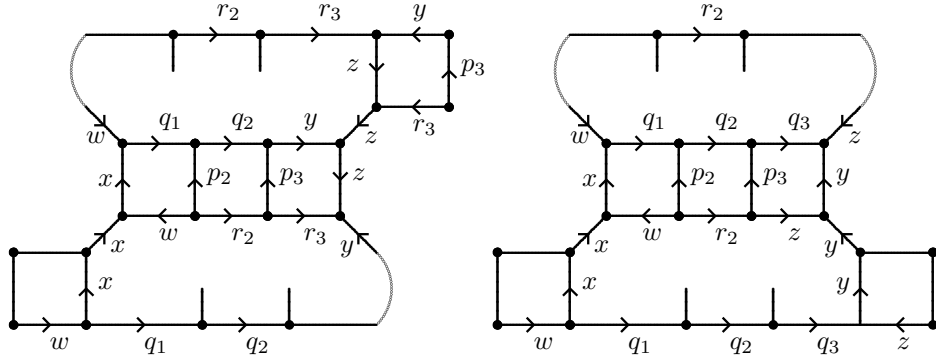


図 7.17

$x = q_2$ のときは図 7.18 上の様になっている。ラベル q_3 辺は 2 つの 4-gon の境界なので図 7.18 下左の様に別の D_2 が存在する。

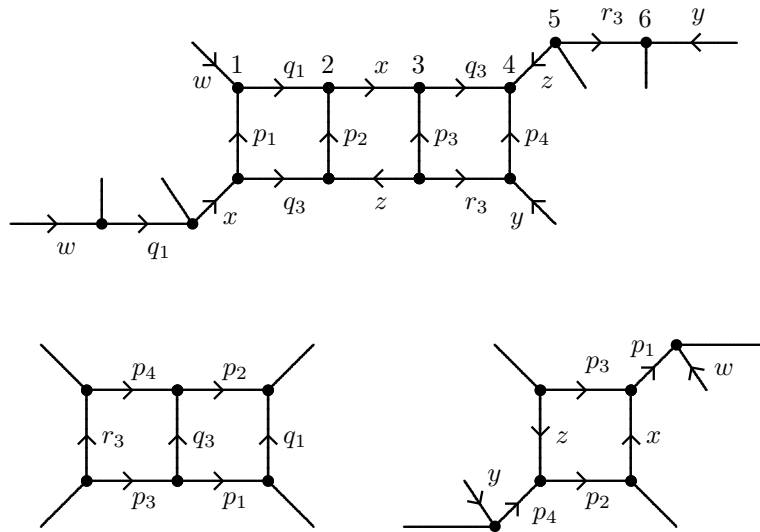


図 7.18

ラベル 1 ~ 6 頂点の中に同じものがあるときを考える。1 = 6 のとき Y および W ($W = \tau(Y)$) は 4-gon になり、2-bridge が存在する。1 = 5 のとき Y は 4-gon になる。他の場合はないのでラベル 1 ~ 6 は異なっている。このとき D_2 は general type になるので C -可約である。

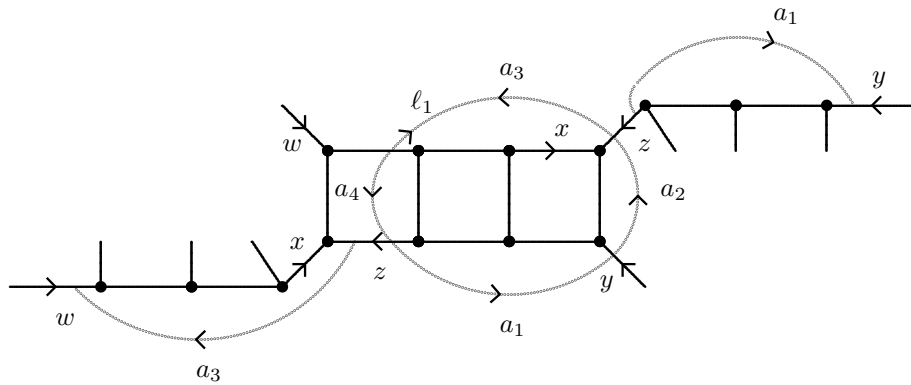


図 7.19

$x = q_3$ のときは図 7.19 の様なループ ℓ_1 をとる。Y が 4-gon のとき 1-bridge が存在する。Y は 5-gon のとき非退化 2-gon が存在する。これ以外に ℓ_1 が 4-point でないのは $y = q_1^{-1}$ の場合であるが、このときラベル y 辺が 4 つ必要になる。このとき ℓ_1 は 4-point であり、 ℓ_1 が W から切り取る面は 5-gon なので ℓ_1 は good である。

