

DS-diagram のいくつかの例

河野正晴 (北見工業大学)

DS-diagram を用いて 3 次元多様体を分類するにはどのような方針で行えばよいのだろうか。今の所明確な方針があるわけではないので、例を眺めることで方針を探ろうというのがこのノートの目的である。

DS-diagram の一般的な用語については箱根セミナー記録を参考にして下さい。generalized DS-diagram については [1] を参照してください。DS-diagram は向き付け不可能な多様体も扱えるが、このノートでは多様体はすべて向き付け可能を仮定する。

1 C-変形

一般の DS-diagram は多様なので、最初につぶす変形 (C-変形) を実行して整形しておく。C-変形を定義する前に用語をいくつか定義しておく。

定義 1.1 変形の途中で DS-diagram でないものも出てくるので、そのようなものも考えるため一応次を定義しておく。 S^2 上のグラフ G と S^2 から complex P への複体写像 $f: S^2 \rightarrow P$ で onto local homeomorphism であるものが存在して $f|_{S^2-G}$ が 2 対 1 であるとき、 $\Sigma = (S^2, G, f)$ を **diagram** であるという。diagram の頂点 (G の頂点) または辺 (G の辺) または面 ($S^2 - G$) を σ とする。 $f(\sigma) = \tau$ となるとき σ のラベルは τ であるという。ただし辺に対しては向きもこめて考えるものとし、向きを逆にしたラベルは τ と書く。 $f(G)$ を通常 \tilde{G} と書き、 P の 2nd singularity という。頂点、辺、面 σ に対しそのラベルを τ とする。ラベル τ を持つ頂点、辺、面の個数を σ の重複度という。DS-diagram は頂点の重複度 4、辺の重複度 3、 $G \neq \emptyset$ が連結で hoop を含まない diagram である。

$\Sigma = (S^2, G, f)$ を DS-diagram とする。 G の辺 $e \in E(G)$ が退化辺であるとは、 e の 2 つの端頂点のラベルが同じであることをいう。 Σ の n 辺形 X が退化 n 辺形であるとは、 σ の境界 $\partial\sigma$ の中に退化辺があるときをいう。

n 辺形 σ, σ' が同じラベル X を持つとき、一方を X^+ 、他方を X^- と書くことが多い。 X^+ と X^- が隣接するとき対隣接しているという。今まで一本足と呼んできたことを自己隣接と呼ぶことにする。

図 1.1 は「あわび」と呼ばれる DS-diagram であるが、頂点はすべて同じ点に同一視されるので、すべての辺が退化辺である。また X^+ および X^- は対隣接している。更にそれぞれは自己隣接もしている。

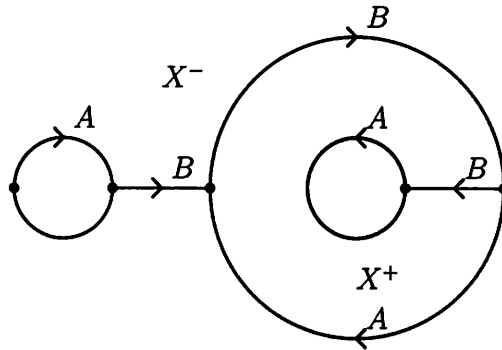


図 1.1

これから変形を定義していく。

定義 1.2 (1) Σ が 1 辺形をもつときそれをつぶす図 1.2 の様な変形が考えられる。これを 1 辺形つぶしと呼ぶ。DS-diagram の場合、頂点の重複度は 4、辺の重複度は 3、面の重複度は 2 であるが、変形 (1) を行うとそれは変わる。図で見ると、ラベル A の辺はなくなり、ラベル B, C の辺は重複度 3 で変わらないが、端頂点の一方 (ラベル V_1, V_2 の頂点) の重複度は 2 であり、ラベル @ のついた重複度 1 の辺が発生している。重複度 1 の辺を free face と呼ぶ。

この変形を行うと、free face が発生し、diagram は DS-diagram ではなくなる。しかし、後で定義する free face をつぶす変形を実行すると多くの場合 DS-diagram に戻る。

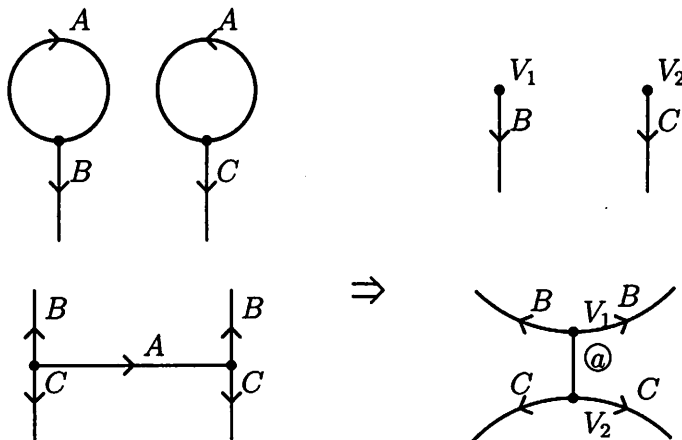


図 1.2

この変形をスパインで見ると図 1.3 のようになっている。

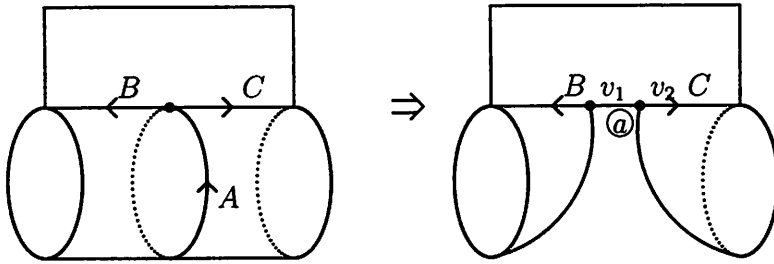


図 1.3

変形 (1) は次の変形 (自己隣接つぶし) の特殊な場合とも考えることができる。スパイン上で見ると図 1.4 のような変形である。この変形を (1)' と呼ぶ。変形 (1) と同様に変形の結果は DS-diagram ではなくなり、free face が発生する。

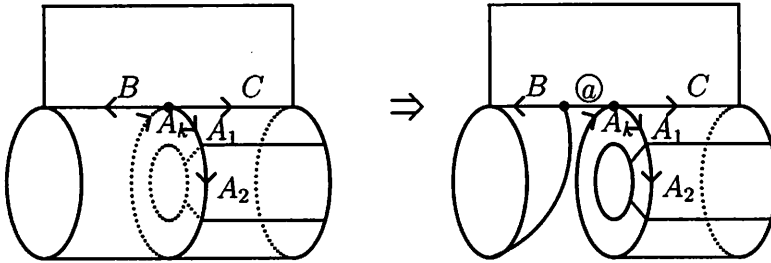


図 1.4

この変形 (1)' を DS-diagram 上で描くと図 1.5 のようになっている。

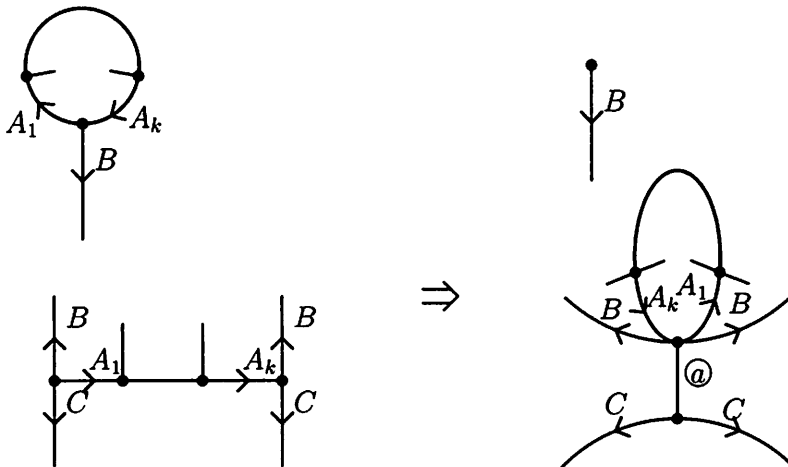


図 1.5

(2) DS-diagram に非退化2変形が存在するときそれをつぶす図 1.6 のような変形が考えられる。この変形で頂点、辺、面の重複度が変わることはない。図 1.6 では次数2の頂点が発生しているように見えるが、これは後で定義する変形で「除きうる」頂点である。ただしグラフ G の連結性がくずれることはある。この場合 DS-diagram は generalized DS-diagram に変わる。

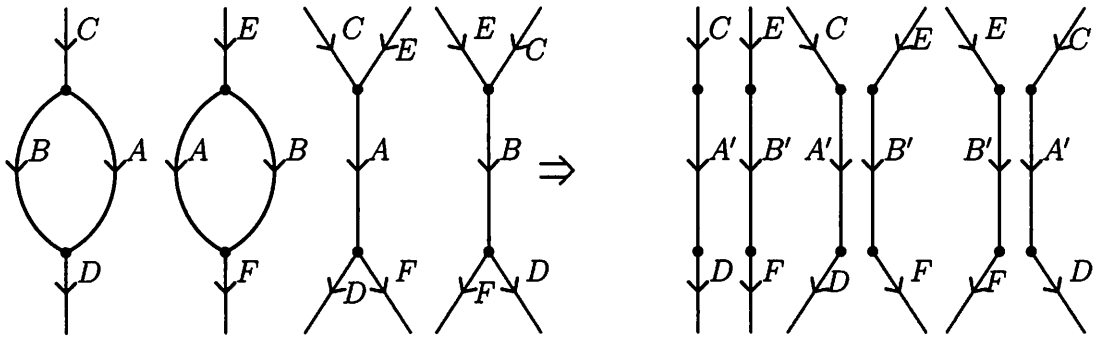


図 1.6

(3) DS-diagram に非退化3変形が存在するときそれをつぶす図 1.7 のような変形が考えられる。この変形で頂点、辺、面の重複度が変わることはない。グラフ G の連結性も変わらず、変形前が DS-diagram ならば変形後も DS-diagram になっている。

