

DS-diagram の generator

河野正晴 (北見工業大学)

この note では DS-diagram の generator というものを定義する。ここでの議論は向き付け不可能な多様体でも同様にできるが、この note では多様体はすべて向き付け可能を仮定する。

DS-diagram の一般的な用語については箱根セミナー記録 ([1],[2],[3] など) を参考して下さい。generalized DS-diagram については [1] を参照して下さい。

1 C-変形と DS-diagram

C-変形を [2] で定義したが、この定義を少し変えることにする。多様体を変える変形は C-変形から除外し、多様体を変えない変形を C-変形としたいと思います。具体的には [2] の定義 1.2 の変形の (1)~(5) および (8) のみを C-変形とする。念のために定義を書いておく。以下 $\Sigma = (S^2, f, G)$ を DS-diagram とする。 Σ に対しスパインを $P = f(S^2)$, G の像を $H = f(G)$ と書くことにする。

定義 1.1 次の (1)~(6) の変形を有限回行った変形を C-変形と呼ぶ。ただし free face (重複度 1 の辺) が発生した場合、可能な限り (4) および (5) の変形を実行した後、他の変形を行うものとする。
 (1) 自己隣接つづし 図 1.1 での辺 B のような辺 (自己隣接辺) が存在しているとき、それをつづす図 1.1 のような変形である。ここで @ というラベルの付いた辺は重複度 1 の辺を表している。

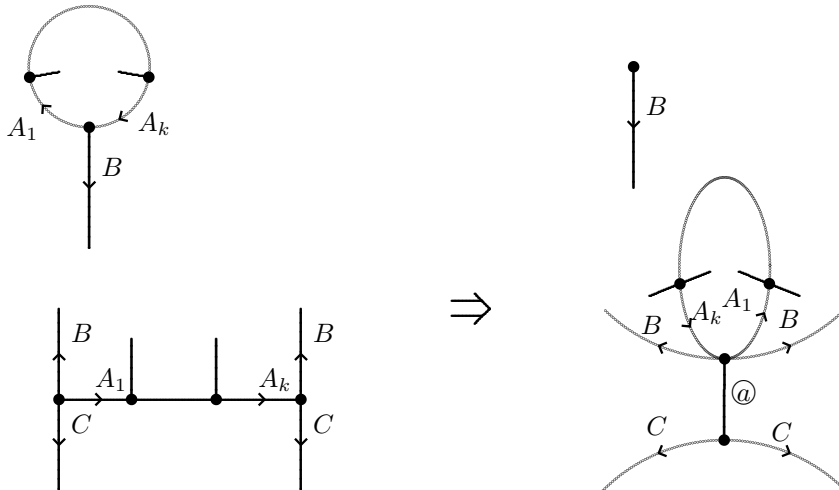


図 1.1

Σ が 1 辺形をもつときそれをつぶす図 1.2 の様な変形が考えられる。これは 1 辺形に対し (1) の変形を行った後に、後で述べる変形 (5) により辺 A を消去した変形であるが、この変形を 1 辺形つぶしと呼ぶ。

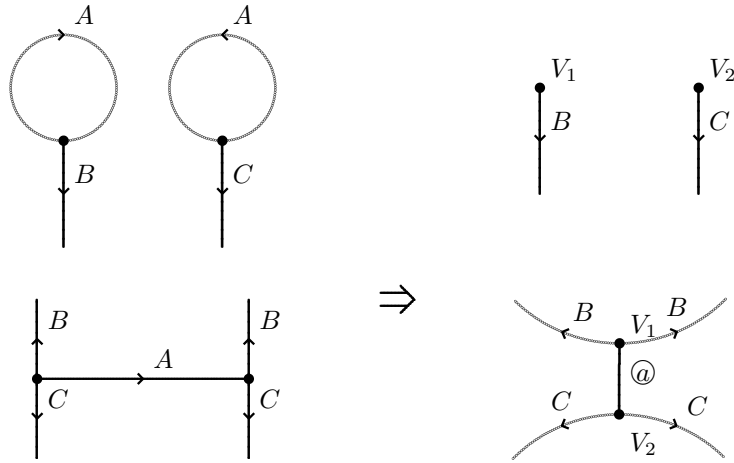


図 1.2

(2) 2 辺形つぶし DS-diagram に非退化 2 辺形が存在するときそれをつぶす図 1.3 のような変形が考えられる。この変形で頂点、辺、面の重複度が変わることはない。ただしグラフ G の連結性がくずれることはある。この場合 DS-diagram は genelarized DS-diagram になる。

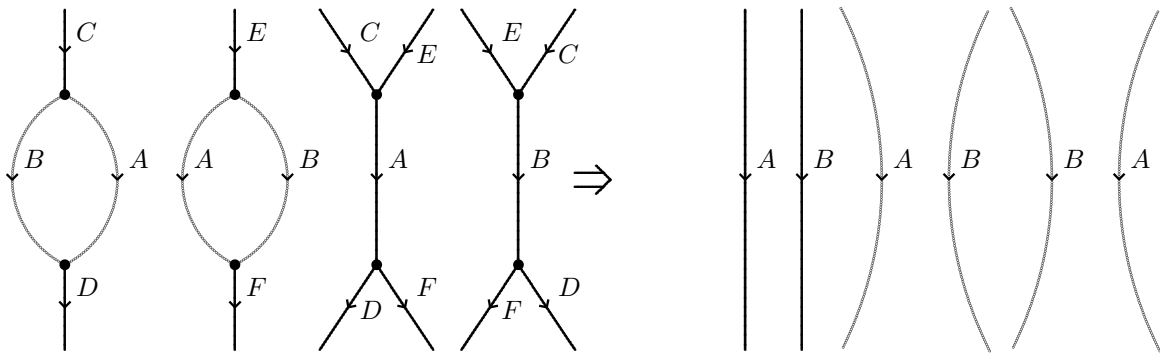


図 1.3

(3) 3 辺形つぶし DS-diagram に非退化 3 辺形が存在するときそれをつぶす図 1.4 のような変形が考えられる。この変形で頂点、辺、面の重複度が変わることはない。グラフ G の連結性も変わらず、変形前が DS-diagram ならば変形後も DS-diagram になっている。