$x = q_1^{-1}$ のときは w を x に置き換えるとすでに処理したタイプなので C -可約である。 $x = q_2^{-1}$ はラベル w 辺の両側が同一視される。 $x = q_3^{-1}$ のときは y を x に置き換えるとすでに $m = 2$ で C -可約のタイプである。

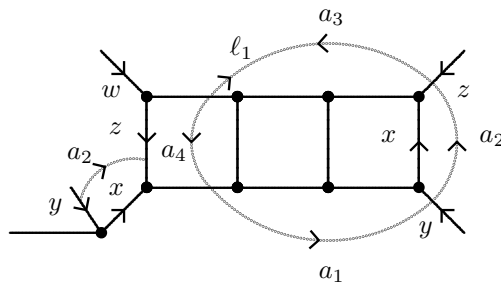


図 7.20

$x = p_4$ のとき図 7.20 のループを ℓ_1 とする。 ℓ_1 が 4-point でないのは $W = \tau(Y)$ のときである。 $x = q_i$ ($i = 1, 2$) のときはすでに処理したタイプになるので C -可約になる。 $y = q_i^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$) のとき y を x に置き換えた場合に、すでに処理したタイプなので C -可約である。 $x = p_4^{-1}$ の場合 y を x に置き換えるとすでに処理したタイプになる。以上ですべての場合をつくした。補題が証明されると同時に命題 7.1 も証明された ■

8. リフト

石井は Heegaard diagram $(H_1, H_2; \vec{D}_1, \vec{D}_2)$ に対し genus の高い Heegaard diagram を対応させることを考えた。ここではその generalized DS-diagram 版を考えよう。

$(H_1, H_2; \vec{D}_1, \vec{D}_2)$ を Heegaard diagram とする。 $i = 1, 2$ に対し球面 S_i^2 と onto な local homeomorphism $f_i : S_i^2 \rightarrow \partial H_i \cup \vec{D}_i$ が存在する。ただし $y \in \partial H_i - \partial \vec{D}_i$ に対しては $\#f_i^{-1}(y) = 1$ であり, $y \in \vec{D}_i$ に対しては $\#f_i^{-1}(y) = 2$ を満たすものとする。 $S = S_1^2 \cup S_2^2$, $G = f_1^{-1}(\partial \vec{D}_1) \cup f_2^{-1}(\partial \vec{D}_2)$, $f = f_1 \cup f_2 : S \rightarrow \partial H_1 \cup \vec{D}_1 \cup \partial H_2 \cup \vec{D}_2$ とおくと $\Sigma = (S, G, f)$ は generalized DS-diagram になる。この generalized DS-diagram を Heegaard diagram $(H_1, H_2; \vec{D}_1, \vec{D}_2)$ により定義される generalized DS-diagram と呼ぶ。

generalized DS-diagram $\Sigma = (S, G, f)$ に対し Heegaard splitting を次の様に対応させる。ただし $f(G)$ は connected とする。 $H_1 = N(f(G); M)$ とする。ただし $N(A; M)$ は A の M における regular neighborhood とする。 $H_2 = M - \text{Int } H_1$ とおくと (H_1, H_2) は Heegaard splitting である。 Σ の各面 X に対し $D(X) = f(X) \cap H_2$ とおき $\vec{D}_2 = \bigcup_X D(X)$ (X はすべての面を動く) とする。

Σ が DS-diagram の場合 \vec{D}_2 は complete meridian disk system になる。 Σ の球面数が 2 以上のとき \vec{D}_2 は過剰な meridian disk の system になる ($H_2 - \vec{D}_2$ が連結でない)。また $f(G)$ の各 edge A に対し A と 1 点で transversal に交わる H_1 の meridian disk を $D(A)$ とおき, $\vec{D}_1 = \bigcup_A D(A)$ (A はすべての辺を動く) とする。