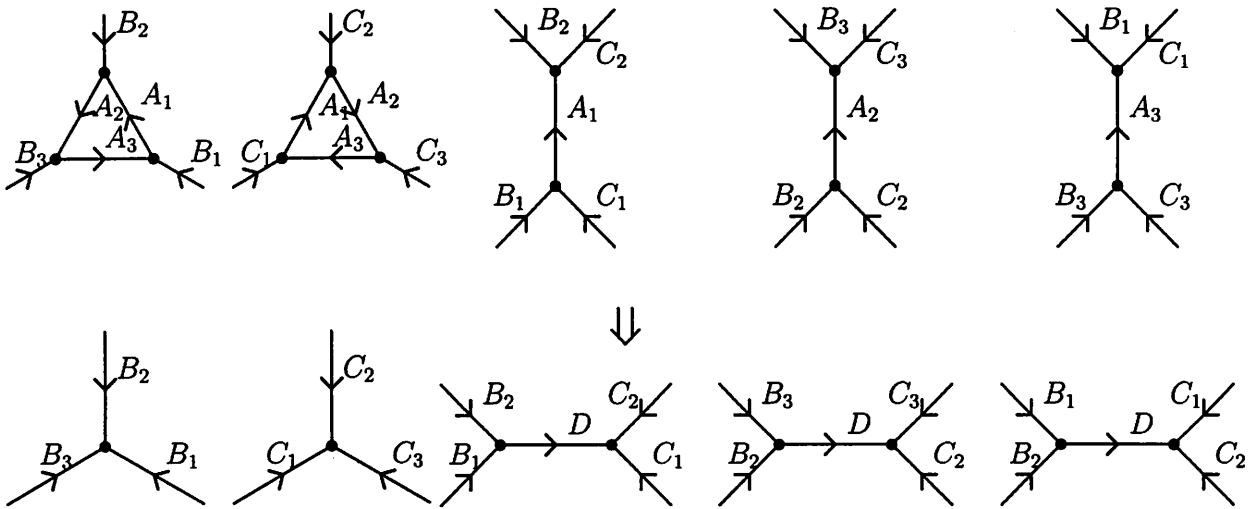


図 1.7

基本的な変形はここまでであるが、その他次の変形も C-変形とする。

(4) free face つぶし 変形 (1), (1)' を行うと free face が発生する。この発生した free face をつぶして行く変形が変形 (4) である。free face を一度につぶすと「つぶしすぎ」てしまい、スパインが1点にまでなってしまう場合も起こる。我々は球面上の diagram の範囲で考えたいので一度に変形を行わず、1つの辺に対してのみ行う変形を考えている。

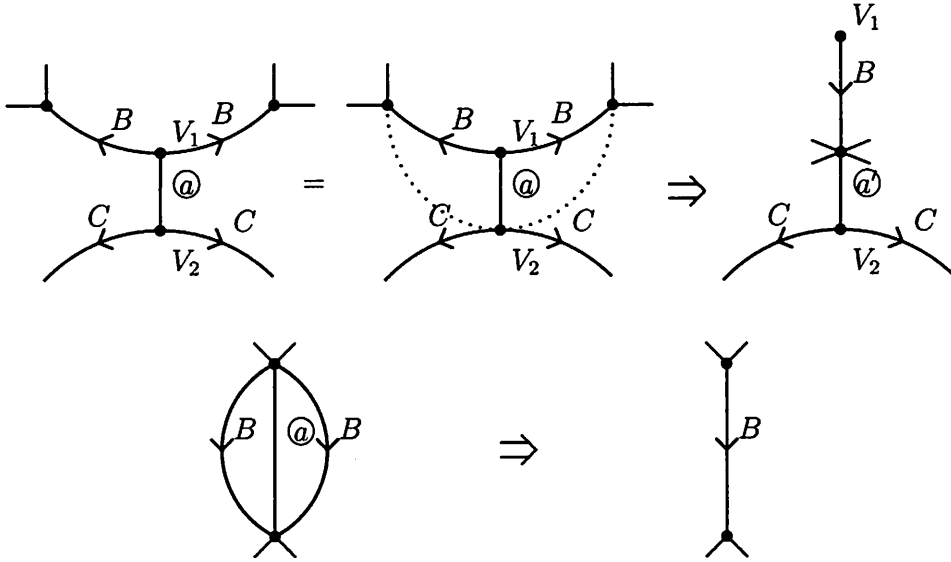


図 1.8

(5) 頂点, 辺の取り除き 変形 (1),(1)',(2),(4) などを行うと頂点や辺の重複度が下がる場合がある。重複度2の辺や頂点は重複度2である面の境界(の一部)であるので、同じラベルを持つ辺や頂点2つを一度に取り除く変形ができる。

次数2の頂点があるとする。頂点の重複度が3であり、2つの重複度3の辺の境界になっている場合、頂点を消し2つの辺を1つの辺にそれぞれ変える変形が考えられる(図 1.9 参照)。これらの変形は写像 f を変えず、実際上は何も行っていない変形である

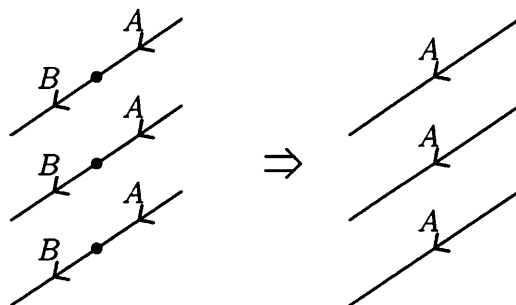


図 1.9

(6) GS-cancel diagram が DS-diagram ではなく, generalized DS-diagram (グラフ G が非連結) になったとき, 次の性質をもつ loop (non-trivial loop と呼ぶ) が S^2 上に存在する場合が多い。

- (1) $L \cap G = \emptyset$ 。
- (2) L が S^2 上で張る disk は G と交わる。
- (3) $L \cap \tau(L) = \emptyset$, ここで τ は $S^2 - G$ 上で定義される generalized DS-diagram から決まる involution とする。

この loop L に対し 3-球体 B^3 内の proper な 2-disk D, D' で $\partial D = L, \partial D' = \tau(L), D \cap D' = \emptyset$ となるものが存在する。

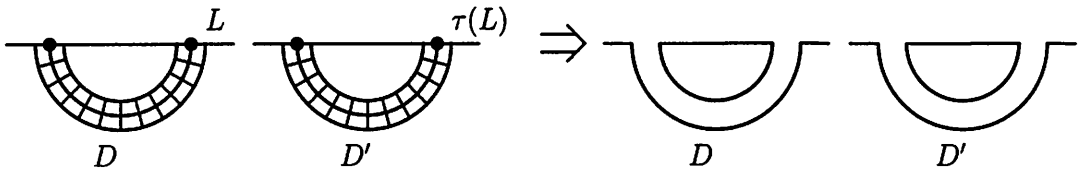


図 1.10

$U(D) = D \times [-1, 1], U(D') = D' \times [-1, 1]$ を D および D' の正則近傍とする。ただし $\tau(\partial D \times \{\pm 1\}) = \partial D' \times \{\pm 1\}$ とする。このとき B を $B^3 - \overset{\circ}{U}(D) - \overset{\circ}{U}(D')$ において $D \times \{-1\}$ と $D' \times \{-1\}$ および $D \times \{1\}$ と $D' \times \{1\}$ を貼り付けたものとする。 $\partial D \times \{-1\}$ および $D' \times \{1\}$ は free circle になる。他に singularity が存在する場合, 変形 (8) (まだ定義していない) を実行し更に変形 (4) を free face が存在する限り実行する。 B は 3-球体か 3-球体 2 個になっており, ∂B は自然に generalized DS-diagram になる。これを Σ' とする。 B が 3-球体のとき $M(\Sigma) \cong M(\Sigma') \# (S^2 \times S^1)$ となる。 B が非連結のとき $M(\Sigma) \cong M_1 \# M_2$ と連結和に分かれているが, $M(\Sigma') \cong M_1 \cup M_2$ となる。 B が非連結の場合は連結成分に制限して考えると, それぞれ $M_1 = M(\Sigma_1), M_2 = M(\Sigma_2)$ となる DS-diagram Σ_1, Σ_2 になるので, それを対象に考えて行く。