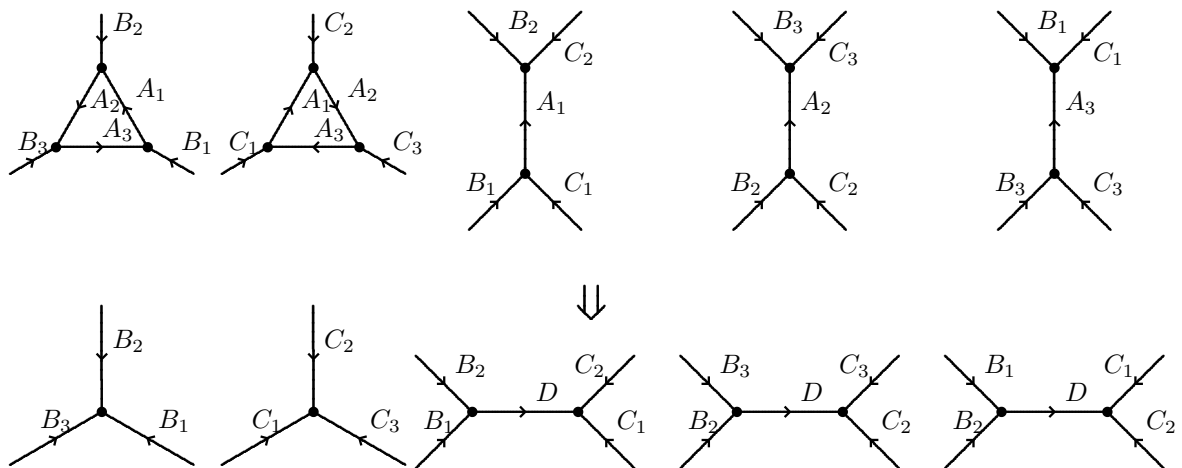


図 1.4

(4) free face つぶし 変形 (1) を行うと free face が発生する。この発生した free face をつぶして行く変形が変形 (4) である。free face を一度につぶすと「つぶしすぎ」てしまい、スパインが 1 点にまでなってしまう場合も起こる。我々は球面上の diagram の範囲で考えたいので一度に変形を行わず、1 つの辺に対してのみ行う変形を考えている。

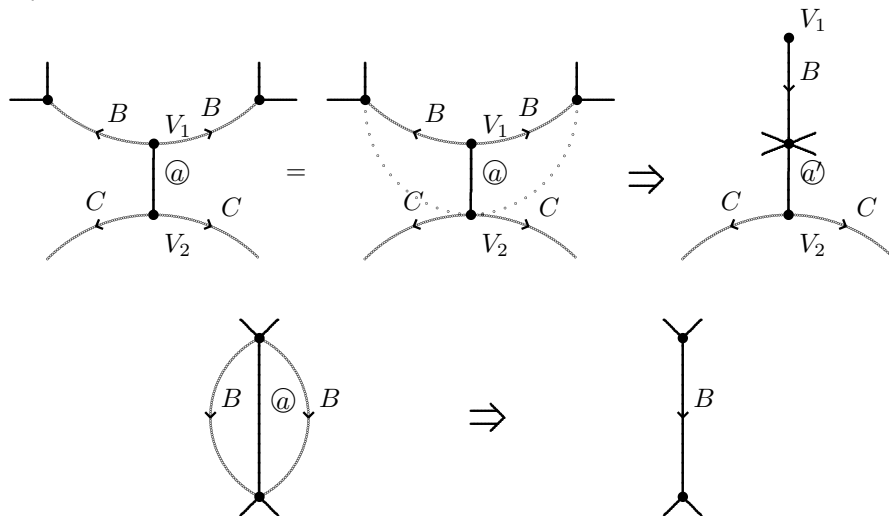


図 1.5

(5) 頂点, 辺の取り除き 変形 (1), (4) などを行うと頂点や辺の重複度が下がる場合がある。重複度 2 の辺や頂点は重複度 2 である面の境界 (の一部) であるので、同じラベルを持つ辺や頂点 2 つを一度に取り除く変形ができる。

次数 2 の頂点があるとする。頂点の重複度が 3 であり、2 つの重複度 3 の辺の境界になっている場合、頂点を消し 2 つの辺を 1 つの辺にそれぞれ変える変形が考えられる (図 1.6 参照)。これらの変形は写像 f を変えず、実際上は何も行っていない変形である

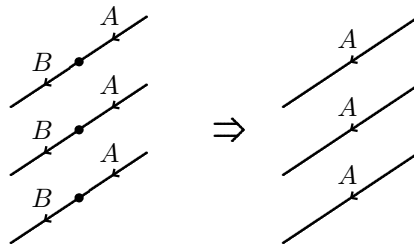


図 1.6

(6) free circle with GS の変形 diagram に free circle(重複度 1 の hoop) があり, 他にも辺や頂点があるとき, この free circle の両側に対応する同じラベルの辺が存在する。これらを貼り付けると free circle が free face に変わる。