Σ の頂点数が 2 以上のとき \vec{D}_1 は過剰な meridian disk の system になる ($H_1 - \vec{D}_1$ が連結でない)。箱根セミナーではこの \vec{D}_1, \vec{D}_2 の中から Heegaard diagram になる様に選んだものを考えたが, ここでは定義を少し変更して, \vec{D}_1, \vec{D}_2 自身を採用する。この過剰な「Heegaard diagram」から同様に generalized DS-diagram が定義される; S_1, S_2 をそれぞれ何個かの 2-sphere の和集合で次を満たすものとする; $i = 1, 2$ に対し $f_i : S_i \rightarrow H_i \cup \vec{D}_i$ は onto な local homeomorphism で $y \in \partial H_i - \partial \vec{D}_i$ に対しては $\#f_i^{-1}(y) = 1$ であり, $y \in \vec{D}_i$ に対しては $\#f_i^{-1}(y) = 2$ を満たす。このとき $S_L = S_1 \cup S_2$, $G_L = f_1^{-1}(\partial \vec{D}_1) \cup f_2^{-1}(\partial \vec{D}_2)$, $f_L = f_1 \cup f_2 : S \rightarrow \partial H_1 \cup \vec{D}_1 \cup \partial H_2 \cup \vec{D}_2$ とおき $\Sigma_L = (S_L, G_L, f_L)$ と定義すると Σ_L は generalized DS-diagram になる。この Σ_L を Σ のリフト (lift) と呼ぶ。 Σ の頂点数が n であれば Σ_L の頂点数は $6n$ になる。

命題 8.1 Σ を generalized DS-diagram とし Σ' を Σ から elementary deformation of type II で得られる generalized DS-diagram とする。 Σ のリフト Σ_L は Σ にも Σ' にも C -変形可能である。

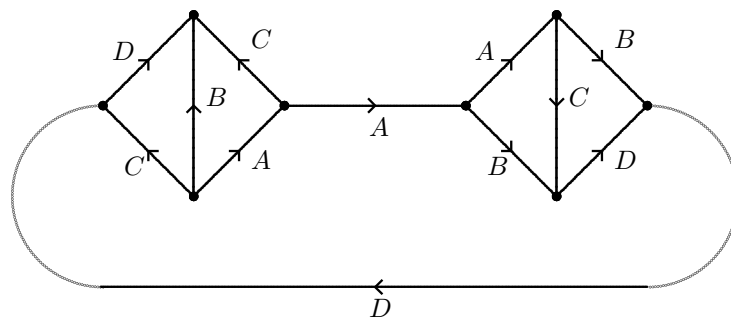


図 8.1

証明の前に例を見よう。 $\Sigma = \Sigma(5, 1)$ とする。 Σ の diagram は図 8.1 で与えられる。このとき Σ_L の S_2 上の diagram は図 8.2 の様になる。 Σ の各面 X に対応する $D(X)$ の境界にのラベルは小文字で書いてある。 $f(G)$ の各辺 E に対応する meridian disk $D(E)$ に対し, その meridian を

$m(E) = \partial D(E)$ とすると $m(E)$ は G_L では 3 つの辺の分割される。これを $m(E)_1, m(E)_2, m(E)_3$ と書いた。 S_1 は図 8.3 の様になる。

