

DS-diagram の種数について

河野正晴 (北見工業大学)

ここでは DS-diagram に対し種数と呼ばれるものを定義し、それが種数と呼ぶに値することを主張したい。

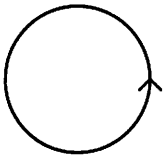
1 定義と結果

この節では定義と結果のみを述べる。証明は次節で与える。

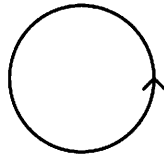
最初に diagram を定義しておく。 $\Sigma = (F, f, G)$ が次を満たすとき **diagram** であるという； F は何個かの 2次元球面からなる曲面で、 G は F に埋め込まれた graph である。 $f: F \rightarrow P$ は onto な local homeomorphism であり、 $F - G$ では 2 対 1 の写像である。

頂点を持たない loop である hoop も graph と考える。また empty graph も graph として扱う。 B を何個かの 3-ball で、 $\partial B = F$ となるものとするとき、 $B/\{ \}$ を diagram が表現する図形といい $M(\Sigma)$ と書く。

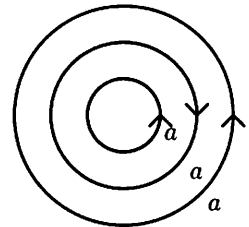
$\Sigma = (S^2, f, G)$ を DS-diagram とする。 spine の 2nd singularity $f(G)$ を \tilde{G} と書く。 DS-diagram 全体の集合を DS と書く。 次の 4 つの diagram は DS-diagram ではないが例外形として考察の対象にする。



Σ_S



Σ_\emptyset



Σ_h

Σ_S は $G = S^1$ であり、 $f: S^2 \rightarrow P$ は G 上で一対一になっている diagram とする。 Σ_\emptyset は $G = \emptyset$ となる diagram であり、 f は S^2 全体で 2 対 1 になっている。 Σ_{3W} は $G = S^1$ であり、 G 上で f は 3 対 1 になっている diagram である。 Σ_h は G は 3 個の S^1 からなり、 やはり G 上で f は 3 対 1 で diagram である。 表現する多様体はそれぞれ $S^3, P^3, L(3, 1), S^2 \times S^1$ である。

このとき

$$\tilde{DS} = DS \cup \{ \Sigma_S, \Sigma_\emptyset, \Sigma_{3W}, \Sigma_h \}$$

とおく。

graph H に含まれる最長サイクルの長さを外周 (circumference) と呼んで、それを $c(H)$ と書く。hoop の外周は 0 と定義する。この外周を用いて種数を定義する。

定義 1.1 \widetilde{DS} の元 $\Sigma = (S^2, f, G)$ に対し spine $P = f(S^2)$ の 2nd singularity $\tilde{G} = f(G)$ の外周 $c(\tilde{G})$ を Σ の種数 (genus) といい、 $g(\Sigma)$ と表す。

3次元多様体 M に対し $M \cong M(\Sigma)$ となる $\Sigma \in \widetilde{DS}$ が存在する。このとき

$$g_{DS}(M) = \min \left\{ g(\Sigma) \mid M \cong M(\Sigma), \Sigma \in \widetilde{DS} \right\}$$

を M の DS 種数 (DS genus) と呼ぶ。何故 DS ではなく \widetilde{DS} を定義に採用したか後で述べる。

これが種数と呼ぶに値するかが問題になる。多様体は向け付け不可能なものも扱えるが、簡単のためここでは以下すべて多様体は向き付け可能なものに限ることにする。

$\mathfrak{M}(n) = \{ M \mid M \text{ は genus } n \text{ の DS-diagram をもつ 3-多様体} \}$, $\mathfrak{M} = \{ 3\text{-多様体} \}$ とおくと次が成立する。

命題 1.2 $\mathfrak{M} = \bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{M}(n)$ が成立する。また任意の自然数 n に対し

$$\mathfrak{M}(n) \subseteq \mathfrak{M}(n+1)$$

が成立する。

ここでは群

$$Q_{4n} = \langle x, y; x^2 = (xy)^2 = y^n \rangle$$

に対し $\pi_1(M) = Q_{4n}$ となる elliptic manifold M を記号の混同で $M = Q_{4n}$ と書くことにする。

$$D_{2^k(2n+1)} = \langle x, y; x^{2^k} = 1, y^{2n+1} = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$$

に対し $\pi_1(M) = D_{2^k(2n+1)}$ となる elliptic manifold M を記号の混同で $M = D_{2^k(2n+1)}$ と書くことにする。また (p, q, r) タイプの Brieskorn 多様体を $B(p, q, r)$ と書く。

命題 1.3 次が成立する。

$$\mathfrak{M}(1) = \{ S^3, L(4, 1), L(5, 2) \}$$

$$\mathfrak{M}(2) = \{ \text{lens space} \} \cup \{ S^3, S^2 \times S^1 \} \cup \{ Q_8 \}$$

$$\mathfrak{M}(3) = \mathfrak{M}(2) \cup \{ Q_{12} \}$$

$$\mathfrak{M}(4) = \mathfrak{M}(3) \cup \{ Q_{16} \} \cup \{ B(2, 3, 4) \} \cup \{ D_{24} \}$$

$$\cup \{ \text{Klein bottle 上の twisted } I \text{ bundle} \cup \text{solid torus} \}$$

$$\cup \{ \text{Klein bottle 上の twisted } I \text{ bundle} \cup \text{Klein bottle 上の twisted } I \text{ bundle} \}$$

この命題は Heegard 種数と DS 種数の間の関連を示唆する。

命題 1.4

$$Q_{4n} \in \mathfrak{M}(n)$$

$$B(2, 3, n) \in \mathfrak{M}(n)$$

ただし $B(3, 2, 2) = L(3, 1) \in \mathfrak{M}(1)$, $B(2, 3, 3) = Q_8 \in \mathfrak{M}(2)$ である。

DS-diagram の中には変形により、より「簡単な」DS-diagram に変形できるものがある。その様なものを考察の対象から除外するために次を定義する。退化辺とは両端の頂点のラベルが同じである辺をいい、退化辺を持つ多辺形を退化多辺形と呼ぶ。退化辺を持たない多辺形を非退化多辺形と呼ぶ。また閉包が 2-円板ではない面を自己隣接面といい、自己隣接面を持つ DS-diagram を自己隣接しているという。

定義 1.5 DS-diagram が次を満たすとき既約 (irreducible) であるという。

- (1) 自己隣接しない。
- (2) 非退化 2 辺形を持たない。
- (3) 非退化 3 辺形を持たない。

DS-diagram が既約でないとき C -変形 ([2] 参照) により、より「簡単な」DS-diagram に変形できるが、注意しておくべき点が 2 つある。1 つは C -変形で種数が大きくなることもありうるという点である。自己隣接解消の C -変形の場合は変形後の \tilde{G} はもとの部分集合になるが、2 辺形、3 辺形の変形は \tilde{G} が変わるので大きくなる場合もありうる。頂点数は減るが、種数は大きくなる可能性もある。

2 つは変形の結果が DS-diagram でなくなる場合がある。 \tilde{G} が連結でなくなる場合は連結和に分かれる場合が多いので、prime な多様体に限るとそれを避けることができる。しかし prime な多様体に対する変形でも退化する場合がある。DS-diagram に対し可能な限り C -変形を行うと、結果は DS-diagram または $\Sigma_S, \Sigma_\emptyset, \Sigma_{3W}$ になる。[2] では Σ_h を Σ_S に変える変形 (GS-cancel) も許容しているので、このリストに Σ_h は出てきていない。 Σ_h を Σ_S に変える変形を許容しない変形を弱い意味の C -変形と呼ぶと [2] で述べたことは次のように言い換えられる。