(7) 3重隣接の解消

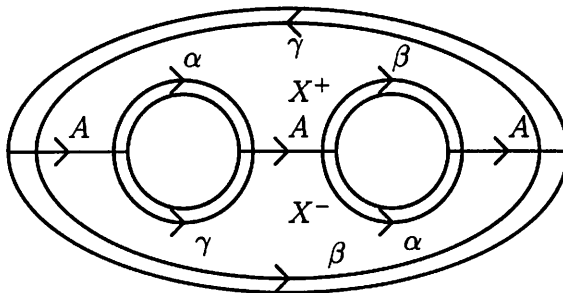


図 1.11

面が同じラベルのついた辺を3つ持っているとき図 1.11 のようになっている。 $X^+ \cup X^-$ の境界の3つの circle の少し内側の circle はそれぞれラベル α, β , ラベル β, γ , ラベル γ, α によって同一視される。この3つ circle に変形 (6) と同様に proper な2-円板を張り、そこでカットして同様の操作を行うと2つの diagram が得られる。一方の diagram のグラフ G は円周であり、重複度3になっている。これは $3W$ と呼ばれる diagram であり、多様体は lens space $L(3, 1)$ になる。もとの多様体は $L(3, 1) \# M$ という形をしていることがわかる。もう一方の diagram を対象に考察を進めて行く。

(8) free circle with GS の変形 diagram に free circle (重複度1の hoop) があり、他にも辺や頂点があるとき、この free circle の両側に対応する同じラベルの辺が存在する。これらを貼り付けると free circle が free face に変わる。この変形を変形 (8) と呼ぶことにする。これが (一応) 最後の変形である。

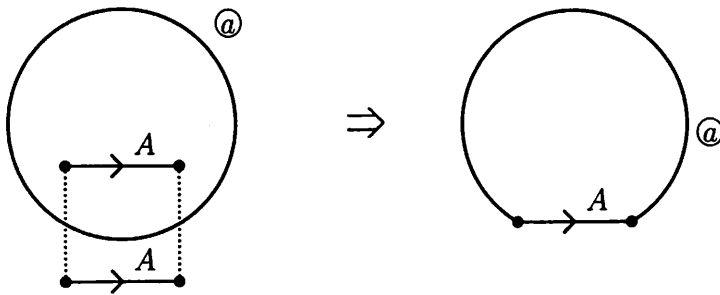


図 1.12

ここで変形の順序について1つ制限をつける。変形 (1) または (1)', (6) を行うと free face が発生する。そのとき free face が存在する限り次に行う変形は変形 (4) とする。変形 (4) を行った後引き続き変形 (4) を行うために変形 (5) が必要な場合もある。その場合は変形 (5) を行った後に引き続き変形 (4) を行うものとする。即ち変形の優先度は変形 (5) が最も高く、次が変形 (4) とする。同時にいくつか変形が可能なときは優先度が高いものから実行するものとする。

1 辺形つぶしを行い、発生した free face をつぶす過程で別の k 辺形 ($k \leq 3$) がなくなったとする。このとき最初の1 辺形つぶしの直後に k 辺形つぶしを実行すると、ここで述べている結果を得るためにはもう1つの変形 (3-球体を切り離して貼り付ける) が必要になる場合がある。それをしないためにこの制限をつけることにする。

C-変形を実行すると free face が発生したり、重複度が落ちるなど結果は DS-diagram ではなくなる。しかし C-変形を可能な限り続けて行くと多くは DS-diagram になる。それを命題として確認しておこう。

命題 1.3 C-変形を可能な限り実行していくと次の3つを除き DS-diagram になる。3つの例外は、(1) free circle, (2) $G = \emptyset$ の generalized DS-diagram, (3) $G = \text{circle}$ で重複度3の generalized DS-diagram, である。

証明 いずれの変形でも重複度が上がることがないこと及び面の重複度は2で変わらないことを注意しておく。変形の途中でグラフ G の頂点の次数が上がることがあるが、スパインに関する考察から、そのような次数を上げる辺は変形 (5) で除きうる辺であることが分かる。よってグラフの頂点の次数は3以下である。

次数1の頂点は変形 (5) で除きうるか、free face の端点になっているので変形 (4) が実行可能であるので、次数1の頂点はないとしてよい。頂点は面の境界に存在しているので、次数2の頂点の重複度は3以下である。よって変形 (5) で除くことができる。よってグラフ G の頂点の次数は(頂点が存在すれば) 次数3である。

free circle のみからなる diagram はこれ以上変形できないので1番目の例外である。この例外以外に free face または free circle (この場合 free circle with generalized DS-diagram) をもつ diagram があれば変形可能なので free face 及び free circle はないとしてよい。

辺の重複度が2であったとすると、変形 (5) でその辺を除去できる。よって辺の重複度は3となる。頂点の重複度が4以下なので頂点の重複度は4であることが分かる。以上により diagram は球面数1の generalized DS-diagram であることが分かる。グラフ G が非連結の場合 GS-cancel ができるので、 G は連結である。このとき G が頂点を持ては DS-diagram になる。よって例外のグラフは頂点を持たない。そのようなものは、(2) empty graph と (3) 重複度3の circle であることが分かるので証明が終わる。■

ここで退化2辺形について触れておこう。退化2辺形を持つ generalized DS-diagram は図 1.13 の3つしか存在しない。左端の図が退化2辺形を持つ唯一の DS-diagram で、多様体は lens space $L(4, 1)$ である。以下退化2辺形は存在しないとして議論を進める。

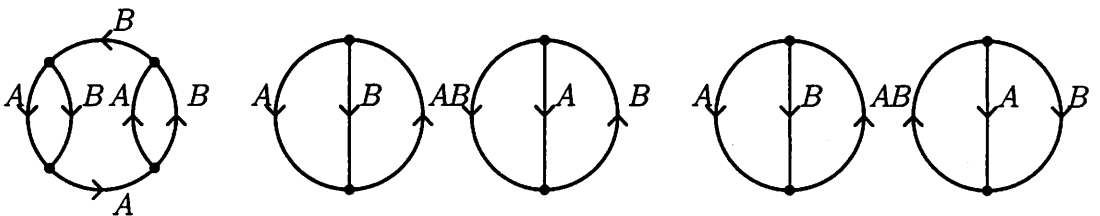
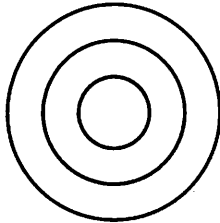


図 1.13



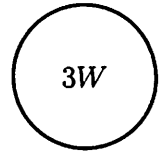
S^3



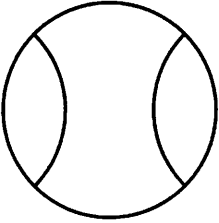
$S^2 \times S^1$

empty graph

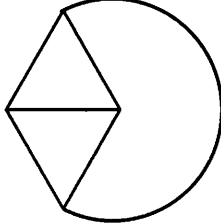
P^3



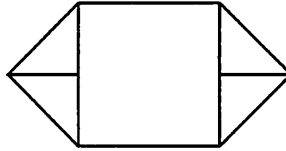
$L(3, 1)$



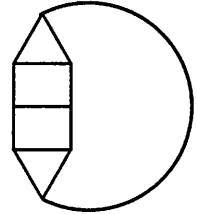
$L(4, 1)$



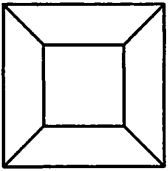
$L(5, 2)$



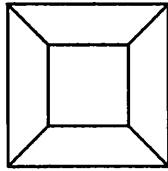
$L(5, 1)$



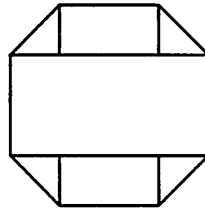
$L(7, 2)$



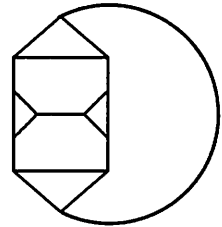
$L(8, 3)$



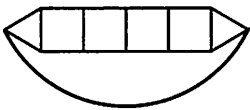
$\pi_1 = Q_8$



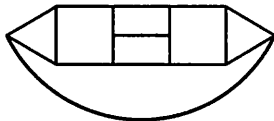
$L(6, 1)$



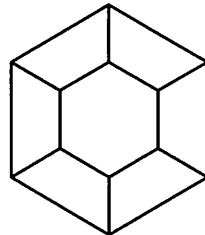
$L(10, 3)$



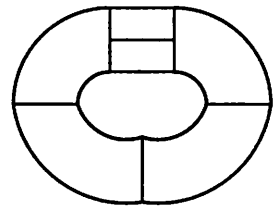
$L(9, 4)$



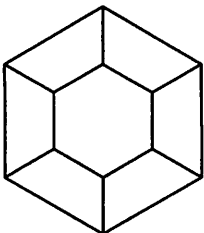
$L(11, 4)$



$L(12, 5)$



$L(13, 5)$



$\pi_1 = Q_{12}$

☒ 1.14

C-変形を実行しておけば、1辺形・自己隣接・2辺形・非退化3辺形を持たないDS-diagramを対象に考えればよい。頂点数12以下のDS-diagramでこの性質をもつものは図1.14の様になる。図1.14ではラベルを書いていないがラベルを割り当てることは容易であろう。

いくつか注意しておく。 $S^2 \times S^1$ はGS-cancelが可能であるが、現在の所私がかつて知っている $S^2 \times S^1$ のDS-diagramをC-変形していくと、必ずこのdiagramを通過するので、一応入れている。 $S^2 \times S^1$ のDS-diagramでこのdiagramを通過せずに S^3 のdiagram(多分free circle)に落ちるものが存在した場合はリストからははずすべきであろう。