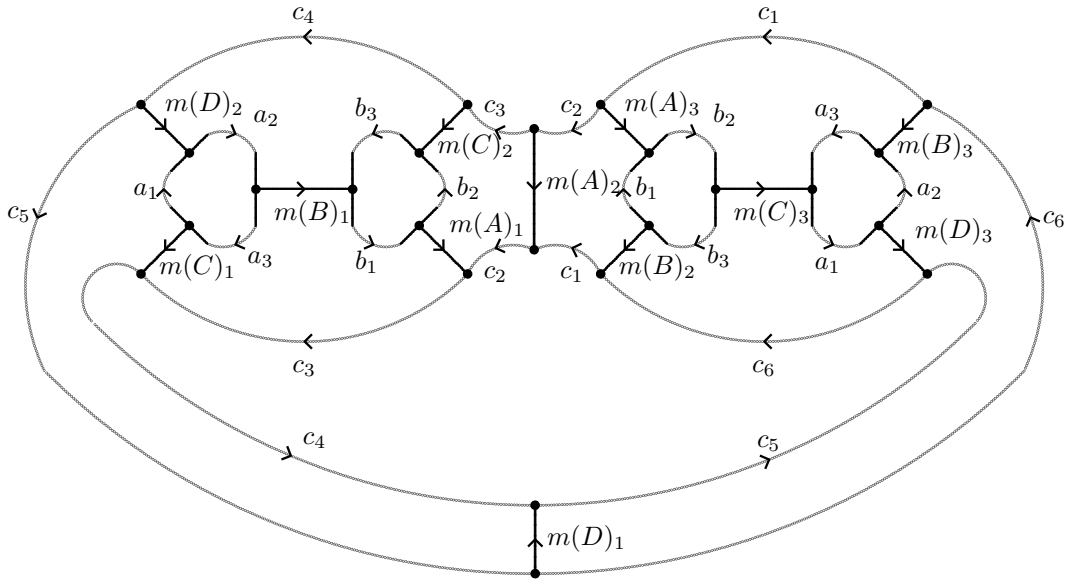


図 8.2

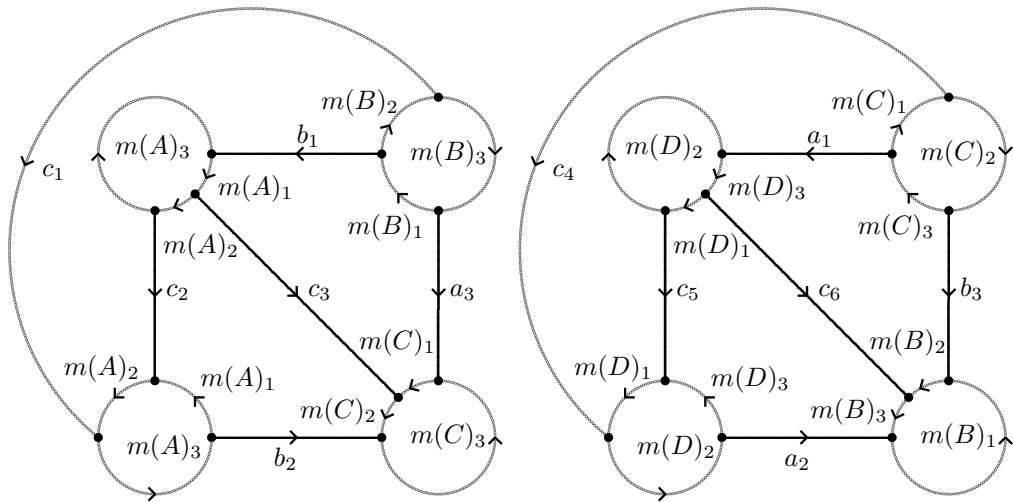


図 8.3

meridian disk $D(E)$ から定まる面は非退化な 3-gon なので D_3 -変形を行うことができる。すべての $D(E)$ に対して D_3 -変形を行うと S_2 は図 8.4 の様になる。これはもとの generalized DS-diagram の頂点を 3-gon で置き換えた図形になっている。また S_1 は図 8.5 の様になっている。これは各成分が 4 面体となっている。