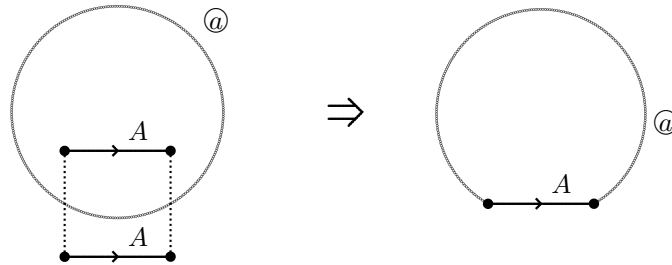


図 1.7

多様体を変える変形は C -変形でなく, DS-diagram の分解として扱うことにする。次の変形 (1) ~ (3) がそれである。

(1) GS-cancel 出発点が DS-diagram でも変形の途中で DS-diagram ではなくことがある。そのときほとんどの場合 diagram は generalized DS-diagram になるが, ほとんどの場合次の性質をもつ loop L が S^2 上に存在する。

- (1) $L \cap G = \emptyset$ 。
- (2) L が S^2 上で張る disk は G と交わる。
- (3) $L \cap \tau(L) = \emptyset$, ここで τ は $S^2 - G$ 上で定義される generalized DS-diagram から決まる involution とする。

この loop L に対し 3-球体 B^3 内の proper な 2-disk D, D' で $\partial D = L, \partial D' = \tau(L), D \cap D' = \emptyset$ となるものが存在する。

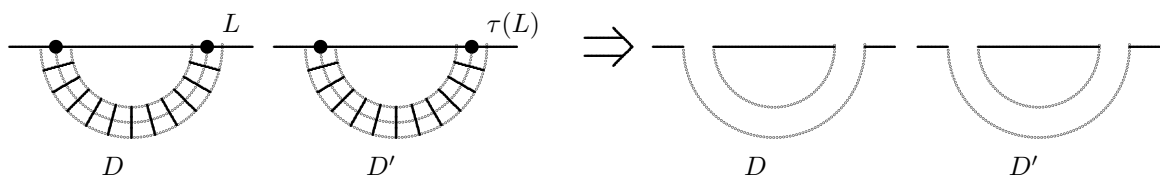


図 1.8

$U(D) = D \times [-1, 1]$, $U(D') = D' \times [-1, 1]$ を D および D' の正則近傍とする。ただし $\tau(\partial D \times \{\pm 1\}) = \partial D' \times \{\pm 1\}$ とする。このとき B を $B^3 - \overset{\circ}{U}(D) - \overset{\circ}{U}(D')$ において $D \times \{-1\}$ と $D' \times \{-1\}$ および $D \times \{1\}$ と $D' \times \{1\}$ を貼り付けたものとする。 B は 3-球体か 3-球体 2 個になっており、 ∂B は自然に generalized DS-diagram になる。これを Σ' とする。 B が 3-球体のとき $M(\Sigma) \cong M(\Sigma') \# (S^2 \times S^1)$ となる。 B が非連結のとき $M(\Sigma) \cong M_1 \# M_2$ と連結和に分かれているが、 $M(\Sigma') \cong M_1 \cup M_2$ となる。この操作を GS-cancel と呼ぶ。

(2) S^2 による分解 S^2 上に次を満たす 3 個の loop の集まり $L = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ が存在するとする。

(1) 各 i に対し $\ell_i \cap G = 2$ 点

(2) $f^{-1}(f(L)) = L$

(3) $f(G - L)$ は非連結

このとき B^3 内の disjoint で proper な 2-disk D_1, D_2, D_3 で $\partial D_i = \ell_i$ ($i = 1, 2, 3$) となるものが存在する。 $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ は 2-sphere になり、この sphere により 2 つの generalized DS-diagram Σ_1 と Σ_2 に分解する。多様体は $M(\Sigma) \cong M(\Sigma_1) \# M(\Sigma_2)$ となっている。

なお (3) の条件が満たされないとき、即ち、 $f(G - L)$ が連結のとき、 $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ は non-separating sphere になる。

ただし $L = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ が図 1.9 のような場合はいつでも存在するので、 S^2 による分解からは除外することにする、

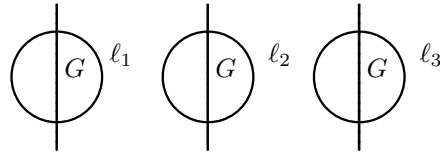


図 1.9

(3) torus による分解 S^2 上に次を満たす loop L が存在するとする。

(1) $L \cap G = 6$ 点

(2) $f^{-1}(f(L)) = L$

(3) $f(G - L)$ は非連結

このとき B^3 内の proper な 2-disk D で $\partial D = L$ となるものが存在する。 $f(D)$ は torus になり、この torus により 2 つの境界つき多様体に分解される。

なお (3) の条件が満たされないとき、即ち、 $f(G - L)$ が連結のとき、 $f(D)$ は nonseparating torus になる。

2 境界つき多様体の DS-diagram

境界のある多様体の DS-diagram を (一応) 定義しておく。 $\Sigma' = (S^2, f, G)$ を DS-diagram とする。曲面 $F \subset S^2$ は、