命題 1.6 DS-diagram に可能な限り弱い意味の C -変形を行って得られる diagram は既約な DS-diagram か

$$\Sigma_S, \Sigma_\emptyset, \Sigma_{3W}, \Sigma_h$$

のいずれかである。

これが種数の定義で DS ではなく \tilde{DS} を採用した理由の 1 つである。また DS を採用した場合は

$$g_{DS}(S^3) = 1, \quad g_{DS}(P^3) = 2, \quad g_{DS}(L(3,1)) = 2, \quad g_{DS}(S^2 \times S^1) = 2$$

となるが、一方

$$g_{DS}(L(4,1)) = 1, \quad g_{DS}(L(5,2)) = 1$$

でありあり、 $P^2, L(3,1)$ などより「複雑」な $L(4,1), L(5,2)$ の種数が小さくなる「不自然さ」が生じる。これを避けたいというのがもう 1 つの理由である。

$S^3, P^3, L(3,1), S^2 \times S^1$ を除く prime な多様体に対して既約な DS-diagram が存在することが命題 1.6 から分かる。 S^3 の DS-diagram で既約なものは知られていない。そこで次が問題になる。

問題 1.7 S^3 の既約な DS-diagram は存在するか。

この問題が否定的なら S^3 の DS-diagram は特徴的な形をしていることが分かるが、そうは甘くないと思われるので、この問題は肯定的な解があると思われる。次も重要な問題であろう。

問題 1.8 例外型以外の場合 DS 種数を与える DS-diagram は既約か。

種数 4 以下ではそうになっている。問題 1.8 が肯定的なら対象を既約な DS-diagram に限ってもよいことになる。

定義 1.9 $\tilde{G} - \{2 \text{ 辺}\}$ が非連結となるような 2 辺が存在するとき DS-diagram $\Sigma = (S^2, f, G)$ は分解可能 (decomposable) であるという。

DS-diagram が分解可能であるとき、 a, b を $\tilde{G} - \{a, b\}$ が非連結となる辺とする。このとき S^2 上に閉曲線 ℓ が存在して、(1) ℓ はラベル a および b のすべての辺と 1 回だけ横断的に交わる、(2) ℓ が G と交わるのは (1) のみ、(3) $f^{-1}(f(\ell)) = \ell$ を満たす。この閉曲線を a, b に対応する分解曲線 (decomposing loop) と呼ぶ。

この閉曲線 ℓ (の各成分) に B^3 で 2-disks \mathcal{D} を張ると、 $f(\mathcal{D})$ は genus 2 以下の separating surface になる。この曲面を分解曲面 (decomposing surface) と呼ぶ。

既約な DS-diagram Σ に対して分解曲面は separating sphere または separating torus である。分解曲面が sphere の場合この sphere は DS-diagram の connected sum を与えるが、一方の多様体が S^3 の場合もあるので多様体の connected sum としては trivial な場合もある。分解曲面が torus の場合この torus は DS-diagram の torus decomposition を与えるが、一方の多様体が solid torus 場合もあるので多様体の torus decomposition としては trivial な場合もある。多様体を prime で incompressible torus を含まないものに限定し、それを表現する DS-diagram としては分解不可能なもののみを考えればよいことが分かる。

知られている prime でない多様体の DS-diagram は分解可能である。そこで次の疑問が起こる。

問題 1.10 non-prime な多様体の分解不可能な DS-diagram は存在するか。

connected sum と種数の間には次の関係がある。

命題 1.11

$$g_{DS}(M_1 \# M_2) \leq \max \{g_{DS}(M_1) + 1, g_{DS}(M_2) + 1, 6\}$$

この命題の証明の中で見るように connected sum の factor である多様体の DS-diagram が与えられたとき、それらから connected sum の多様体を与える DS-diagram が構成できる。この構成の仕方は多様であり、この方法で構成した 2 つの DS-diagram の間の関係を見るのは容易ではない。そこでそのようなものを考察の対象から除外するには、 $\mathfrak{M}(n)$ ではなく

$$\mathfrak{N}(n) = \{M \in \mathfrak{M}(n) \mid M \text{ は prime}\}$$

を考察の対象にする方がよいのかもしれない。DS-diagram でいうと

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(n) &= \{\Sigma \mid g(\Sigma) \leq n\} \\ \mathcal{D}_0(n) &= \{\Sigma \in \mathcal{D}(n) \mid \Sigma \text{ は既約}\} \\ \mathcal{D}_1(n) &= \{\Sigma \in \mathcal{D}_0(n) \mid \Sigma \text{ は indecomposable}\} \end{aligned}$$

とおくとき、 $\mathcal{D}_0(n)$ や $\mathcal{D}_1(n)$ を対象にする方がよいのかもしれない。勿論 $\mathfrak{N}(n)$ と $\mathcal{D}_0(n)$ の間には問題 1.10 で述べたような差があるかもしれない。

DS-diagram や \tilde{G} の形から connected sum に分かれることが分かるようなケースも存在する。

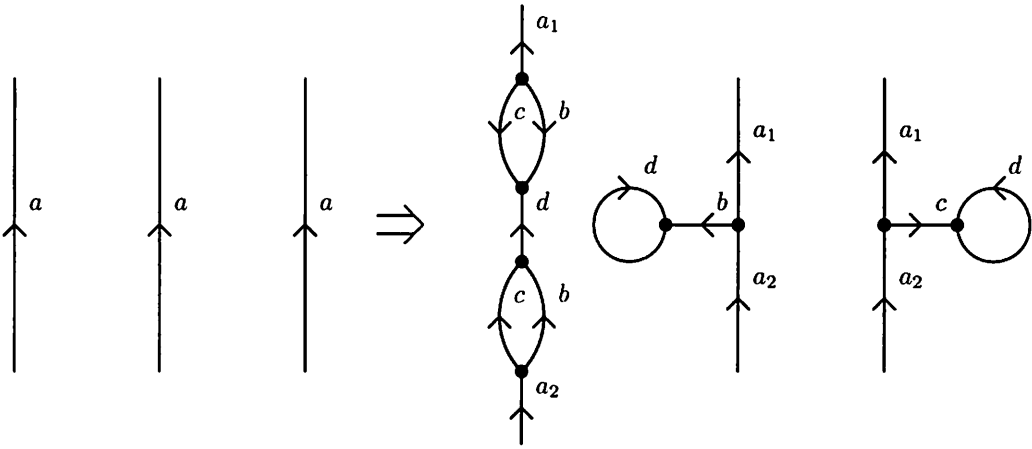
命題 1.12 DS-diagram Σ が 3 重対隣接していれば, Σ は分解可能で, $M(\Sigma) \cong M_1 \# L(3, 1)$ となる。またこの Σ から DS-diagram Σ_1 が構成できて $M_1 \cong M(\Sigma_1)$ となる。

既約な DS-diagram $\Sigma = (S^2, f, G)$ に対し \tilde{G} が 3 重辺を持てば $M(\Sigma) \cong M_1 \# Q_8$ となる。またこの Σ から DS-diagram Σ_1 が構成できて $M_1 \cong M(\Sigma_1)$ となる。

いずれの場合も $g(\Sigma_1) \leq g(\Sigma)$ が成立する。

2 命題の証明と若干の追加事項

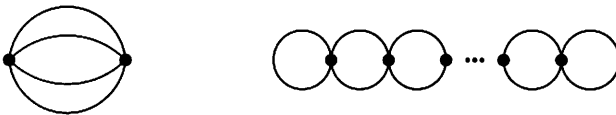
[命題 1.2 の証明] $\Sigma = (S^2, f, G)$ を種数 n の DS-diagram とする。 C^n を \tilde{G} の長さ n のサイクルとする。 C^n に属する \tilde{G} の (向きのついた) 辺の 1 つを a とする。 Σ のラベル a を持つ辺のまわりを次図のように変形し, 別の DS-diagram Σ' をつくる。ただし図において 3 つの辺は離れて存在しており, 左端の辺の右側は中央辺の左側と同一視されているものとする。このとき $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ であり, $g(\Sigma') = g(\Sigma) + 1$ となっている。