同じ図を持つdiagramがあるが、lens spaceのdiagramは退化辺を持ち、そうでない方は退化辺を持たない。即ちスパインの2nd singularityで区別できる。

図1.14では同じ多様体を表現するDS-diagramは出てきていない。一般にはこのことは期待できないであろう。即ち1辺形・自己隣接・2辺形・非退化3辺形を持たないDS-diagramの中には同じ多様体を表現する異なるDS-diagramが存在するであろう。ただし S^3 を表現するものがfree circle以外にあるかどうかというのはquestionといえる。 S^3 の中の結び目が与えられた場合それからDS-diagramをつくる方法が知られている。「解け難い」trivial knotから作るとその様な例が作れるかもしれない。

2 退化3辺形を持つ特殊なDS-diagramについて

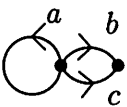
C-変形を行いDS-diagramを制限したことで、ある程度複雑度が減っていると考えられる。この節では1つのデモンストレーションとして、7辺形以上を持たず、退化3辺形を持つDS-diagramを分類する。7辺形以上を持たないという条件は人為的に見えるが次のような理由による。 i 辺形 α_i 個($i = 3, \dots, k$)で構成されるスパインを考えると

$$\sum_{i=3}^5 (6-i)\alpha_i = 6 + \sum_{i=7}^k (i-6)\alpha_i$$

が成立する。7辺形以上がない場合6辺形はいくらでも存在しうが、5辺形以下には大きな制限が加わる。次が成立する。

命題 2.1 7辺形以上を持たず、退化3辺形を持つDS-diagramは後に述べるものに限る。出てくる多様体は、 p_n を $p_1 = 5, p_2 = 10$ となるフィボナッチ数列、 q_n を $q_1 = 1, q_2 = 3$ となるフィボナッチ数列、 r_n を $r_1 = 7, r_2 = 11$ となるフィボナッチ数列、 s_n を $s_1 = 3, s_2 = 4$ となるフィボナッチ数列とするとき、 $L(5, 2)$ 及び $L(p_n, q_n), L(r_n, s_n)$ ($n = 1, \dots$)である。

退化3辺形が対隣接しているときは図 1.14 の $L(5, 2)$ になることが分かる。よって退化3辺形は対隣接してないとしてよい。退化辺が DS-diagram 上では3つ連続して出てくるので退化3辺形のまわりの DS-diagram は図 2.1 のようになっている。

このときスパインの 2nd singularity $\tilde{G} = f(G)$ の一部は  のようになっている。

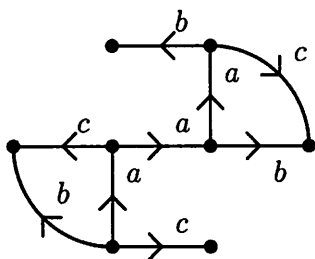


図 2.1

2点以外にスパインの頂点がない場合残りの辺は loop になる。DS-diagram 上では図 2.1 の次数3でない頂点を結ぶ arc になる。よってこの場合 DS-diagram は図 2.2 のいずれかになる。(I) の diagram は最初の退化3辺形以外にもう1つ (スパイン上では1つ DS-diagram 上では2つ) 退化3辺形を含んでいるが, (II) は最初の退化3辺形以外に退化3辺形を含んでいない。

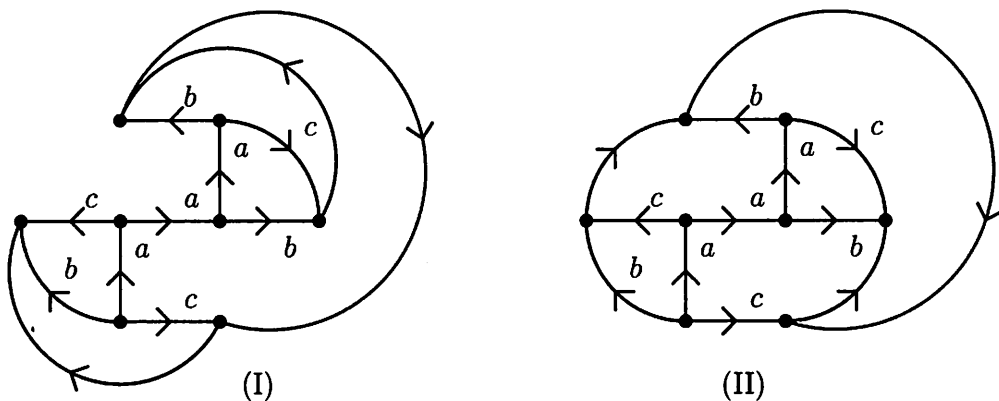


図 2.2

この DS-diagram が表現する多様体を調べるために diagram の Π -変形を導入する。 Π -変形は次の2つの変形, Π_1 -変形と Π_2 -変形を有限回行った変形である。 Π_1 -変形は非退化辺に対し, そのラベルを持つ辺すべてを1点につぶす変形である。スパインで見ると辺を1点につぶす変形である。

面 X^+ は次の性質を満たす境界辺 e^+ を持つとする ; X^+ の境界の他の辺は e^+ のラベル A_0 と同じラベルを持たない。 X^+ の境界のラベルを e^+ から順に読んで行くと $A_0 \bar{A}_k \bar{A}_{k-1} \cdots \bar{A}_1$ となっているとする。ただし \bar{a} は a の向きを逆にしたラベルとする。このとき X^+ と同一視される面を X^- とし, e^+ と対応する辺を e^- とすると, e^+ と e^- を消し, ラベル A_0 を持つ他の辺をラベル A_1, A_2, \dots, A_k を持つ辺の列に置き換える。この変形を Π_2 -変形と呼ぶ。スパインで見ると面 $X = f(X^+) = f(X^-)$ をつぶす変形である。 Π_1 -変形も Π_2 -変形も多様体の中でスパインを変形して得られると考えると, 表現する多様体を変えないことが分かる。

図 2.2 (I) の diagram に Π -変形を行う。最初に Π_1 -変形でラベル b の辺をつぶす。得られる diagram は図 2.3 (I) である。次にラベル a とラベル c の辺を境界にもつ 2 辺形に対し Π_2 -変形を行うと (II) の diagram になる。ただしラベル a^2 はラベル a の辺が 2 つ続いていることを表している。この diagram の 2 辺形に Π_2 -変形を行うと (III) の diagram になる。これから多様体が $L(5, q)$ になることは分かる。 q を決定するためには中央の diagram を見ればよい。内側と外側が 1 つずれて同一視されているので表現する多様体は $L(5, 1)$ であることが分かる。

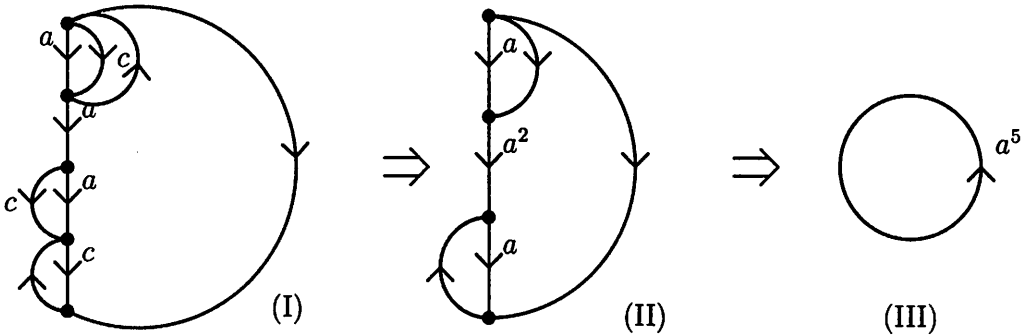
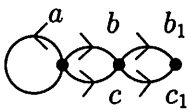


図 2.3

図 2.2 (II) の diagram も同じように変形ができて $L(7, 3)$ になる。ここで 1 つ注意を。 Π -変形を行っている途中の図 2.3 (II) の diagram の直線部分のラベルは順に a, a^2, a であるが, 図 2.2 (II) の diagram の対応部分のラベルも a, a^2, a である。この 2 つの DS-diagram を 1st step の DS-diagram と呼ぶ。

次にスパインが 3 点以上頂点を持つ場合を考える。このとき 7 辺形以上を持たないことから diagram は図 2.4 のようになり, スパインの 2nd singularity は



のようになる。これ以外に頂点を持たない場合次数 2 以下の頂点を結ぶことで DS-diagram が 2 つ得られる。これらを 2nd step の DS-diagram と呼ぶ。

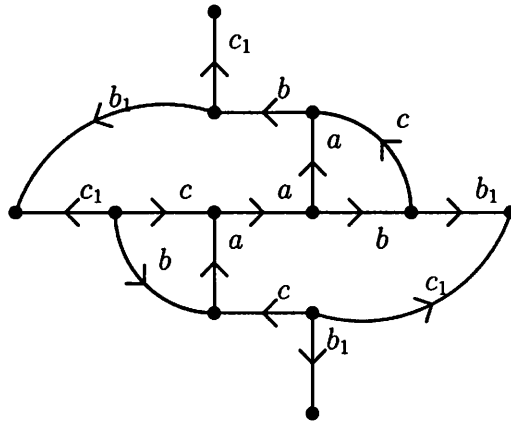


図 2.4

先ほどと同じように Π -変形を実行する。 b, b_1 に対し Π_1 -変形を行い, c, c_1 と順に Π_2 -変形を行う。最後の1つ前の直線部分のラベルはどちらも a^3, a, a^3 になる。得られる多様体は他に退化3辺形を含む場合 $L(10, 3)$, 含まない場合は $L(11, 4)$ になる。