- (1) $f^{-1}(f(F)) = F$,
- (2) $\partial F \cap V(G) = \emptyset$,
- (3) $\partial F \pitchfork G$; 即ち G は F の境界と transversal に交わる,

を満たすものとする。3-球体 B に対し、 $\partial B = S^2$ とみたとき、 $B/f|_F$ は $\partial F \neq \emptyset$ であれば境界つきの多様体になる。このとき $\Sigma = (F, G \cap F, f|_F)$ を境界つき多様体の DS-diagram と呼ぶ。また $M(\Sigma) = B/f|_F$ と書く。DS-diagram Σ' を持ち出さなくて境界つき多様体の DS-diagram は定義できるが、ここではこのように定義しておく。

$\Sigma = (F, G, f)$ を DS-diagram または境界つき多様体の DS-diagram とする。 ∂F のある成分 ℓ が $f^{-1}(f(\ell)) = \ell$ を満たしかつ ℓ は G と 6 点で transversal に交わっているとき、 ℓ は type T であるという。 ∂F のすべての成分が type T のとき Σ は type T であるという。

Σ が type T であるとする。 $H = f(G)$ とする。 $H \cap f(\partial F)$ の点 a に対し $f^{-1}(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ とする。また点 $b \in H \cap f(\partial F)$ に対し $f^{-1}(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ とするとき、 a に対し $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ が同じ境界の成分に乗っているような b が唯 1 つ存在する。このような a, b はそれぞれ組をなす。 H において、このような a と b を同一視して得られるグラフを \bar{H} と書くことにする。ただし同一視した点は頂点とは考えず、この点で 2 つの辺がつながって 1 つの辺になったと考える。

前節で S^2 による分解と torus による分解について述べたが、これを逆に境界付き多様体の DS-diagram からの構成と見ることができる。その場合は sphere sum または torus sum と呼ぶ。torus sum についてのみ定義を書いておく。

定義 2.1 $\Sigma_i = (F_i, G_i, f_i)$ ($i = 1, 2$) を type T の DS-diagram で $\partial F_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$) となるものとする。 $\ell_i \subset \partial F_i$ ($i = 1, 2$) をそれぞれある成分とする。 g を ℓ_1 から ℓ_2 への同相写像で、 $g(\ell_1 \cap G_1) = \ell_2 \cap G_2$ を満たすものとする。このとき

$$\Sigma_1 \cup_g \Sigma_2 = (F_1 \cup_g F_2, G_1 \cup_g G_2, f_1 \cup_g f_2)$$

は type T の DS-diagram になる。この diagram を Σ_1 と Σ_2 の torus sum と呼ぶ。

3 generator

C -変形が不可能な DS-diagram を C -既約であると定義する。 S^2 による分解をもたない DS-diagram を S^2 -既約と呼ぶことにする。 S^2 -既約でない DS-diagram Σ は $M(\Sigma) \cong M(\Sigma_1) \# M(\Sigma_2)$ と generalized DS-diagram に分解できるので、以後 S^2 -既約な DS-diagram のみを対象にする。

グラフが 2 辺連結とはグラフから任意の 2 辺をのぞいてできるグラフが連結であるときをいう。次は [2] で述べた命題をここで定義した用語を使って言い直したものである。

命題 3.1 Σ を DS-diagram とする。 $H = f(G)$ が 2 辺連結でないとき、 Σ は S^2 による分解、または torus による分解を持つ。

そこで次を定義する。

定義 3.2 $\Sigma = (F, G, f)$ を type T の DS-diagram とする。 Σ が次を満たすとき generator と呼ぶ。

- (1) 自己隣接しない。
- (2) 境界と交わらない各面は対隣接しない。ここで対隣接とは、異なる 2 つの面 X^+ と面 X^- が $f(X^+) = f(X^-)$ かつ $\overline{X^+} \cap \overline{X^-} \neq \emptyset$ を満たすことをいう。
- (3) 境界と交わらない各 face は 4 辺形以上である。
- (4) \overline{H} は 2 辺連結である。

ただし図 3.1 の type T の DS-diagram は torus sum しても DS-diagram を変えないので generator からは除外する。

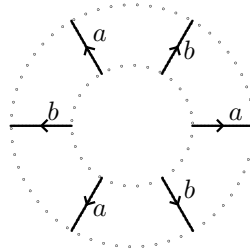
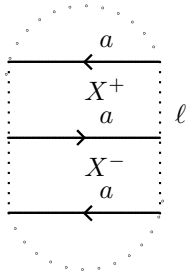


図 3.1

このとき次が成立する。

定理 3.3 C -既約で S^2 -既約な DS-diagram は generator の torus sum として表される。

証明 Σ を定理の条件を満たす DS-diagram とする。 H が 2 辺連結でないとき、DS-diagram は S^2 による分解か、torus への分解のいずれかを待つ。仮定より分解は torus による分解になっ



ている。このとき分解の各成分は type T の DS-diagram である。各成分の \overline{H} が 2 辺連結でないときはこの操作を続行していく。 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ は type T の DS-diagram でその torus sum が Σ であり、各 \overline{H}_i が 2 辺連結になっているとする。ただし $\Sigma_i = (F_i, G_i, f_i)$, $H_i = f_i(G_i)$ とする。 Σ_i の境界と交わらない面が対隣接している場合次の操作を行う。