[命題 1.3 について] $n = 1$ のときは \tilde{G} の頂点の個数が 1 なので, [1] で分類されている。

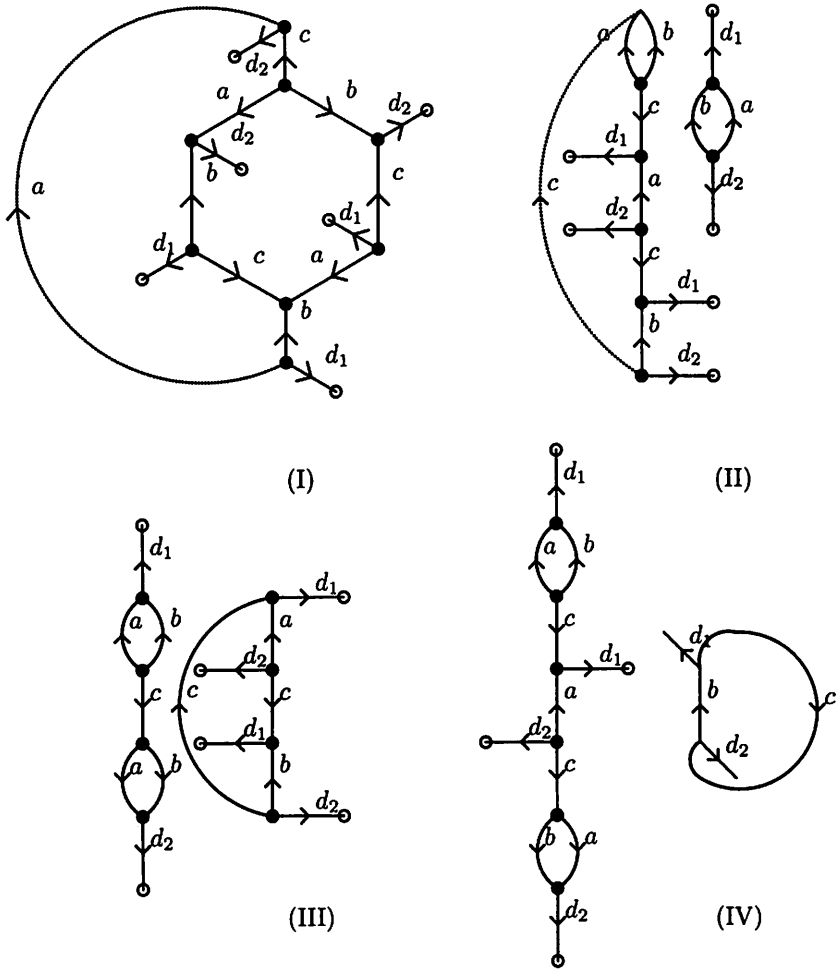
次に $n = 2$ の場合を考える。種数 2 の DS-diagram を分類することも可能であるが, ここでは DS-diagram が与えられたとき多様体を判定することを考える。次の補題は自明である。

補題 2.1 2nd singularity \tilde{G} が $c(\tilde{G}) = 2$ のとき \tilde{G} は次のいずれかである。



4 重辺を持つ graph に関しては [2] で既約な場合は扱っている。DS-diagram は一意的で [1] の (2-10) であり, 多様体は Q_8 である。既約でない場合は対応する DS-diagram は存在しないが, それを示すため次の補題を必要とする。この補題は場合分けしていけば容易に証明できる。

補題 2.2 \tilde{G} が 3 重辺を持つ DS-diagram は次の 4 ついずれかの部分を持つ。ただし図において a, b, c が \tilde{G} の 3 重辺である。



4重辺の場合ラベル d_1 の辺とラベル d_2 の辺がつながる必要がある。identify もこめてつながるのは図左上の場合のみである。補題より4重辺を持つ場合は図の左上で d_1 と d_2 をつなげた図が表現する多様体は Q_8 である。よって以下 \tilde{G} は補題 2.1 図右と仮定する。 \tilde{G} の辺に名前をつけておく。loop は a および z とし、2重辺は a の方から $b_1, c_1, \dots, b_n, c_n$ とする。各2重辺で分解可能なので、decomposing loop l が存在する。そのタイプは次ページの図のようになっている。

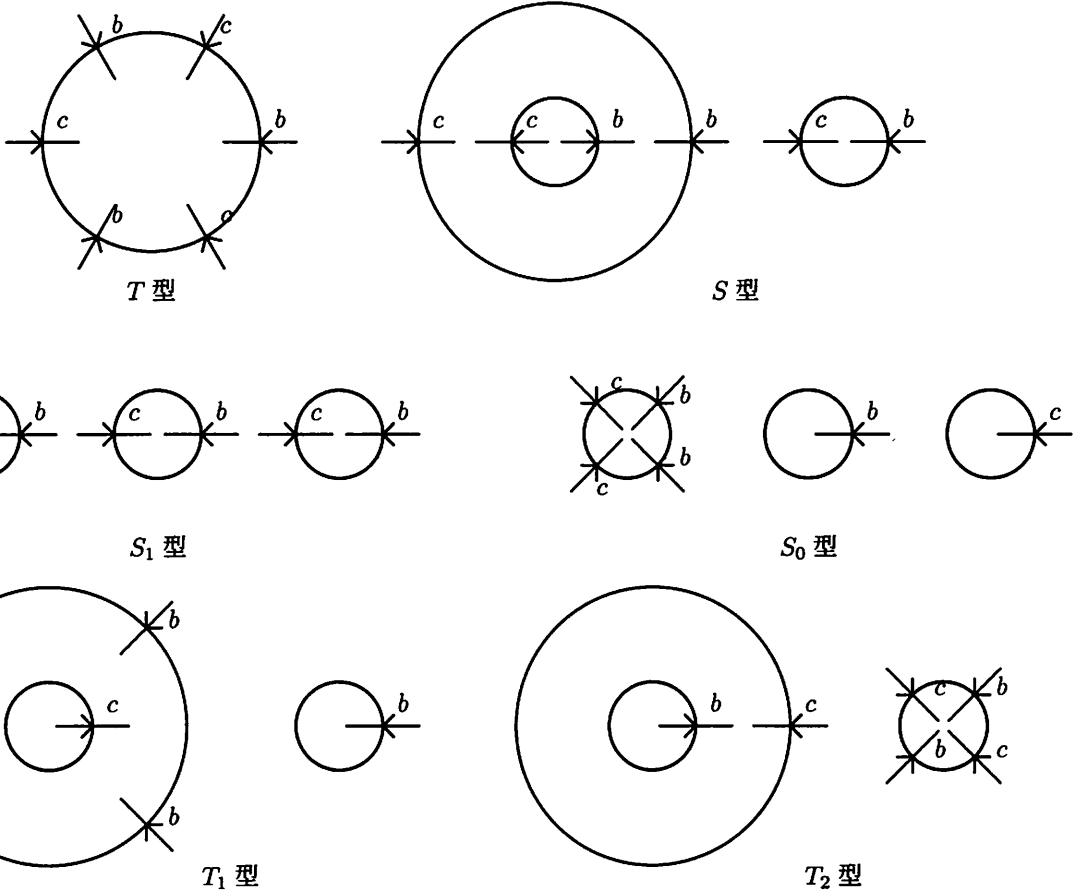
種数2の DS-diagram を以下のようにして S 型, T 型, U_1 型, U_2 型, V 型, W 型(退化型)に分ける。

S 型の分離閉曲線が存在する DS-diagram を S 型とする。このときラベル a をもつ辺が分解曲線により分離されるので1辺形となる辺が存在する。 z についても同様である。このことに注意すると多様体が S^3 であることが分かる。