以下 3rd step, 4th step と順に実行していく。いずれの場合も Π -変形を実行していくと最終的に diagram はある重複度の circle になり, lens space であることが分かる。 k th step で Π -変形の最後の1つ前の直線部分のラベルが $a^{\alpha_k}, a^{\beta_k}, a^{\alpha_k}$ であるとする, $k+1$ th step の対応部分は $a^{\alpha_k+\beta_k}, a^{\beta_k}, a^{\alpha_k+\beta_k}$ となる。 $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_k$, $\beta_{k+1} = \alpha_k$ とおくと α_k, β_k はフィボナッチ数列となる。 $p_n = 3\alpha_n + \beta_n$, $q_n = \alpha_n$, $r_n = 3\alpha_n + 2\beta_n$, $s_n = \alpha_n + \beta_n$ とおくと n th step の diagram が表現する多様体は lens space $L(p_n, q_n)$ (他の退化3辺形を含む場合) および $L(r_n, s_n)$ となる。

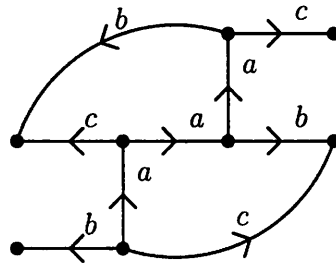
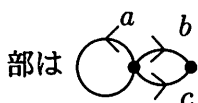


図 2.5

ここで少し脇道に入って図 2.5 を出発点に同様のことを考えよう。退化3辺形の1つの辺をスリップさせた図である。この図を出発点に前と同様にスパインの一部は



のようになってい。これ以外に頂点のない場合は図 2.6 のように

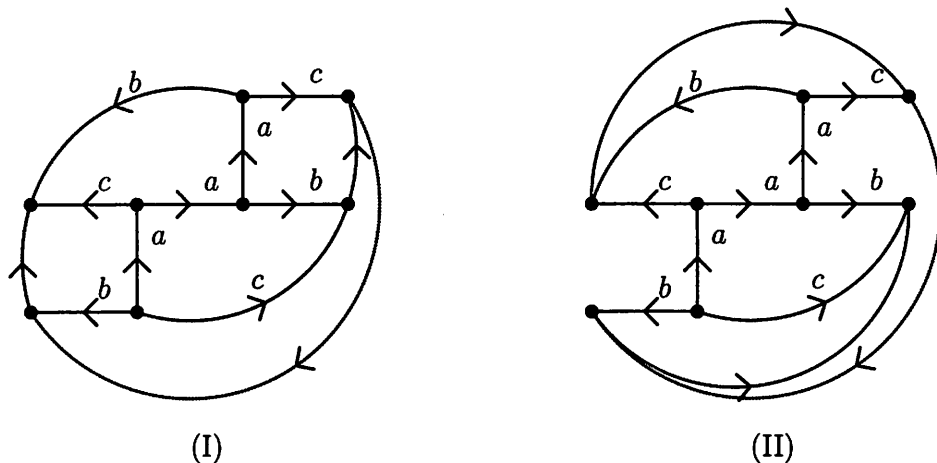


図 2.6

なっている。(I) は lens space $L(8, 3)$, (II) は lens space $L(7, 2)$ になる。前と同様のことを実行すると次が分かる。

命題 2.2 図 2.5 を出発点とする 7 辺形以上を持たない DS-diagram の表現する多様体は, p'_n を $p'_1 = 8, p'_2 = 13$ となるフィボナッチ数列, q'_n を $q'_1 = 3, q'_2 = 5$ となるフィボナッチ数列, s'_n を $s'_1 = 2, s'_2 = 3$ となるフィボナッチ数列とするとき, $L(p'_n, q'_n), L(r_n, s'_n)$ ($n = 1, \dots$) である。

ここで $L(r_n, s_n)$ と $L(r_n, s'_n)$ に注目する。この 2 つの DS-diagram は原点と無限遠点を入れ換えると同じ DS-diagram なので同相になるはずである。lens space の同相条件から任意の n に対し

$$s_n s'_n \equiv \pm 1 \pmod{r_n}$$

が成立することが分かる。実際には数値計算から $s_n s'_n \equiv (-1)^n$ の成立が期待される。代数的な事実なので代数的証明があるはずだが自分では証明することはできませんでした。室蘭工業大学の桂田英典さんに代数的証明を教わりました。key point は $s_n s'_n = t_n r_n + (-1)^n$ としたとき t_n もフィボナッチ数列になるという点です。そして

$$s_n s'_n = t_n r_n + (-1)^n, \quad s_n s'_{n-1} = t_n r_{n-1} + (-1)^n, \quad s_{n-1} s'_n = t_{n-1} r_n + 2(-1)^{n-1}$$

この 3 つの式を帰納法で証明します。背後に整数論的な事実があるような気がするのですが、専門外なのでよく分かりません。

3 グラフを与えて DS-diagram を決める (I)

この節ではグラフ G の形をあらかじめ与えて, DS-diagram を決定することを考える。ある程度対称性の高いグラフを考える。この節では図 3.1 のようなグラ

フを考える (図では $k = 3$, 6 辺形)。即ち $2k$ 辺形 2 つと 4 辺形 $2k$ 個からなるグラフを考える。

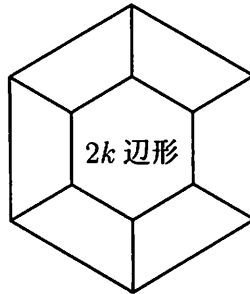


図 3.1

命題 3.1 DS-diagram が図 3.1 のような G であり, 退化辺を持てば図 3.2 の DS-diagram である。ただし右の辺と左の辺は同じ辺として同一視されているものとする (以下の図でも同様)。この DS-diagram が表現する多様体は lens space $L(4k, 2k-1)$ である。

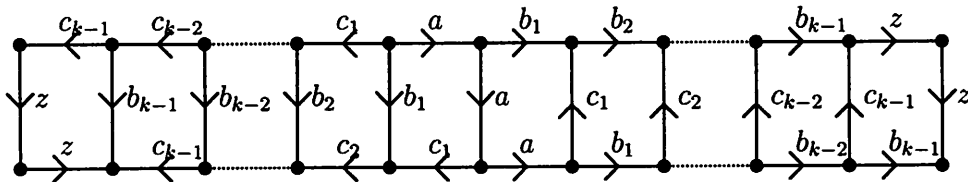


図 3.2

証明 退化辺があるときその周りは図 3.3 (I) の様になっている。 $k = 1$ のときは残りの辺も退化辺なので図 3.2 の $k = 1$ の場合になっている。よって $k > 1$ と仮定する。右上の頂点のラベルは 1 ではないので 2 とする。1 から 2 に向かう辺のラベルを b_1, c_1 とすると, $b_1 \neq c_1$ である。 X^+ と X^- が同一視されるので残りの辺のラベルも b_1, c_1 である。以上により退化辺の周りは図 3.3 (II) の様になっていることが分かる。ラベル 1 から出る辺のラベルは a, b_1, c_1 のみである。同じ頂点から同じラベルのついた辺が 2 つ出ることはないので図 3.3 (III) の様になっている。 $k = 2$ のときは残りの辺は退化辺なので図 3.2 の $k = 2$ の場合になっている。以下同様に考えていけば図 3.2 になっているのが分かる。 lens space になるのは Π -変形を実行すればよい。 ■

[64]

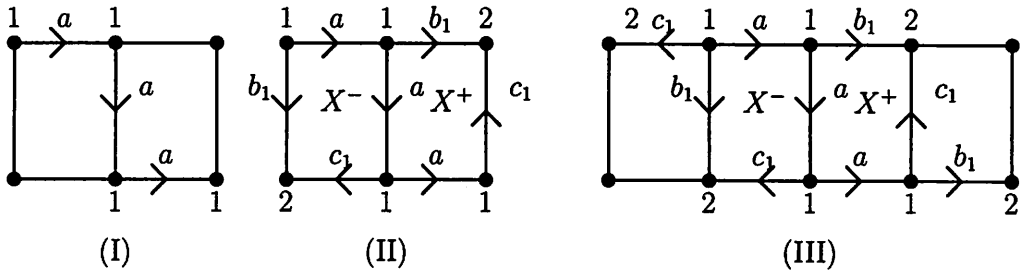


図 3.3

次に退化辺のない場合を考える。途中いくつかの補題を証明しながら考察していく。目標は次の命題 3.2 を示すことである。

命題 3.2 DS-diagram が図 3.1 のような G であり、退化辺を持たず、2nd singularity が 2 重辺をもつとき図 3.4 の DS-diagram である。この DS-diagram が表現する多様体は lens space $L(4, 1)$ 上の k -fold cyclic branched cover で基本群は $Q_{4k} = \langle x, y; x^2 = (xy)^2 = y^k \rangle$ である。