対隣接する面を X^+, X^- とすると、その共通辺が存在するがそのラベルを a とする。このとき F_i 内の disk D で次の性質を持つものが存在する；(1) $f_i^{-1}(f_i(D)) = D$, (2) $G_i \cap D$ は 3 つの arc で、

そのラベルはいずれも a である。即ち図のような状況になっている。ここで $\partial D = \ell$ である。

このとき $\Sigma' = \left(F_i - \overset{\circ}{D}, G_i - (G_i \cap D), f_i \Big|_{F_i - \overset{\circ}{D}} \right)$, $\Sigma'' = \left(D, G_i \cap D, f_i|_D \right)$ とおくと、いずれも type T の DS-diagram で、その torus sum が Σ_i になっている。対隣接している面が存在する限りこの操作を実行して、type T の DS-diagram $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ が得られたとする。各 Σ_j は generator の条件 (1),(2),(4) を満たしている。 Σ が境界と交わらない 2 辺形または 3 辺形を持った

とする。これらは Σ の面でもあるので C -既約ということから退化している。しかし、退化辺は対隣接の境界になるので、すでに分解されているはずである。よって(3)も成立する。■

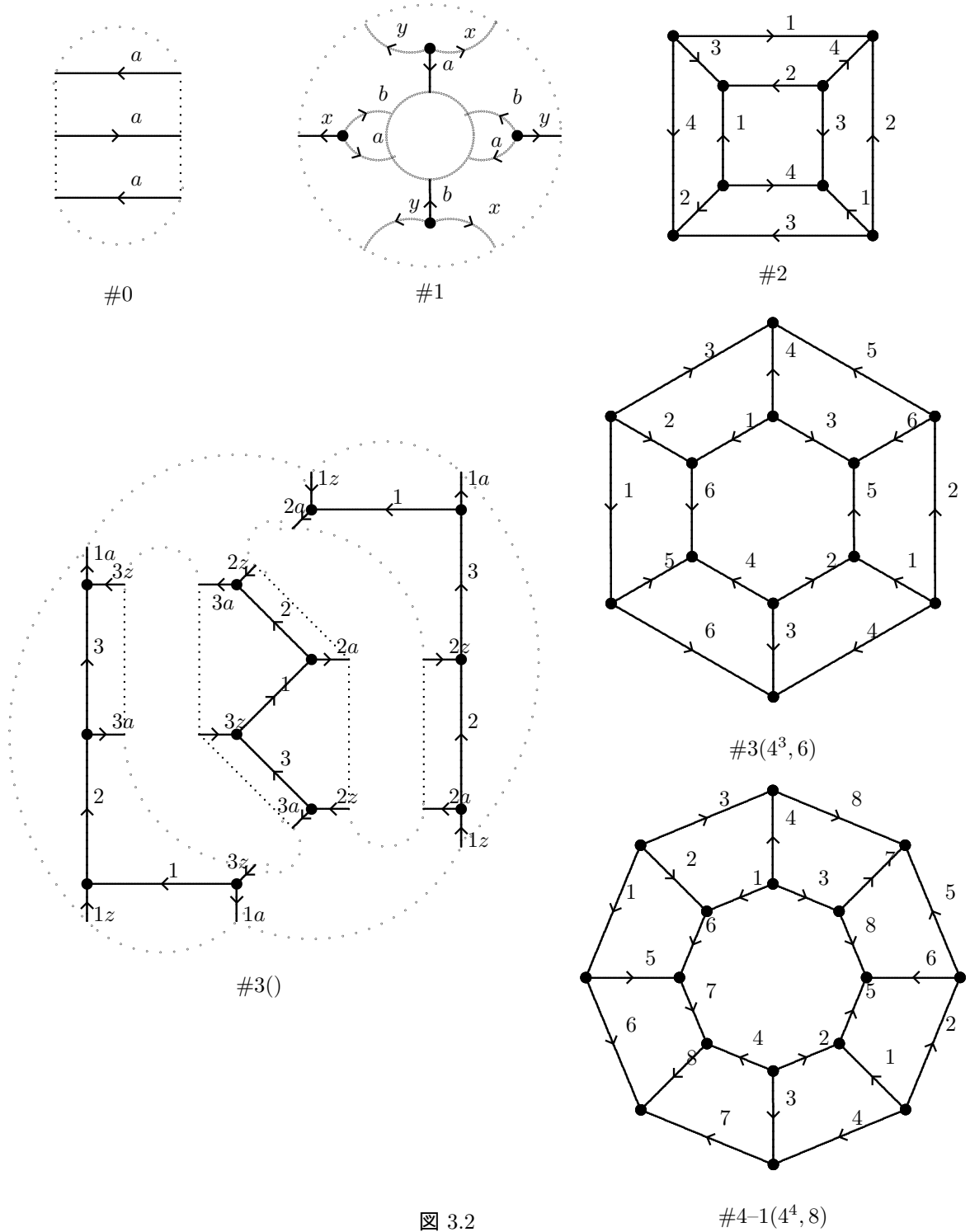


図 3.2

図 3.2 および図 3.3 は頂点数が 4 個以下の generator の図である。頂点の個数は G ではなく H で数える。generator の名前 $\#n-m(k_1, k_2, \dots, k_N)$ は n が頂点数を, m は H につけられた番号 (m が異なれば H の type が異なる。同じであれば type は同じ), $k_1^{s_1}, k_2^{s_2}, \dots, k_N^{s_N}$ は内部の面が s_1 個の k_1 辺形, s_2 個の k_2 辺形, \dots , s_N 個の k_N 辺形からなることを表している。ただし面は spine $P = f(S^2)$ の面の個数である。尚 $\#n$ だけで generator が特定できるなどの場合は省略して書いてある。