S_1 型の分離曲線は(1辺形が発生するので) C -変形で消すことができる。この段階で種数1の DS-diagram に「退化」するものがある。これを W 型(退化型)と定義する。以下 W 型はないとする。 T_1, T_2 型の分離閉曲線を含めば消去可能か池田(2-1)[あわびの 2-fold branched cover] (これは後で定義するが U_2 型に分類される)か S 型の分離閉曲線を含むことが分かる。この場合多様体

は S^3 である。

S_0 型の分離閉曲線を含めば S 型の分離閉曲線を含むか、分離閉曲線はすべて T 型であるとしてよい。



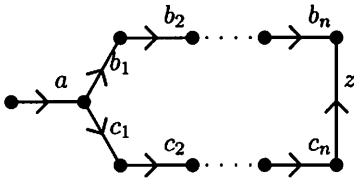
残った DS-diagram はすべての分離閉曲線が T 型であるとしてよい。ラベル a および z を持つ辺が 1 辺形を持たないとき DS-diagram を T 型と呼ぶ。 T 型のとき lens space になるが、タイプの決定は後で行う。

ラベル a の 1 辺形が存在する場合を考える (次ページ図参照)。 b_1, \bar{c}_1 というラベルを連続して持つ面に着目する。この面が z をラベルに持つ辺を含む場合 U 型と定義する。この面がそのような辺を 1 つ含むとき U_1 型、2 つ含むとき U_2 型と呼ぶ。 U_1 型は C -変形で Σ_\emptyset になるので多様体は P^3 である。 U_2 型は C -変形で Σ_S になるので多様体は S^3 である。

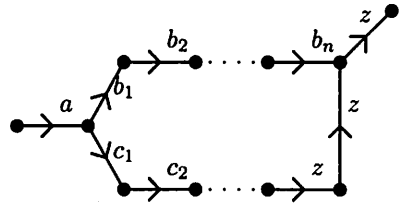
$b_1\bar{c}_1$ 面が z を含んでいないが、 z に隣接している場合 V 型と定義する。この場合 C -変形により Σ_{3W} または Σ_h になるので多様体は $L(3, 1)$ か $S^2 \times S^1$ である。

$b_1\bar{c}_1$ 面のラベルが $b_1, c_1, \dots, b_m, c_m$ であるとする。この面が z を含まず、 z に隣接もしていない場合は C -変形によりラベル $a, b_1, c_1, \dots, b_m, c_m$ の辺を消去することができる。変形した DS-diagram の分離閉曲線はすべて T 型なので、もう一度分類を実行すればよい。

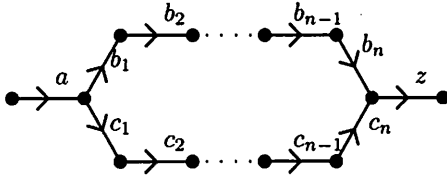
以上により T 型以外の場合の多様体は決定された。



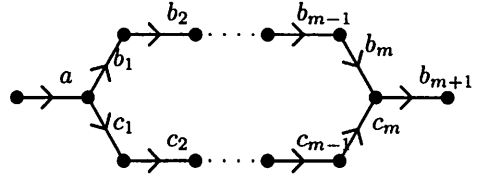
U_1 型



U_2 型



V 型



次に T 型の場合多様体がどうなるかを考えよう。 T 型の DS-diagram が 2 辺形を含めば C -変形できるが、頂点が 2 個の場合は頂点なくなる。 $[1]$ の (2-4) と (2-6) がその場合である。2 辺形をつぶすと、 Σ_{3W} または Σ_h になる。この例以外は C -変形の結果がまた DS-diagram になるので 2 辺形はないとしてよい。

ここで $[1]$ の例がどのタイプが見ておこう。(2-1) は「あわび」の 2-fold branched cover で U_2 型である。(2-2) は U_2 型, (2-3) は U_1 型, (2-4), (2-6) は前述の通り T 型であるが、つぶせば Σ_{3W} または Σ_h になる。(2-5) は向き付け不可能なので対象にしていない。(2-7) は Bing's house で S 型, (2-8) 型は V 型で多様体は $L(3, 1)$ である。

次の結果は最後を除いて $[5]$ の結果の別表現である。

補題 2.3 $p \geq 4$, $p > 2q > 0$ となる互いに素な自然数 p, q に対し 2 辺形をもたない T 型の DS-diagram $\Sigma(p, q)$ で, (1) $M(\Sigma(p, q)) \cong L(p, q)$, (2) $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ ならば $\Sigma(p, q)$ と $\Sigma(p, q')$ は同型である, を満たすものを構成することができる。逆に 2 辺形を含まない T 型の DS-diagram Σ に対しある p, q が存在して $\Sigma \cong \Sigma(p, q)$ となる。

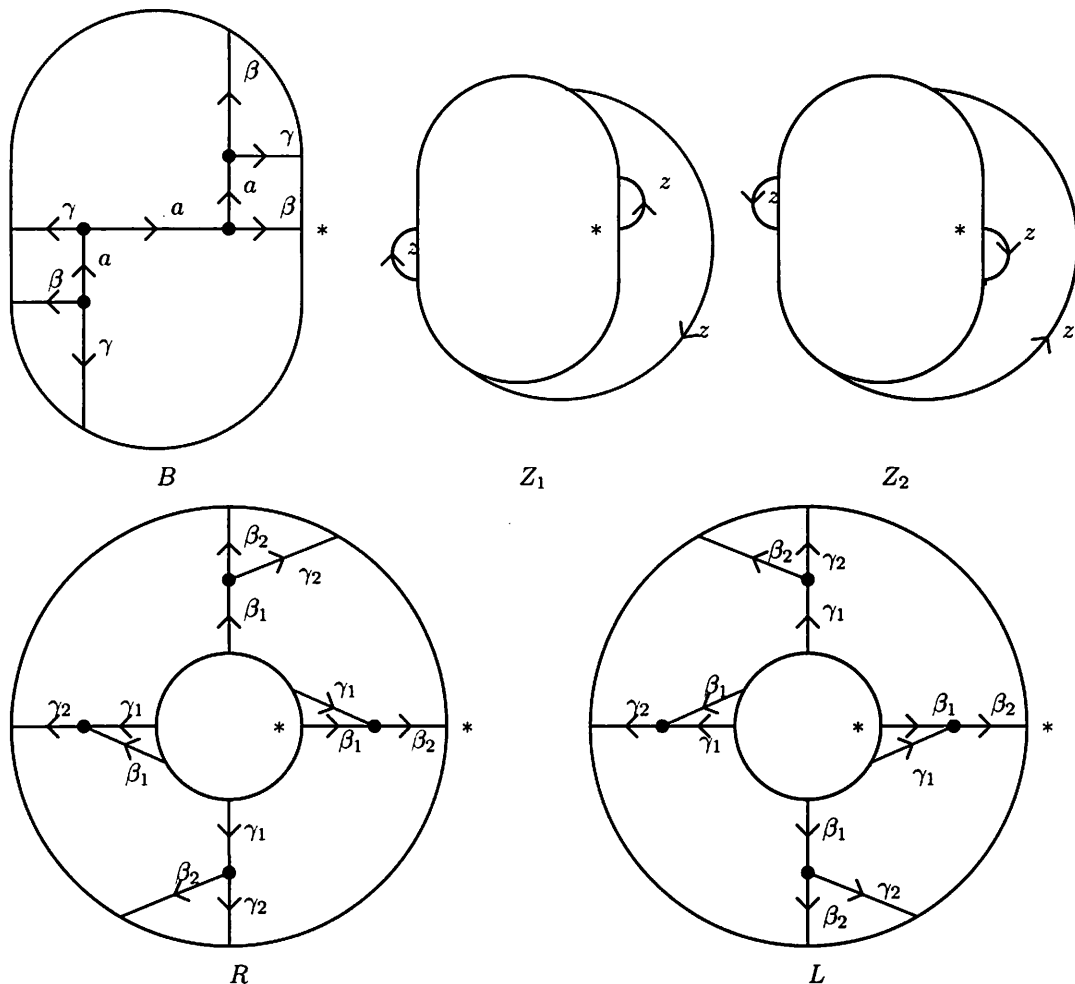
即ちこのタイプの DS-diagram においては多様体と DS-diagram が一対一に対応している。