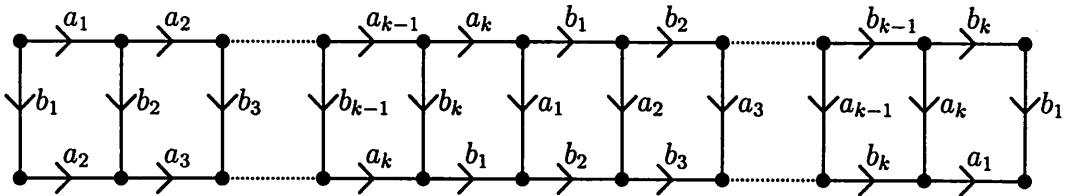


図 3.4

補題 3.3 n 辺形が対隣接する必要十分条件は同じラベルの辺を持つことである。

証明 X^+ と X^- が対隣接しているとする。共通辺を e 、そのラベルを A とする。 X^+ と X^- が同一視されるとき X^+ の境界としての e が X^- の境界としての e と同一視されることはない。よって X^+ は (X^- も) 他にラベル A を持つ辺を持たなければならない。逆に X^+ が同じラベル A を持つ辺 e, e' ($e \neq e'$) を持ったとする。 X^- もラベル A の辺 f, f' ($f \neq f'$) を持つ。対隣接していなければ、ラベル A をもつ辺が 4 つ (e, e', f, f') 存在することになるので矛盾。 ■

補題 3.4 4 辺形が対隣接するとき、それは退化 4 辺形である。

証明 4 辺形が非退化で対隣接しているとする。共通辺のラベルを a とすると 4 辺形は他にラベル a を持つ辺が存在する。他の辺のラベルを b, c とする。図 3.5 (I) の様になっている。ラベル a の辺を持つ残りの面は (I) の右端と左端の面なので、

それらが同一視される。よって α, β のようなラベルがつけられる。このとき上下の面の貼り合せの相手は(II)の様になっており、自己隣接が発生している。よって非退化ということはない。■

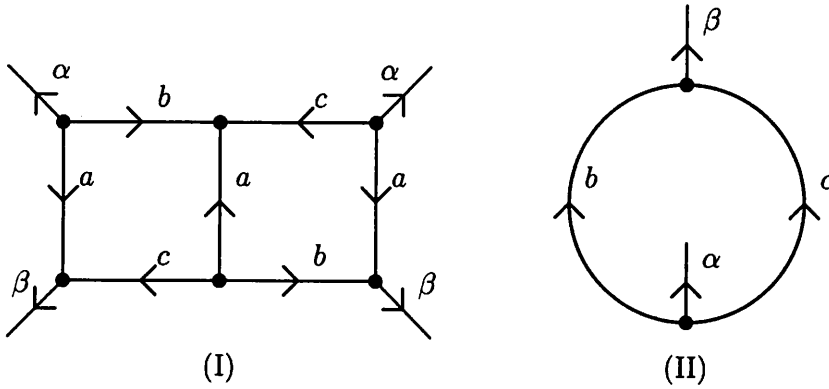


図 3.5

2nd singularity $\tilde{G} = f(G)$ が4重辺を持つとき diagram は図 3.6 である。この例以外に3重辺を持つことはない。今のグラフの場合は簡単に証明できるがここでは一般的な形で証明しておく。

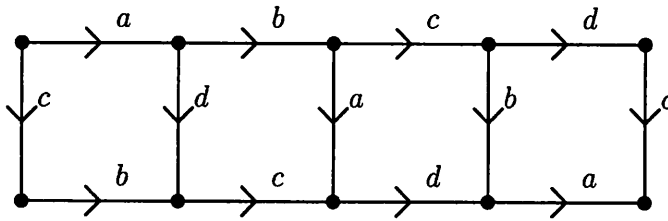


図 3.6

補題 3.5 2nd singularity が3重辺を持ち、4重辺がない場合 diagram には図 3.7 の部分を含む。 $\alpha = \beta$ のときは自己隣接が発生するので $\alpha \neq \beta$ である。

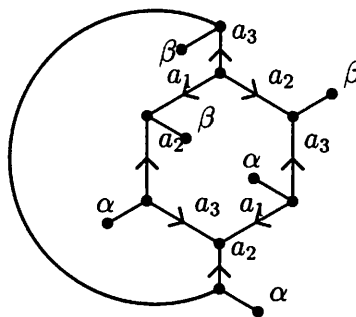


図 3.7

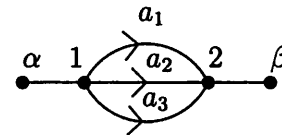
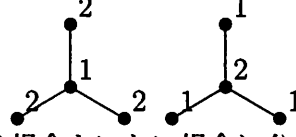
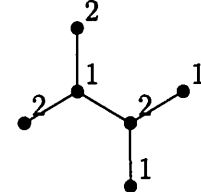
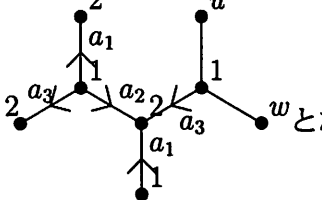
略証 2nd singularity $\tilde{G} = f(G)$ の3重辺を  とする。DS-

diagram 上に隣接する点のラベルがすべて1の点が存在する。それらの点の中に同じ点があれば2辺形または自己隣接が発生するので3点は異なる。ラベル2に関し

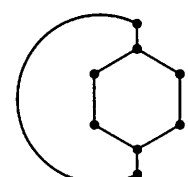
ても同様である。よって DS-diagram の中に  となっている部分が存在する。これらが点を共有している場合としない場合に分ける(点を共有しているとき辺も共有している)。

(A) 共有している場合:  となっており辺のラベルはすべて a_i

($i = 1, 2, 3$) である。このとき面が同じラベルの辺を2つ持つと矛盾することが分

かるので,  となっているとしてよい。 $u = 2$ とすると矛盾

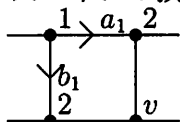
することが分かるので $u = \alpha$ である。このとき $w = 2$ となっている。またこの図にあるラベル2の点の中に同じ点があると矛盾することが分かる。よってラベル2の点はすべて出てきている。図のラベル1の次数1(に見える)点はラベル2の点2つと接続しており、この図に出てきていないラベル1の点はラベル2の点2つと接続している。しかし、結べないか自己隣接発生等矛盾が生じる。よって(A)の場

(B) 共有していない場合: ラベル1と2を持つ辺は図  の様につ

ながっていることが分かる。後はラベル a_i ($i=1,2,3$) の辺のつながり方及びラベル α, β をもつ頂点とのつながり方を場合分けで考えていけば命題の様になることが分かる。 ■

命題 3.2 の証明を始めよう。 G が図 3.1 のとき隣接しているのは4辺形のみである。対隣接が発生すると補題 3.4 より退化辺が存在するので、対隣接はないとし

てよい。スパインの頂点1から2への2重辺を a_1, b_1 とするとラベル1の頂点のまわりで



となる部分が存在する。ここで $v = 1$ とすると3重辺がな

いことから残りの辺のラベルが a_1, b_1 となり、補題 3.3 より対隣接が発生し矛盾。よって $v \neq 1$ である。 $v \neq 2$ なので $v = 3$ とする。ラベル2の頂点からラベル3の頂点に向かう辺が2つ存在するので、これを a_2, b_2 とする(横向き辺のラベルを a_2 とする)。上のラベル2の頂点から出ている辺のラベルは $\bar{a}_1, \bar{b}_1, a_2, b_2$ の4つの可能性があるが、 \bar{a}_1, b_2 は不適である。ラベルが a_2 であることを示したいので、ラベルが \bar{b}_1 だと仮定する。下面のラベル2の頂点から左にでている辺のラベルは a_1 または \bar{b}_2 だが、 a_1 なら(上面と下面が同一視されることから) $a_2 = \bar{b}_1$ となり矛盾するので、 \bar{b}_2 である。面の境界の連続した辺のラベルが α, β の場合、同じ性質を持つ面はもう1つあり、それらの面が同一視される。よって b_1, b_2 が連続する面は同一視される。よってラベルのついていない頂点のラベルを u_1 とすると図 3.8 の様になっているとしてよい。

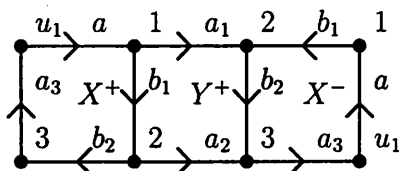
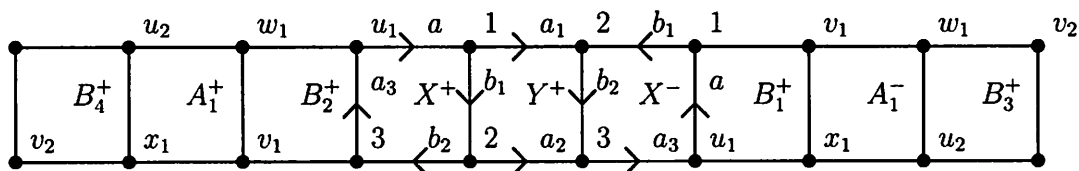
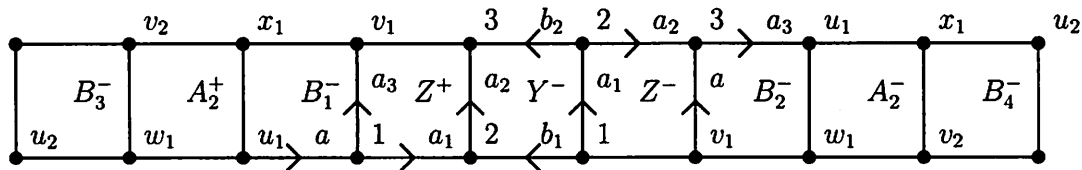