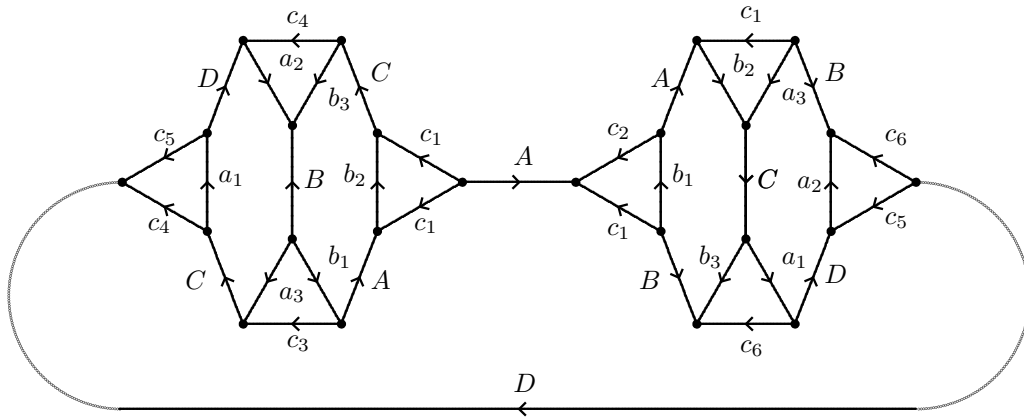


図 8.4

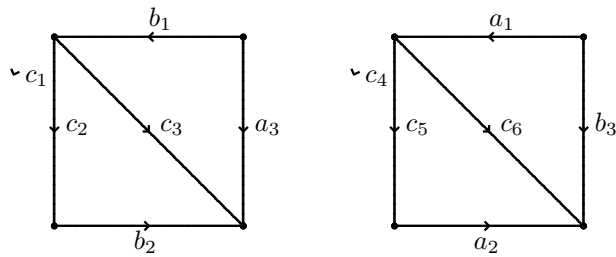


図 8.5

S_1 の各球面に対し G -変形を実行する。この変形で貼り合わされる面は図 8.6 左の様になり 3-gon が頂点に変わる。他の面は 1 つの辺が G から離脱することにより同じ状況が起こる。

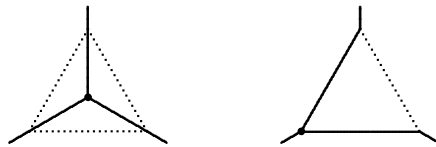


図 8.6

よってこの Σ_L に対し各 median disk に D_3 -変形を行い, S_1 の各球面に対し G -変形を行うと Σ が得られる。

Σ に elementary deformation of type II を行って得られる diagram を Σ' とする。elementary deformation of type II は D_3 -変形またはその逆変形 D_3^{-1} であるが, Σ に非退化 3-gon は存在し

ないので可能なのは D_3^{-1} である。 Σ に対する elementary deformation of type II はラベル B に着目して行うものと、ラベル C に着目して行うものの 2 つがあるが、ここではラベル B に着目して行うものを考える。図 8.7 が Σ' である。

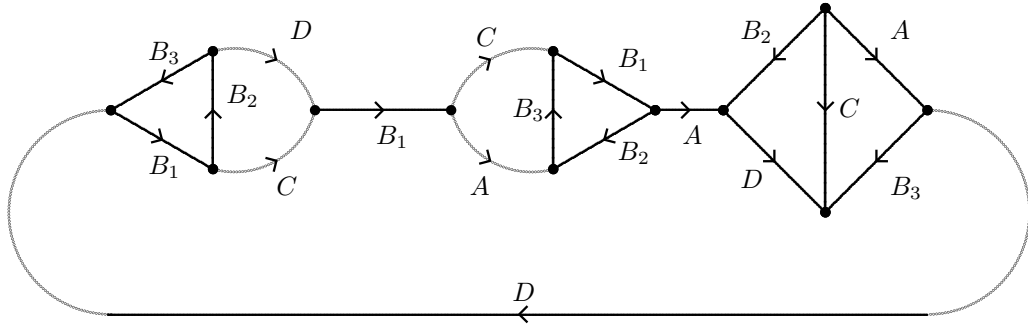


図 8.7

D_3^{-1} -変形を行ったときラベル B 辺の周りは図 8.8 左の様に变化する。辺 B の頂点を 1, 2 とするとき、ラベル B 辺の頂点にならないラベル 1 頂点およびラベル 2 頂点の周りは図 8.8 右の様に变化する。