この補題を証明するため次のような対応を考える。

$$\text{DS-diagram} \iff \text{local DS-diagram の列} \iff \text{行列の列} \iff (p, q)$$

local DS-diagram を定義する。 $\sigma = (E, f, H)$ が次を満たすとき local DS-diagram と呼ぶ； $E \subseteq S^2$ は曲面であり、 H は E 内の graph である。 H の頂点の次数は 1 または 3 であり、次数 1 の頂点全体を $V_1(H)$ とすると $V_1(H) = H \cap \partial E$ となっている。 $f : E \rightarrow P^1$ は onto な local homeomorphism であり、 $E - H$ で 2 対 1, H の辺上及び $V_1(H)$ で 3 対 1, $V_3(H)$ (次数 3 の頂点) 上で 4 対 1 となる。DS-diagram $\Sigma = (S^2, f, G)$ を $f^{-1} \circ f(E) = E$ を満たす E に制限して考えたものと言ってもよい。local DS-diagram $\sigma = (E, f, H)$ が与えられたとき、 $E \subseteq S^2 \subseteq B^3$ と見て ∂E の各 component に B^3 で proper な 2-disk(s) を張る。この disk(s) でカットしてできる component の中で E を含むものを V とする。 V を f で貼り合わせた図形 V/f をこの local DS-diagram が表現する図形といい $M(\sigma)$ で表す。

DS-diagram \iff local DS-diagram の列: local DS-diagram B 及び R, L, Z_1, Z_2 を次のように定義する。向き付きのラベルが同じ辺は f で同じ辺に写されると考えると f が定まっていると考えられる。 Z_1, Z_2 は円の外側が曲面だと考える。それに加えて端点に星印(*)が mark されているとする。local diagram を貼り合わせは星印同士が貼り付くようなものに限ることにする。



図の local DS-diagram に対して $M(B), M(Z_1), M(Z_2)$ は solid torus であり, $M(R), M(L)$ は torus と interval の直積になる。

$\Sigma = (S^2, f, G)$ を 2 辺形を含まない T 型の DS-diagram とする。 \tilde{G} は分解可能であり, 各 $i (i = 1, \dots, n)$ に対し b_i, c_i に対応する分解曲線を C_i とする Σ が T 型なので分解曲線 C_i は 1 個の loop になっている。 \tilde{G} は z 上の 2 点 P, Q で 2 つの連結成分 \tilde{G}_1 と \tilde{G}_2 に分かれる。このことから S^2 の \sim 閉曲線 C_{n+1} で G を 2 つに分け, 一方が $f^{-1}(\tilde{G}_1)$, 他方が $f^{-1}(\tilde{G}_2)$ になるものが存在する。ただし C_{n+1} は C_n と平行なものをとる。

DS-diagram Σ または local DS-diagram σ に対し S^2 の向きを逆にする同相写像で写して得られる diagram を $\bar{\Sigma}, \bar{\sigma}$ と書く。 Σ を C_1, \dots, C_{n+1} でカットしたとき Σ から $n+2$ 個の local DS-diagram が得られるが, ラベル a の辺を含む local DS-diagram から順に $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ とする。 σ_0 または $\bar{\sigma}_0$ は B (と同型) なので $\sigma_0 = B$ と仮定してよい。 σ_1 は 3 通りの可能性があるが 2 辺形が存在しないことから R または L と同型である。以下同様に σ_n まで R または L と同型になる。 σ_{n+1}

[92]

も3通りの可能性があるが1辺形が存在しないことから Z_1 または Z_2 に同型になる。 $\sigma_i, \dots, \sigma_{i+k}$ がすべて R のときこれを R^k と書く。 L についても同様の記法を用いる。この記法でまとめられる所はまとめると local DS-diagram の列

$$BR^{n_1}L^{n_2} \dots Z_i, \text{ または } BL^{n_1}R^{n_2} \dots Z_i \quad (i = 1, 2)$$

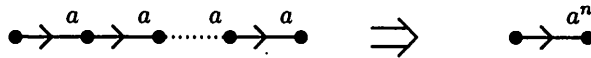
が定まる。

逆に

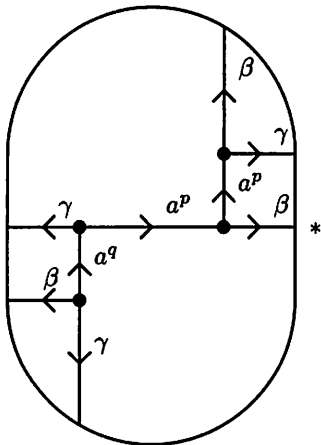
$$BR^{n_1}L^{n_2} \dots Z_i, \text{ または } BL^{n_1}R^{n_2} \dots Z_i \quad (i = 1, 2)$$

が与えられたとき、これを mark の部分で貼り合わせていくと DS-diagram Σ が得られるが、これは2辺形を含まない T 型の DS-diagram である。 $M(B)$ および $M(Z_i)$ が solid torus ということから $M(\Sigma)$ が lens space であることが分かる。

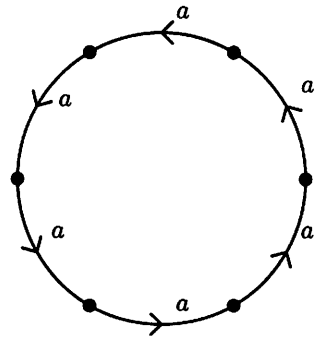
local DS-diagram の列 \iff 行列の列: DS-diagram に対して local DS-diagram を考えたのと同様に diagram に対し local diagram が定義できる。ラベル a の辺が n 個連続した状態を1個の辺に a^n というラベルをつけて表現する。



自然数 p, q に対し下図左のように定義される local diagram を $B(p, q)$, 下図右のように定義される diagram を $L[p, q]$ と表す。 $L[p, q]$ の q は図では分からないが、ラベル a の外側の点が q 本先の内側と同一視するような f を与えるものとする。図は $p = 6$ の場合を描いている。 S^2 の向きを逆にする写像で写して得られる diagram をそれぞれ $\overline{B(p, q)}$, $\overline{L[p, q]}$ と書く。



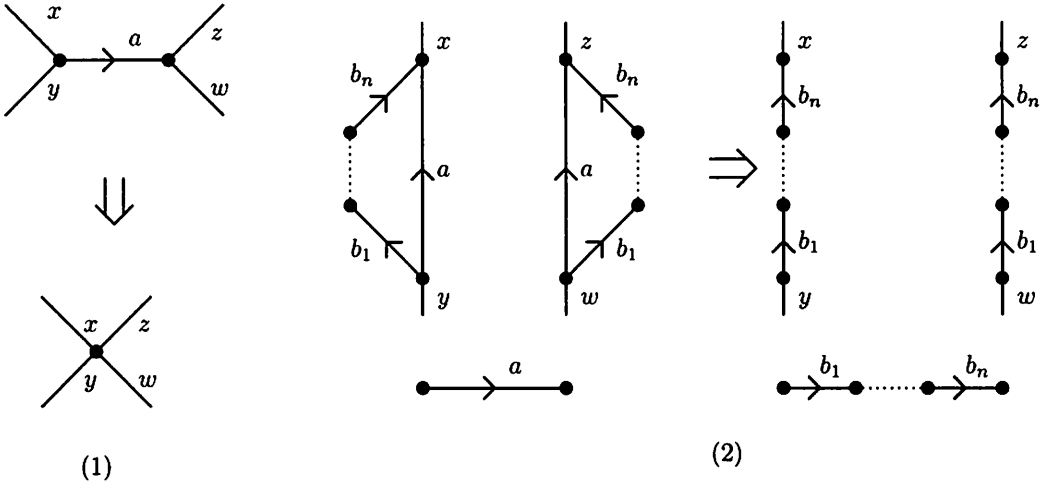
$B(p, q)$



$L[p, q]$

local diagram および diagram の π -変形を次で定義する; (1) ラベル a の辺の端点のラベルが異なるとき、ラベル a をもつすべての辺を1点につぶす変形, (2) 面 F の境界を構成する辺の中にラベル a をもつ辺が1つしかないとき面 F と面 F と同一視される面をつぶし、ラベル a をもつ他の