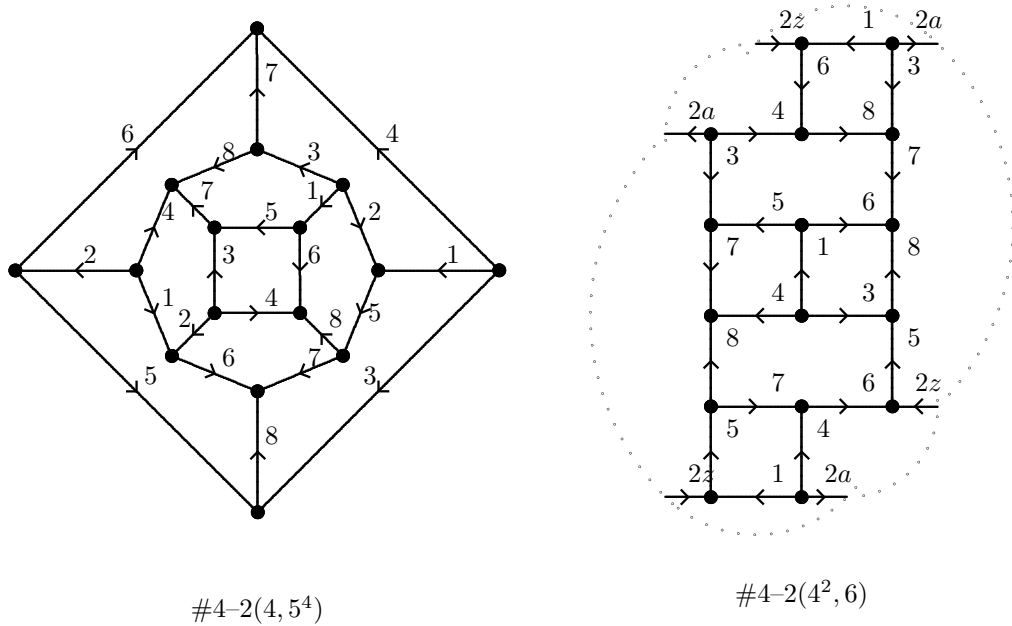


図 3.3

generator が境界をもたないとき *isolated*, 境界をもつとき *non-isolated* と呼ぶ。non-isolated のとき, 境界に generator $\#0$ を境界の個数だけ torus sum した DS-diagram を *closure* という。境界の個数が k 個のとき closure は 3^k 個存在する。勿論それらの中には同型なものも存在する。

図 3.4 は $\#1$ の closure である。右端は「あわび」であるが, この diagram は C -既約ではない。 $\#1$ の closure は全部で 9 個あるが, 残りの 6 個は図のどれかと同型になる。

type T の DS-diagram に同じ個数の $\#0$ を torus sum した DS-diagram どうしを姉妹または兄弟と呼ぶ。closure どうしは姉妹である。

Lens space の DS-diagram の「横山の標準形」([4]) を generator を用いて表現すると次の様になる ([3])。

命題 3.4 generator $\#0$ と generator $\#1$ の torus sum からできる DS-diagram が表現する多様体は lens space である。逆に任意の lens space に対し, それを表現する C -既約な DS-diagram で generator $\#0$ と generator $\#1$ の torus sum になっているものが一意的に存在する。

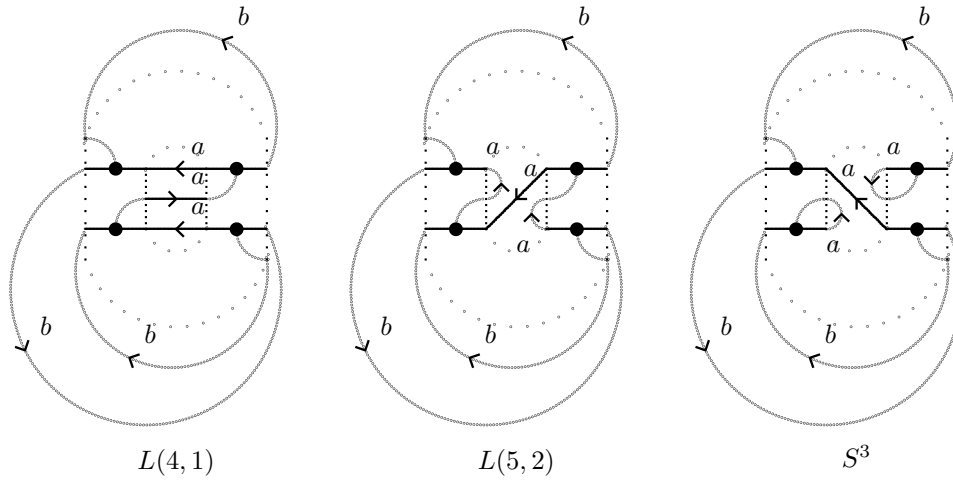


図 3.4

次の表は generator と C -既約かつ S^2 -既約な DS-diagram の頂点数毎の個数である。computer で計算した 10 頂点以下の generator と 8 頂点以下の C -既約かつ S^2 -既約な DS-diagram のデータが <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/DS-diagram/> においてあるので参考して下さい。

generator の個数

頂点数	個数	isolated	non-isolated
0	1	0	1
1	1	0	1
2	1	1	0
3	2	1	1
4	3	2	1
5	7	4	3
6	29	14	15
7	67	33	37
8	295	119	176
9	1197	393	804
10	5709	1631	4079