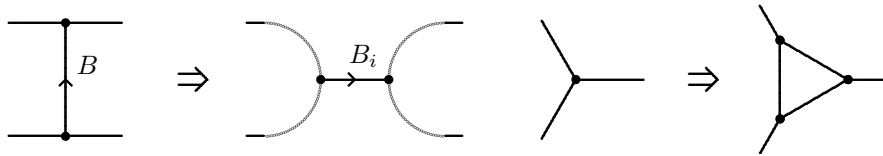


図 8.8

Σ_L に対する C -変形は次の様に行う。最初に $D(B)$ をのぞく他の meridian disk に対し D_3 -変形を行う。このとき S_2 は図 8.9 の様に S_1 は図 8.10 になっている。ただし $m(B)_i = B_i$ ($i = 1, 2, 3$) としている。

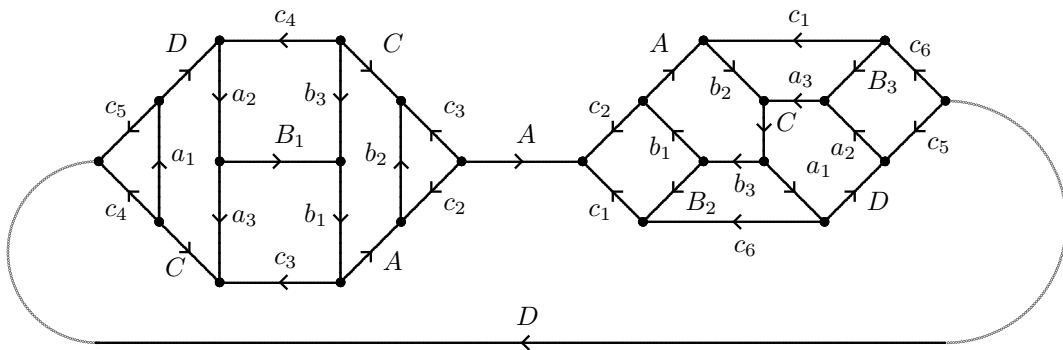


図 8.9

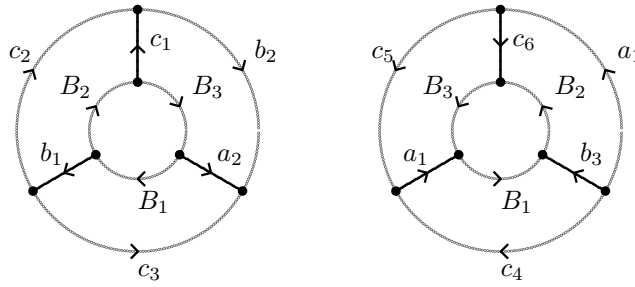


図 8.10

S_1 の 2 つの球面上の 3-gon でそれぞれ G -変形を行うと Σ' が得られる。

命題 8.1 を証明しよう。例と同様に Σ のリフト Σ_L に対しすべての meridian disk で D_3 -変形を行う。このとき S_2 は Σ の頂点をすべて 3-gon に変えた図形が得られる。 S_1 はすべての球面上で 4 面体の辺を与えるグラフになっている。これに G -変形を行うと図 8.6 の様に頂点に変わる。よって得られる generalized DS-diagram は Σ である。

elementary deformation of type II が D_3 -変形の場合は明らかなので D_3^{-1} -変形だとする。この D_3^{-1} -変形はラベル A に着目して行われたとする。 Σ_L に対し meridian disk $D(A)$ を除くすべての meridian disk で D_3 -変形を行う。ラベル A 辺の周りの様子は図 8.11 の様になっている。 A は退化辺ではないので、 B, C, D, E の中に A は存在しない。図 8.11 左が Σ の、図 8.11 中が Σ_L の、そして図 8.11 右が meridian disk で D_3 -変形した後の図である。ただし $m(F)_i = F_i$ と略記した。このときラベル A 辺の周り以外の S_2 は Σ の各頂点を 3-gon に変えた図形になっている。

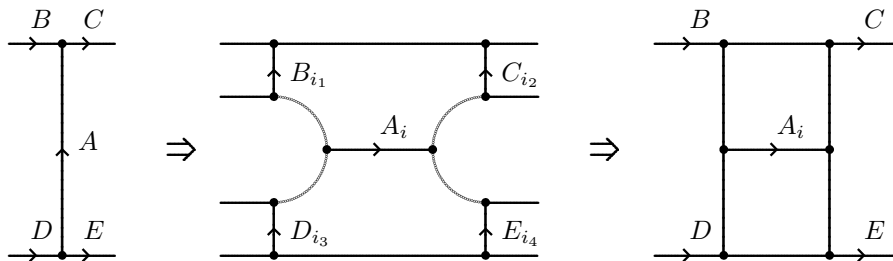


図 8.11

S_1 は meridian $D(A)$ が存在している球面上ではラベルを除いて図 8.10, $D(A)$ が存在しない球面上ではラベルを除いて図 8.5 の様になっている。ラベル A 辺の頂点のラベル 1, 2 とする。