辺を面 F の境界の他のラベル付き辺の列で置き換える、という2つの変形を考える。2つの辺形およびその逆を有限回ほどこして得られる変形を π -変形と呼ぶ。



spine 上で考えると、変形 (1) は edge を 1 点につぶす変形であり、変形 (2) は面をつぶす変形なので、 π -変形をしても local diagram が表現する多様体は変わらない。 σ を π -変形して τ が得られたとき、 $\sigma \cong \tau$ と書く。(marked) local diagram σ と τ を mark が対応するように貼り合わせて得られる local diagram を $\sigma * \tau$ と書く。

補題 2.4 diagram $B(p, q)$ 及び $\overline{B(p, q)}$ に対し

$$B(p, q) * R^n \cong B(p, np + q), \quad B(p, q) * L^n \cong \overline{B(p + q, np + (n - 1)q)}$$

が成立する。また

$$B(p, q) * Z_1 \cong L[3p + q, q], \quad B(p, q) * Z_2 \cong L[3p + 2q, p + q]$$

が成立する。

補題の証明には π -変形を用いるが容易なので省略する。 $\bar{R} = L, \bar{L} = R$ なので補題より

$$\begin{aligned} \overline{B(p, q)} * R^n &= \overline{B(p, q)} * \bar{L}^n = \overline{B(p, q) * L^n} \cong \overline{B(p + q, np + (n - 1)q)} \\ &= B(p + q, np + (n - 1)q) \\ \overline{B(p, q)} * L^n &= \overline{B(p, q)} * \bar{R}^n = \overline{B(p, q) * R^n} \cong \overline{B(p, np + q)} \end{aligned}$$

が成立する。

行列 $U(n), T(n), E_1, E_2$ を

$$U(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n - 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき $U(0) = id, T(0)E_1 = E_2$ が成立していることに注意する。

local DS-diagram の列

$$BR^{n_1} L^{n_2} \dots Z_i, \quad BL^{n_1} R^{n_2} \dots Z_i$$

[94]

に対し行列の列

$$U(n_1)T(n_2)\cdots T(n_k)E_1$$

等を次の様に対応させる。ただし k は $\cdots R^{n_k} Z_i$ または $\cdots L^{n_k} Z_i$ となる自然数とする。

列 $BR^{n_1}L^{n_2}\cdots Z_1$ に対しては

$$U(n_1)T(n_2)T(n_3)\cdots T(n_k)E_1$$

を, 列 $BR^{n_1}L^{n_2}\cdots Z_2$ に対しては

$$U(n_1)T(n_2)T(n_3)\cdots T(n_k)T(0)E_1$$

対応させる。また列 $BL^{n_1}R^{n_2}\cdots Z_1$ に対しては

$$U(0)T(n_1)T(n_2)T(n_3)\cdots T(n_k)E_1$$

を, 列 $BL^{n_1}R^{n_2}\cdots Z_2$ に対しては

$$U(0)T(n_1)T(n_2)T(n_3)\cdots T(n_k)T(0)E_1$$

を対応させる。この対応には逆対応が存在する。

行列の列 $\iff (p, q)$ 行列の列

$$U(n_1)T(n_2)\cdots T(n_k)E_1$$

に対し

$$(1, 1)U(n_1)T(n_2)\cdots T(n_k)E_1 = (p, q)$$

となる p, q を対応させる。ここで行列の並びは列ではなく積と見る。 p, q は互いに素な自然数であり $p \geq 4$ かつ $p > 2q$ が成立する。

$(p_1, q_1)U(n) = (p, q)$ のとき

$$\frac{q}{p} = n + \frac{q_1}{p_1}$$

が成立している。 $(p_1, q_1)T(n) = (p, q)$ のとき

$$1 + \frac{q}{p} = n + \frac{1}{1 + \frac{q_1}{p_1}}$$

が成立している。 $(p_1, q_1)E_1 = (p, q)$ のとき

$$\frac{p}{q} = 2 + \left(1 + \frac{q_1}{p_1}\right)$$

が成立している。よって

$$\frac{p}{q} = 2 + n_k + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_{k-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{2 + n_1}}}}}$$

が成立する。逆に互いに素な自然数で $p \geq 4$ かつ $p > 2q$ を満たす (p, q) に対し (p, q) から n_1, \dots, n_k は復元できるので行列の列を対応させることができる。

$qq' \equiv \pm 1$ のときを考えるために Gauss の記号を確認しておく。 $[k_0, k_1, \dots, k_n]$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} [k_0] &= k_0 \\ [k_0, k_1] &= k_0 k_1 + 1 \\ [k_0, k_1, k_2] &= k_0 k_1 k_2 + k_0 + k_2 \\ [k_0, k_1, \dots, k_n] &= [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}] k_n + [k_0, k_1, \dots, k_{n-2}] \end{aligned}$$

このとき

$$\frac{p}{q} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_{n-1} + \frac{1}{k_n}}}}}$$

とすると

$$\frac{p}{q} = \frac{[k_0, k_1, \dots, k_n]}{[k_1, k_2, \dots, k_n]}$$

が成立する。

補題 2.5

$$[k_0, k_1, \dots, k_n] = [k_n, k_{n-1}, \dots, k_0]$$

が成立する。また

$$[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}][k_1, k_2, \dots, k_n] = [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}][k_0, k_1, \dots, k_n] + (-1)^n$$

が成立する。

最初の式はよく知られた式であり例えば [3] 等を書いてある。2 番目の式がよく知られているかどうかは知らない。ここでは数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき $[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}] = [\emptyset] = 1$ と解釈すると、

$$\begin{aligned} [k_0][k_1] &= k_0 k_1 = k_0 k_1 + 1 + (-1) \\ &= 1[k_0, k_1] + (-1) = [\emptyset][k_0, k_1] + (-1)^1 \end{aligned}$$

となるので $k = 1$ のとき成立している。 $k = n - 1$ のときの成立を仮定すると

$$\begin{aligned} [k_0, k_{n-1}][k_1, k_n] &= [k_0, k_{n-1}] \left([k_1, k_{n-1}] k_n + [k_1, k_{n-2}] \right) \\ &= [k_1, k_{n-2}][k_0, k_{n-1}] + [k_0, k_{n-1}][k_1, k_{n-1}] k_n \\ &= [k_0, k_{n-2}][k_1, k_{n-1}] - (-1)^{n-1} + [k_0, k_{n-1}][k_1, k_{n-1}] k_n \\ &= [k_1, k_{n-1}] \left([k_0, k_{n-1}] k_n + [k_0, k_{n-2}] \right) + (-1)^n \\ &= [k_1, k_{n-1}][k_0, k_n] + (-1)^n \end{aligned}$$

となり 2 番目の式が示される。■

よって

$$\begin{aligned} (1, 1)U(n_1)T(n_2)\cdots T(n_k)E_1 &= (p, q) \\ (1, 1)U(n_k)T(n_{k-1})\cdots T(n_1)E_1 &= (p', q') \end{aligned}$$

とおくと $p = p', qq' \equiv \pm 1 \pmod p$ が成立している。

逆に $p \geq 4, p > 2q > 0, p > 2q' > 0$ かつ $qq' \equiv \pm 1 \pmod n$ となる p, q, q' を考える。 p, q に対し