C -既約かつ S^2 -既約な DS-diagram の個数

頂点数	個数
1	2
2	4
3	7
4	17
5	50
6	168
7	700
8	2332

4 H の 2 重辺について

この節では DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ の H が連続する 2 重辺をもつ場合を考える。 H が 2 重辺を持ち、それが他の 2 重辺と隣接していない場合、それをラベルに持つ G の辺は対隣接の共通辺になりやすい傾向がある。しかし、 H の 2 重辺が 2 つ以上隣接する場合は、今の所、1 つの場合を除いて対隣接にはならない。このことから次の成立が予想される。

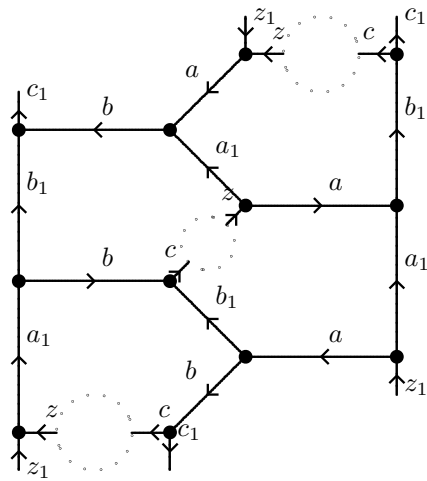


図 4.1

予想 : C -既約な DS-diagram の H の 2 組の 2 重辺 a, a_1 及び b, b_1 が隣接してるとする。ラベル a をもつ G の辺が対隣接の共通辺になっているとき, b または b_1 も対隣接の共通辺のラベルであり, DS-diagram は図 4.1 の様な部分またはその姉妹を含む。ただし図は a, b が対隣接の共通辺の場合の図である。

予想が証明されると, 「 C -既約で S^2 -既約な DS-diagram の H が 2 組の隣接する 2 重辺を持ち, その少なくとも 1 つが対隣接の共通辺のラベルになっているならば, DS-diagram は図 4.2 のような部分を持つ」ということが証明される。特にこのとき \overline{H} は 2 辺連結ではない。

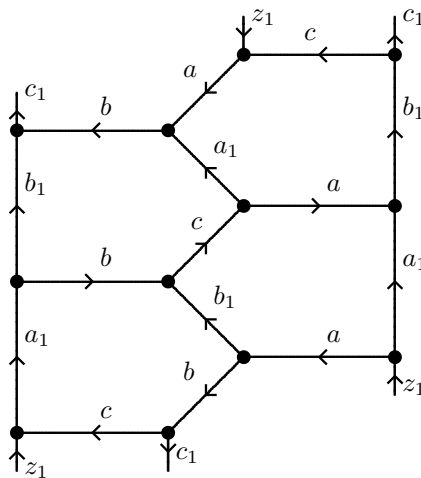


図 4.2

現在の所証明できているのは次である。

命題 4.1 H の 2 組の 2 重辺 a, a_1 及び b, b_1 が隣接してるとする。ラベル a をもつ G の辺が対隣接の共通辺になっているとき, b または b_1 も対隣接の共通辺であり, DS-diagram は図 4.3 の様な部分またはその姉妹を含む。ただし図は a, b が対隣接の共通辺の場合の図である。

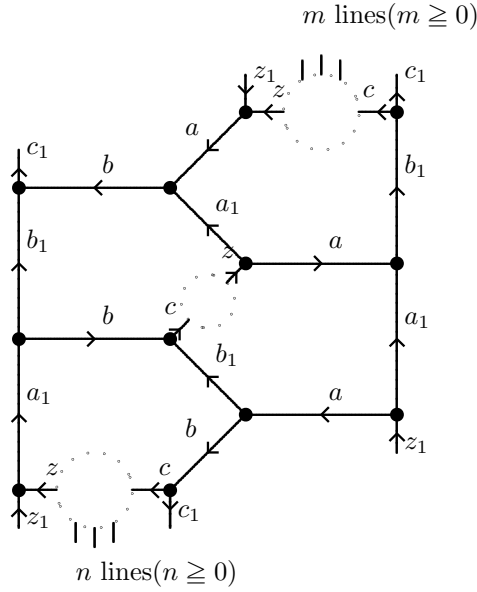


図 4.3

命題 4.1 の証明は場合分けを実行していくだけで、ここでは省略する。図の m, n が共に 0 であることを示すことができれば予想は証明されるのだが...

中間的結果であるが、命題 4.1 を用いると、 H が 2 重辺だけからなる DS-diagram は頂点の個数から一意に決まることが示される。図 4.4 のような DS-diagram を $\Sigma(Q_{4k})$ と書く。この記号は $\pi_1(M(\Sigma(Q_{4k}))) \cong Q_{4k} = \langle x, y; x^2 = (xy)^2 = y^k \rangle$ ということによる。