図 3.8



(I)



(II)

図 3.9

Y^+ の相手の Y^- の周りも含めて次の様に順に決めていくと図 3.9 の様になる ; Y^+ はラベル 2 の頂点を 2 つ含んでいるので、同一視の相手の可能性のあるのは (II) の Y^- と Z^+ であるが、 Z^+ が相手の場合ラベル b_2 の辺が 4 つ発生するので、ラベル通り Y^- が相手である。ラベル 2 の頂点を含む面に残っているのは Z^+ と Z^- なので面に対応する名前をつける。以下頂点にラベル付けをしながら対応する面に名前をつけていくと図 3.9 が得られる。この操作はいつまでも続けられる。図 3.9 (I) と (II) はつながらなければならないがどの段階でも不可能である。よって上のラベル a_1 の右横のラベルが \bar{b}_1 であるという仮定が間違っており、図 3.10 の様になっている。

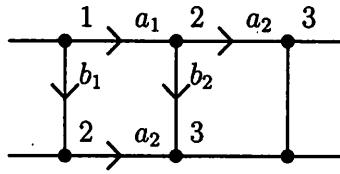


図 3.10

これを k まで続けると図 3.11 の様になっている。今まではラベル a_i, b_i を決めながら来たが、図 3.11 のラベル a, b, c はすでに定まっている。 $a = a_1$ だと $b = b_1, c = a_1$ となり上面に a_1 をラベルに持つ辺が 2 つ出てくる。下面にもあるので矛盾、よって $a = b_1, b = a_1, c = b_1$ である。以下ラベルを決定していくと図 3.4 となる。

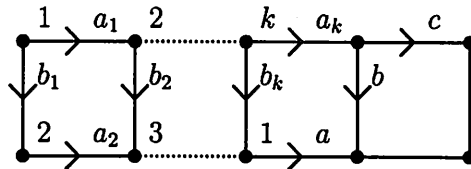


図 3.11

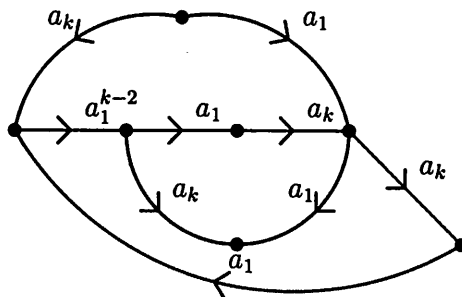


図 3.12

図 3.4 を Π -変形していくと図 3.12 になる。 $x = a_k, y = a_1$ とおくと、 $xyx = x, xy^{k-1}x = y$ という relation を持つが図 3.13 より $\pi_1 = \langle x, y; x^2 = (xy)^2 = y^k \rangle$ が分かる。これは Q_{4k} である。DS-diagram 上の 4 辺形を横に 2 つ動かす action はラベルと compatible なので多様体上の action になる。これで割った空間が $k = 1$ の場合の多様体になることから $L(4, 1)$ 上の k -fold cyclic branched cover であることが分かる。 ■

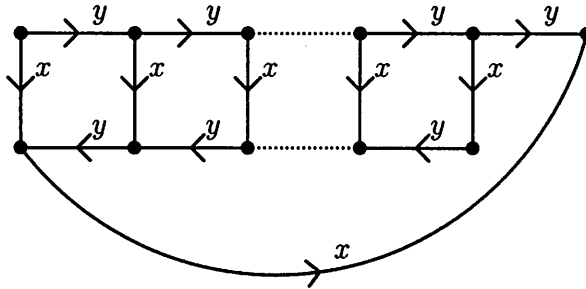
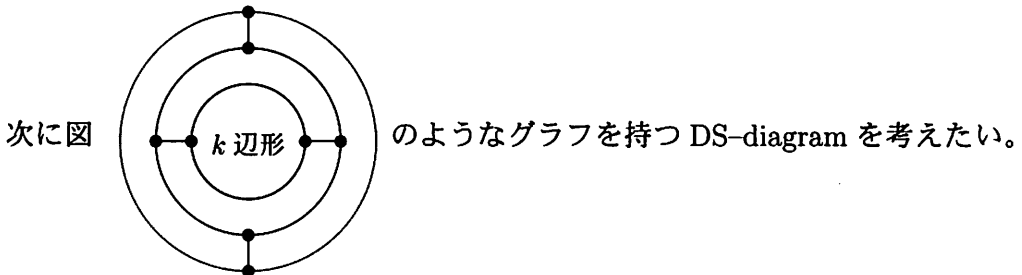


図 3.13

2nd singularity \tilde{G} が多重辺を持たない場合はないと予想されるが証明はできていない。それができればこのグラフをもつ DS-diagram は以上に限られることが分かる。 $k = 3, 4$ のときは頂点と辺の数の比較から必ず多重辺を持つ。 $k = 5$ のとき多重辺がなければ \tilde{G} は完全グラフ K_5 である。そのようなものが存在したとすると対応するスパインは K_5 にすべてのコーナーを使うように 4 辺形 5 個と 10 辺形 1 個が張ったものになっている。4 辺形を順に張って行くと最後は 10 辺形を張れないことが分かるので、この場合は必ず多重辺を持つ。 $k = 6$ のときも同様に証明できるが、この方法は k が大きくなると煩雑になりすぎる。別の証明方法が必要であろう。



しかし sporadic な DS-diagram が登場しなかなか統一的に考察ができない。そこで 2nd singularity の性質を調べ、制限をつけて考えることにする。次節では 2nd singularity から分かる DS-diagram の性質を調べる。

4 2nd singularity の考察

この節では DS-diagram $\Sigma = (S^2, G, f)$ に対応するスパイン $P = f(S^2)$ の 2nd singularity $\tilde{G} = f(G)$ を考える。 \tilde{G} から辺の内点を 1 点除いて (グラフ理論では通常辺を除く) 非連結になることはない。 \tilde{G} にある 2 つの辺が存在して、それぞれの辺から内点を 1 点除いて \tilde{G} が非連結になるとき decomposable という。そうでないとき indecomposable という。グラフ理論の言葉でいうと辺連結度 2 となる。 \tilde{G} の辺連結度は 2, 3 または 4 である。

\tilde{G} が decomposable のとき DS-diagram 上に次のように torus の存在を見ることが出来る。 a, b を \tilde{G} の (向きがついている) 辺で $\tilde{G} - \{a, b\}$ が非連結であるとする。同じことだが u を a の内点, v を b の内点とすると $\tilde{G} - \{u, v\}$ が非連結だとする。 $\tilde{G} - \{a, b\} = \tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ と連結成分に分かれていて, a, b の向きは \tilde{G}_1 から \tilde{G}_2 に向かっているとする。 $f^{-1}(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $f^{-1}(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ とおくと $G - B$ も非連結になる。このとき S^2 上の loop ℓ で $G \cap \ell = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ となるものが存在する。ただし $\tau(\ell - B) = \ell - B$ となるように選んでおく。 $G_i = f^{-1}(\tilde{G}_i)$ ($i=1,2$), $f^{-1}(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $f^{-1}(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ とおくと, 辺 a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) のラベル a, b の向きは G_1 から G_2 に向かっている。このことから ℓ はラベル a の辺とラベル b の辺に交互に交わる。また多様体が向き付け可能ということから面の同一視は図 4.1 の様になっている。ただし右端の面と左端の面は同じ面であるとする。

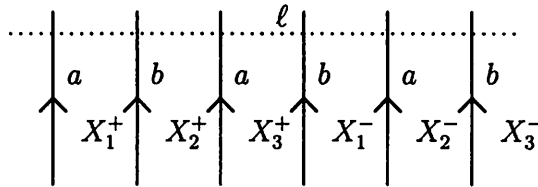
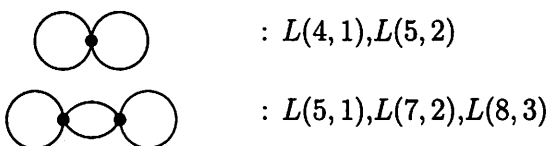
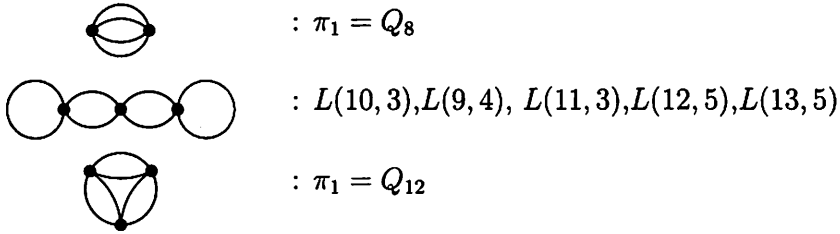


図 4.1


この ℓ に 3-球体 B^3 内で proper な 2-円板 D を張る。このとき $f(D)$ は多様体を separate する torus になっている。この様な意味で ℓ は DS-diagram 上で separating torus を表していると考えることができる。