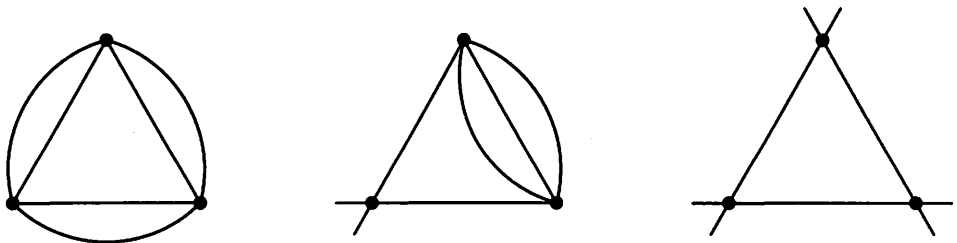
$$(1, 1)U(n_1)T(n_2)\cdots T(n_k)E_1 = (p, q)$$

となる n_1, \dots, n_k が存在する。このとき

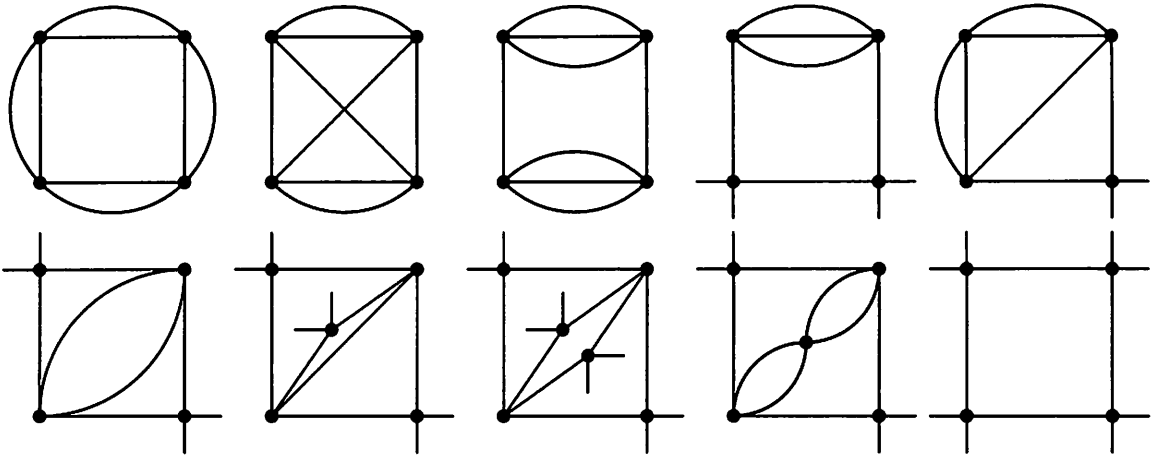
$$p = [2 + n_1, n_2, \dots, 2 + n_k], \quad q = [n_2, \dots, 2 + n_k]$$

となっている。 $\tilde{q} = [n_{k-1}, \dots, 2 + n_1]$ とおくと $p > 2\tilde{q}$ であり、 $q\tilde{q} \equiv \pm 1$ が成立している。 $qq' \equiv -q\tilde{q}$ とすると、 $\tilde{q} = p - q'$ となるが共に $p > 2q' > 0, p > 2\tilde{q} > 0$ なので矛盾。 よって $qq' \equiv q\tilde{q}$ である。 群構造よりこのような元は $\pmod p$ で一意的なので $\tilde{q} = q'$ が成立する。 対応する DS-diagram は一方の数字の列を逆にしたものが他方の数字の列になっているので、 DS-diagram は 0 と無限遠点を交換したものになっている。 よって同値であることがわかる。 以上で補題 2.3 の証明終わる。 ■

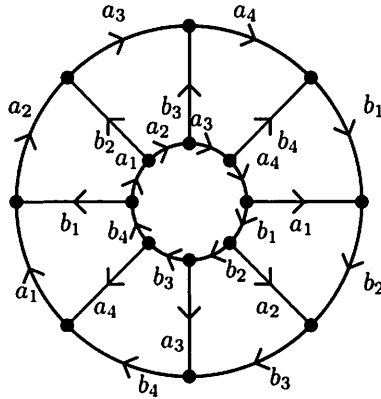
種数 3, 4 は場合分けをひたすら実行していくので詳細は省略する。 最初に種数 3 の場合を考える。 種数が高くなると、 種数 2 で考えたようにすべての DS-diagram を対象にすることは難しくなる。 そこで既約なもののみを対象にしたい。 DS-diagram が既約でない場合 C -変形を実行することができる。 一般の場合は種数が高くなる可能性があるが、 種数 3 の場合は変形を実際に見ることにより、 その様なことが起こらないことが分かる。 よって、 既約な種数 3 の DS-diagram $\Sigma = (S^2, f, G)$ のみを対象に考察をすればよい。 \tilde{G} は次図左であるか subgraph として次図中央または右の部分を持つ。 \tilde{G} が次図左の場合 DS-diagram が決定され、 表現する多様体は Q_{12} になる。 次図中央または右の部分を持つ DS-diagram は既約ではないことが分かり、 そのような DS-diagram が表現する多様体はすでに種数 2 で出てきているものになることが分かる。



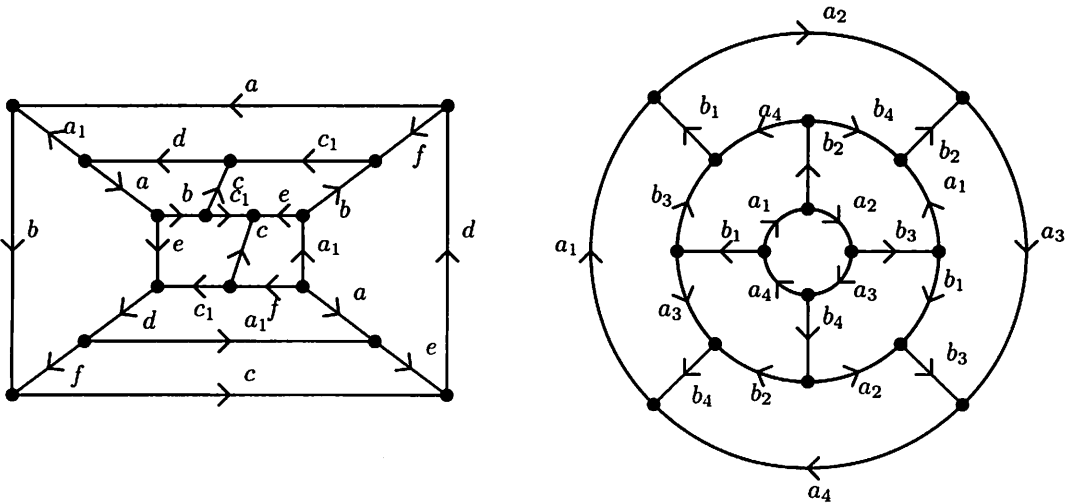
種数 4 の場合 \tilde{G} は次図の graph か graph を subgraph として含む。



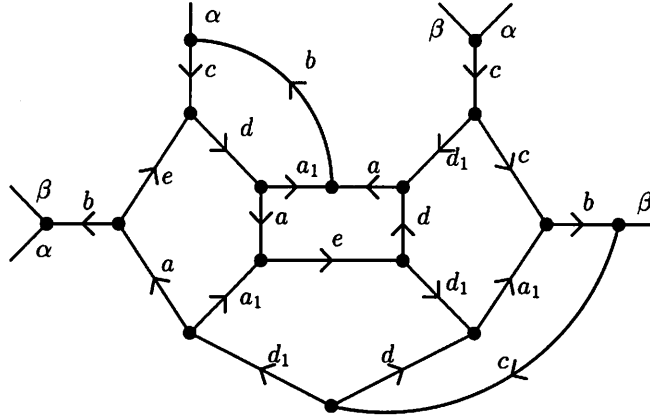
図上左端の graph を \tilde{G} にもつ DS-diagram は次のもので多様体は Q_{16} である。