次に S_1 の各球面を G -変形で S_2 に貼り付ける。このとき図 8.10 は meridian disk でない 3-gon で貼り合わせることをする。この面はラベル A 辺の端点ではないラベル 1, 2 の頂点に対応する 3-gon に貼り合わされ、ラベル A_1, A_2, A_3 の 3-gon ができる。図 8.5 の球面は任意の面で貼り合わせる。これは例の様に 3-gon を頂点に変える。この変形でラベル A 辺の周りは図 8.12 の様になるので得られた generalized DS-diagram が Σ' であることが分かる。■

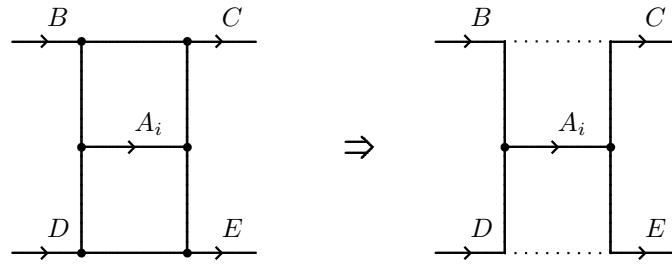


図 8.12

横山により同相な多様体を表現する DS-diagram は変形で移りあうことが知られている ([9])。

定理 8.2 Δ_1, Δ_2 を DS-diagram とし, $M_1 = M(\Delta_1), M_2 = M(\Delta_2)$ とする。 M_1 と M_2 が同相である必要十分条件は Δ_1 から有限回の elementary deformation of type I と elementary deformation of type II で Δ_2 に変形できることである。

また山下により頂点数 2 以上の場合は elementary deformation of type II で十分なことが知られている ([10])。

定理 8.3 Δ_1, Δ_2 を DS-diagram で $c(\Delta_i) \geq 2$ ($i = 1, 2$) とする。 Δ_1 に elementary deformation of type I および elementary deformation of type II を有限回行って Δ_2 に変形できるとき, Δ_1 に elementary deformation of type II を有限回行うことで Δ_2 が得られる。

これらの定理と命題 8.1 を組み合わせると次が得られる。

定理 8.4 DS-diagram Δ_1, Δ_2 が $M(\Delta_1) \cong M(\Delta_2)$ を満たすとき, Δ_1 から有限回の C -変形とリフトで Δ_2 が得られる。

証明 $c(\Delta_i) = 1$ のときはリフトを 2 回行って C -変形を行うことにより $c(\Delta'_i) \geq 2$ となる DS-diagram を得ることができる。よって $c(\Delta_i) \geq 2$ ($i = 1, 2$) とする。 elementary deformation of type II は D_3 -変形または D_3^{-1} -変形であるが, D_3 -変形は C -変形であるし, D_3^{-1} -変形は命題 8.1 によりリフトと C -変形で実現できるので定理が得られる。 ■

参考文献

- [1] Kouno, M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno, M, GS 変形について, 箱根セミナー 2002 記録
- [3] Kouno, M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [4] Kouno, M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [5] Kouno, M, DS-diagram の generator, 箱根セミナー 2008 記録
- [6] Kouno, M, On generalized DS-diagram and moves, preprint
- [7] Yokoyama, K, Lens space の DS-diagram について, 数理解析研究所講究録 563(1985)

- [8] Yokoyama, K, On DS-diagrams of lens space, *Topology and Computer Science*, 紀伊國屋書店, 171–192 (1987)
- [9] Yokoyama, K, Extended DS diagram とその変形, 箱根セミナー 2002 記録
- [10] Yamashita, M, DS-変形の生成元について, 箱根セミナー 1998 記録