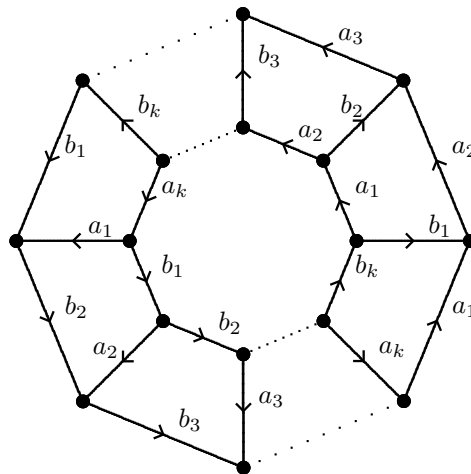


図 4.4 $\Sigma(Q_{4k})$

命題 4.2 H が 2 重辺のみからなるとき、DS-diagram Σ は $\Sigma(Q_{4k})$ に同型である。 $k = 2$ のとき H は 4 重辺のみのグラフになるが、2 重辺 2 個の組と見なせば命題は成立している。

命題 4.2 を証明する。 k が小さいときは DS-diagram をすべて決定できるので、命題は成立している。よって $k \geq 4$ とする。

最初に $P = f(S^2)$ の面が $2k$ 辺形 1 つと k 個の 4 辺形からなっていることを示す。 H の辺を $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$, H の頂点を $1, \dots, k$ とする。ただし, a_i と b_i は頂点 i から頂点 $i+1 \pmod k$ に向かう 2 重辺とする。 P は頂点を k 個, 辺を $2k$ 個持つが, $\chi(P) = 1$ より面の個数は $k+1$ 個である。また面の境界は全体で各辺を 3 回通過するので, i 辺形の個数を α_i 個とすると $\sum_i i\alpha_i = 6k$ が成立している。また $\sum_i \alpha_i = k+1$ が成立している。 a_i と b_i を向きが同調するように同一視して得られる S^1 と同相なグラフ (グラフとしては k 辺形) を K とする。同一視の写像を $g: H \rightarrow K$ とする。 P の面 X の境界 ∂X は $a_i, b_i (i = 1, \dots, k)$ の列 $x_1 x_2 \cdots x_s$ と表されるが, 対隣接がないということから, $j \neq j'$ のとき $x_j \neq x_{j'}$ となっている。このことより $g(\partial X)$ は次のタイプのいずれかであることが分かる。

- (1) $g(\partial X)$ は K を 2 周まわる $2k$ 辺形である。
- (2) $g(\partial X)$ は K を 1 周まわる k 辺形である。
- (3) $g(\partial X)$ は K で 0 に homotopic な $2i$ 辺形 ($i \leq k$) である。

K の辺 x の向きを逆にした辺を \bar{x} と書く。 $a_i \bar{b}_i$ および $\bar{b}_i a_i$ の形をしているコーナーは K には $2k$ 個存在する。タイプ (3) の ∂X はこのコーナーを 2 回通過する。タイプ (1) およびタイプ (2) の ∂X は 1 回も通過しない。よってタイプ (3) の面は k 個, タイプ (1) またはタイプ (2) の面が 1 個存在することが分かる。タイプ (2) の面 X が存在すると仮定する。 a_i と b_i の対称性により, 必要なら a_i と b_i の名前を交換することにより, $\partial X = a_1 a_2 \cdots a_k$ となっているとしてよい。タイプ (3) の ∂X 中の a_1, a_2, \dots, a_k の個数と b_1, b_2, \dots, b_k の個数は同じであるので, タイプ (3) 全体が通過する a_1, a_2, \dots, a_k の個数と b_1, b_2, \dots, b_k の個数は同じである。タイプ (2) の面が存在すると使用される a_i と b_i の個数が異なるが, 全体で各辺を 3 回通過しているので矛盾。よってタイプ (2) は存在しない。

H に 1 辺形は存在しないので Σ に退化辺は存在しない。 C -既約ということから P に 1 辺形, 2 辺形, 3 辺形は存在しない。 P の辺は 4 辺形以上である。5 辺形以上のタイプ (3) の辺が存在したとする。タイプ (3) の ∂X の和を \sum' で表すと。

$$6k = \sum_{i \geq 4} i\alpha_i = \sum_{i \geq 4} i\alpha_i + 2k > \sum_{i \geq 4} 4\alpha_i + 2k = 4 \sum_{i \geq 4} \alpha_i + 2k = 4k + 2k = 6k$$

となり矛盾。よって P の面は $2k$ 辺形 1 個と 4 辺形 k 個であることが示された。

証明を完成させるために次の補題を必要とする。

補題 4.3 C -既約で S^2 -既約な DS-diagram の H が連続して隣接する 4 組の 2 重辺をもつとき, その 2 重辺をラベルにもつ辺で対隣接することはない。

補題の成立は, 図 4.3 に 2 組の 2 重辺をラベルにもつ辺を加えた図を描くのは不可能であることから分かる。

補題 4.3 より Σ には対隣接はない。 S^2 上で 2 つの $2k$ 辺形が隣接すれば対隣接となるので, $2k$ 辺形が隣接することはない。 $2k$ 辺形と隣接するのはすべて 4 辺形である。 $2k$ 辺形の境界のラベルは, 必要なら a_i と b_i を入れ替えることにより $a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_k$ となっているとしてよい。このとき 4 辺形の境界のラベルは $a_i b_{i+1} \bar{a}_{i+1} \bar{b}_i (i = 1, \dots, k-1)$ および $a_k a_1 \bar{b}_1 \bar{b}_k$ となっている。以上により Σ が $\Sigma(Q_{4k})$ と同型であることが示される。 ■

参考文献

- [1] Kouno ,M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録
- [2] Kouno ,M, DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [3] Kouno ,M, DS-diagram の種数について, 箱根セミナー 2007 記録
- [4] Yokoyama ,K, Lens space の DS-diagram について, 数理解析研究所講究録 563(1985)