図上左 2 番目の graph を \tilde{G} にもつ DS-diagram は 2 つあり、多様体は D_{24} と $B(3, 2, 4)$ である。

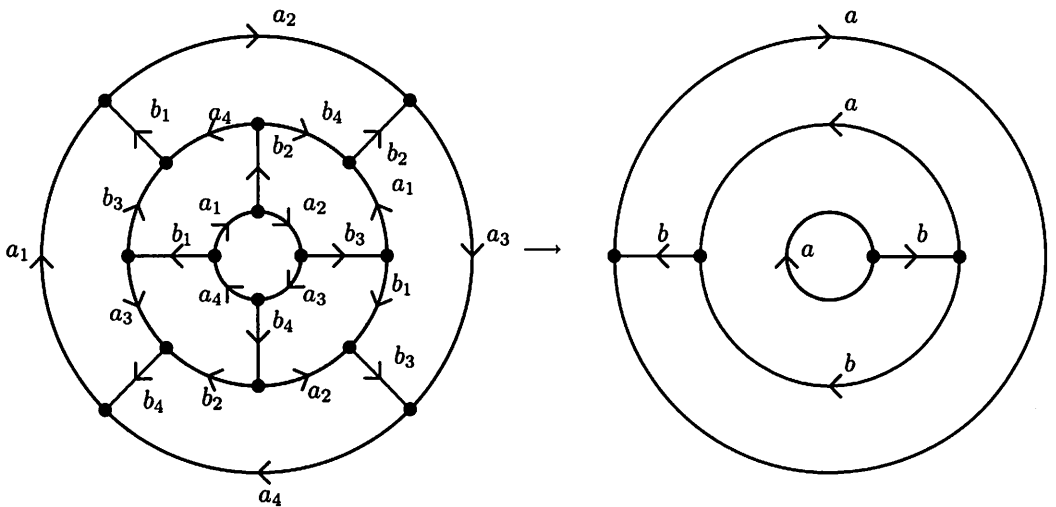


図上右端の graph を \tilde{G} にもつ local DS-diagram は次のもので多様体は interval 上の twisted Klein bottle bundle である。よってこの local DS-diagram に solid torus を貼り付けた DS-diagram と、この local DS-diagram 2つを境界で貼り合わせた DS-diagram は種数 4 である。貼り合わせは local DS-diagram L および R を間にどのように入れるかで決定される。



他の local DS-diagram は既約ではないことが分かり、 C -変形を実行しても種数が上がらないことが分かる。以上で命題 1.3 の証明が終わる。 ■

[命題 1.4 の証明] $B(2, 3, n) \in \mathfrak{M}(n)$ については [4] で述べられている。そこでは「crack」と呼ばれる、knot の Seifert surface で DS-diagram との交わりがきれいなものを用いて branched cover を構成している。DS-diagram として「あわび」を、knot としてその 1 辺形に対応する DS-knot (trefoil = $(2, 3)$ -torus knot) に対し branched cover を構成している。図は 4-fold branched cover である。trefoil の n -fold branched cover なので多様体が $B(3, 2, n)$ である。

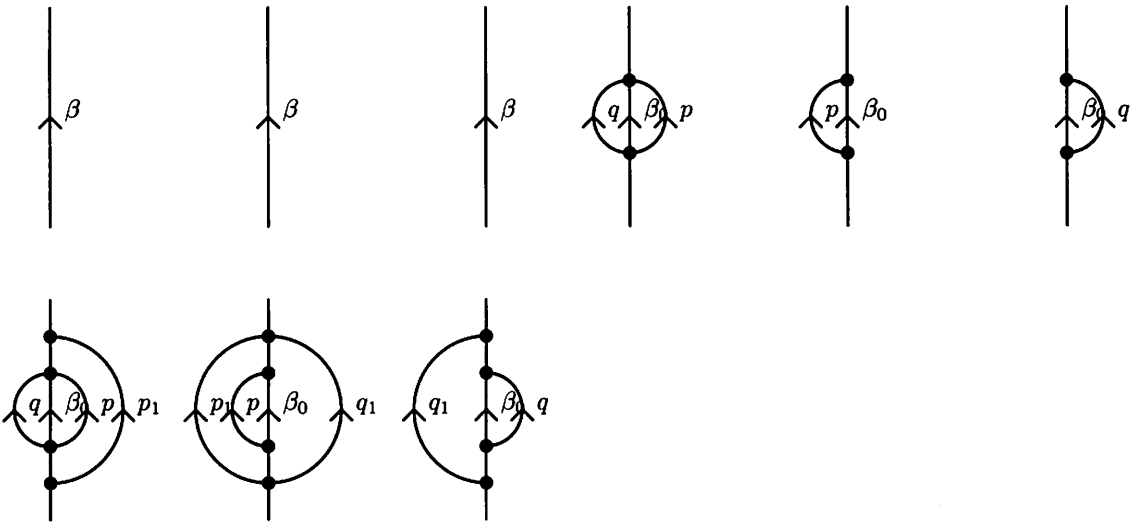


Q_{16} の 8 辺形の部分を $2n$ 辺形にした DS-diagram を構成することは容易である。この DS-diagram を π -変形することで多様体が Q_{4n} であることが分かる。この DS-diagram の \tilde{G} は n サイクルの

各辺を2重化したものなので $Q_{4n} \in \mathfrak{M}(n)$ が分かる。 ■

種数が小さいときは出てくる多様体は elliptic である。Euclidian は6で出てくるが、種数5は分類できてないので5で出てくるという可能性もある。 $Q_{4n} \in \mathfrak{M}(n)$ であるが、もし $g_{DS}(Q_{4n}) = n$ であれば種数の大きな所にも elliptic な多様体があることになる。大きな n については $g_{DS}(Q_{4n}) = n$ が成立すると思われる。

[命題 1.11 の証明] DS-diagram $\Sigma_1 = (S^2, f_1, G_1), \Sigma_2 = (S^2, f_2, G_2)$ に対し $M(\Sigma_1) \# M(\Sigma_2)$ の DS-diagram $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ を次のように構成できる。 Σ_1 の辺のラベル α を1つ選んで固定する。 Σ_2 の辺のラベル β を1つ選んで固定する。 Σ_2 に対し次の操作を行う；ラベル β を持つ辺の1つを選んで、図の閉曲線 pq を張る proper な2-円板でカットする。次にラベル β をもつ別の辺の周りで、前回のカットした曲線と同一視される部分を含む2-円板 p_1q_1 でカットする。



Σ_2 は3個の球面の diagram に変形されている。ラベル β_0 を持つ辺を含む領域をラベル α を持つ3つの辺の任意の1つの中央部と貼り合わせる。これを各辺について行う。この操作で得られる DS-diagram を $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ と書く。このとき種数は

$$g_{DS}(\Sigma_1 \# \Sigma_2) \leq g_{DS}(\Sigma_1) + g_{DS}(\Sigma_2) + 4$$

となる。そこで少し細工をする。 α, β が1辺形の場合はこれより小さくなるので、 Σ_i が1辺形を持たないときは命題 1.2 で行った変形を実行すると種数が1あがるが1辺形を持つ。できた1辺形を α 及び β として選べば命題が得られる。 ■

命題 1.12 は命題の形では書いていないが [2] で示されている。

種数に値することを主張したつもりなのですが、説得的だったかどうかは…

参考文献

[1] Ikeda, H. and Inoue, Y., Invitation to DS-diagram, Kobe J. Math., 2 (1985)

[100]

- [2] Kouno ,M., DS-diagram のいくつかの例, 箱根セミナー 2006 記録
- [3] 高木貞治, 初等整数論, 岩波
- [4] Yamashita ,M., Branched covering space と DS-diagram, 箱根セミナー 2000 記録
- [5] Yokoyama, K., Lens space の DS-diagram について, Theory of Spines of 3-manifold(数理解析研講究録 563,1985)