ここで図 1.14 の DS-diagram に対応する \tilde{G} を見てみよう。 \tilde{G} は次の様になっている。





lens space の \tilde{G} には特徴があるが、次の命題が成立する。この命題は Matveev により指摘されました。石井さんが昨年ロシアで彼から聞いたそうです。

命題 4.1 2nd singularity \tilde{G} が  のとき多様体は lens space である。

証明  に対応する DS-diagram の周りは退化辺の周りなので solid torus になっている。 に対応する DS-diagram の周りを多様体が向き付け可能であることを考慮して描くと図 4.2 の様になっている。ただし右端と左端はつながっているものとする。T を torus とするとこの部分は $T \times [0, 1]$ になる。以上により多様体は 2 つの solid torus を何個かの $T \times [0, 1]$ の境界で貼り付けたものになっている。これは lens space である。■

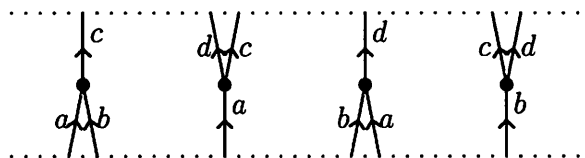
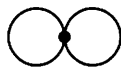


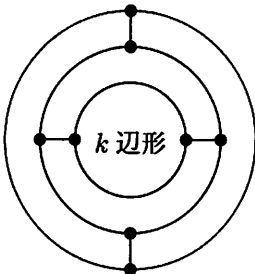


図 4.2

\tilde{G} が decomposable の場合 DS-diagram 上に torus が見える。この torus は incompressible の場合もあればそうでない場合もある。この torus で DS-diagram は 2 つに分かれる。 \tilde{G} が $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ と分かれているときグラフを $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ と 2 つに分けると、各グラフに対応するより簡単な 2 つの DS-diagram を得ることができる。それぞれに対応する多様体から solid torus を除いて境界で貼り合わせてもとの多様体を得られる。よって indecomposable なグラフを考える。グラフ \tilde{G} に埋め込める最長のサイクルが k であるときグラフ \tilde{G} のサイクル数は k であるという。サイクル数が 1 であるグラフは  であり DS-diagram は図 1.14 の

$L(4,1), L(5,2)$ である。サイクル数が2であるグラフは  であり、C-変形できない DS-diagram は図 1.14 の $\pi_1 = Q_8$ である。サイクル数が3であるグラフは  であり、C-変形できない DS-diagram は図 1.14 $\pi_1 = Q_{12}$ である。

5 グラフを与えてDS-diagramを決める (II)

この節ではグラフ G が  のような DS-diagram の分類を考

える。 $k = 1$ のときは「あわび」である。このグラフ G を持つ DS-diagram には 2nd singularity \tilde{G} が indecomposable であるという制限をつける。この制限を付けずに分類をしていくと k の数により種々の DS-diagram が出てくる。前節で述べた decomposable なものは torus で separate するという視点からは torus で貼り付けたものと解釈できる。

グラフ G を図 5.1 の様に描いておく。ただし右側と左側は同一視されているものとする。

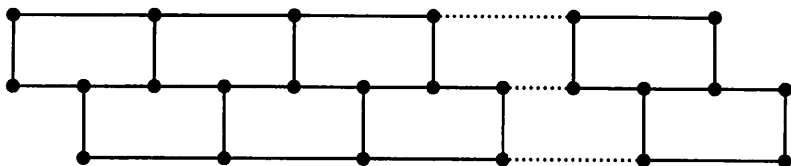
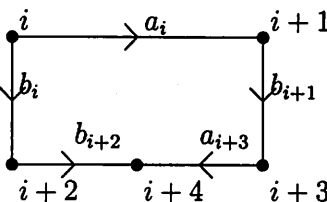
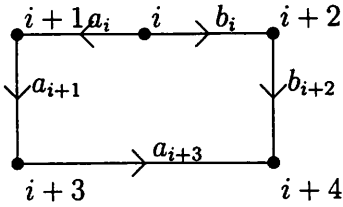


図 5.1

最初にすべての k について存在する標準的な DS-diagram について述べておく。

上の左から i 番目の 5 辺形には  というラベルがついて

いるとし、下の左から $i-3$ 番目の 5 辺形には



ベルがついているとする。この DS-diagram を $\Sigma(k)$ と書くことにしよう。 $\Sigma(1)$ において 2 つの 1 辺形の中心を境界とする proper な arc ℓ を考える。ただし端点は f で同じ点に移るとする。 $K = f(\ell)$ は $M(\Sigma(1)) \cong S^3$ 中の knot になるが trefoil になる。 $M(\Sigma(k))$ は K で branch する S^3 の k -fold cyclic cover になっている。それは 5 辺形を 1 つ右に移動させる S^2 上の action がラベルと compatible であるので、この action は $M(\Sigma(k))$ 上の action を induce する。割った空間の DS-diagram が $\Sigma(1)$ であり、この action が branched cover の action になることから結果が従う。

今の所このグラフをもつ DS-diagram に関して分かっていることは次である。

命題 5.1 $k \leq 6$ のとき $\Sigma(k)$ 以外の DS-diagram は図 5.2 のものである。

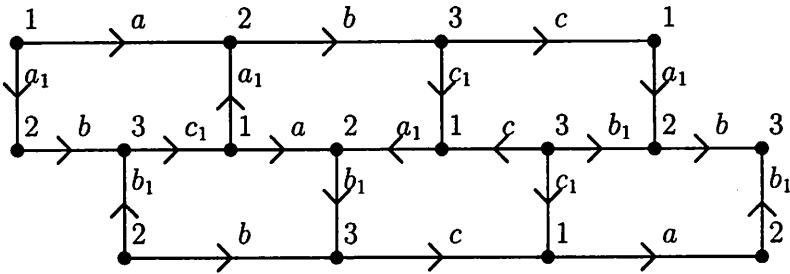


図 5.2

上の 5 辺形どうしが対隣接するとき横の対隣接といい、上の 5 辺形と下の 5 辺形が対隣接するとき縦の対隣接という。

補題 5.2 横の対隣接の起こるとき図 5.3 のようになっている。ここで X, Y 等は面のラベルである。

$\alpha = 1$ のとき $W = Z$ であり、 $k = 3$ の場合を除いて \tilde{G} は decomposable である。

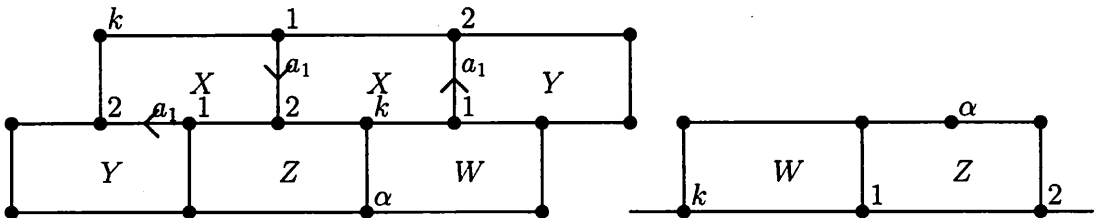


図 5.3

縦の対隣接には次の2つのタイプがある。



図 5.4

補題 5.3 縦の対隣接はタイプ (I) しか起こらない。

証明 タイプ (II) が起こったとすると図 5.5 の様になっている。ラベル A の面はラベル 1 の頂点を持っているので、 $A = A_1$ または $A = B_1$ または $A = B_2$ である。またラベル A の面はラベル 2 の頂点も持っている。図に表れないラベル 2 の頂点は下面に存在しているので、ラベル B_1, B_2 の面がラベル 2 の頂点を持つことはない (A_1 と B_1 が同じ面なら矛盾)。よって $A = A_1$ である。このとき $B_1 = B_2$ となるが、対隣接なので他にラベル 1 の頂点を持ち矛盾。■

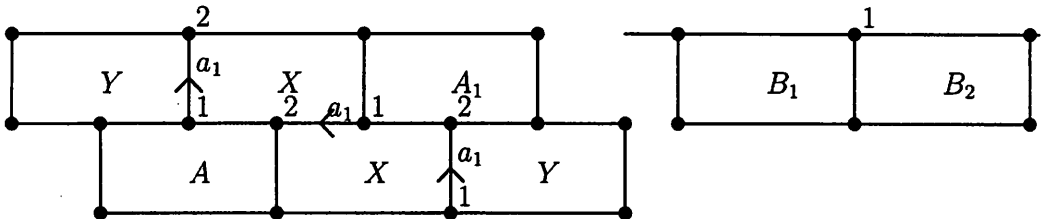


図 5.5

これらの補題を組み合わせると命題 5.1 が証明できる。

最後に現状についていくつか感想を述べておこう。このノートでは (S^2 上のグラフとしての) G と (抽象的グラフとしての) \tilde{G} をもとに DS-diagram を考えるという立場から例を見てきた。現段階では G と \tilde{G} を統合的に見ることに成功していない。もう少し何かが必要なのだろうと思っている。

decomposable の定義は再考の余地があるかもしれない。この定義では torus で分けた時、一方が \tilde{G} の形から solid torus になることが分かる場合 (退化辺を含みサイクル数が 2) も decomposable としているが、その場合は除外したほうがよいのかもしれない。いずれにしてももう少し例を見る必要があるように思える。

参考文献

- [1] Kouno ,M, 一般化された DS-diagram について, 箱根セミナー 2001 記録