HAKONE SEMINAR 21 (2005) 7-29.

2次元の共通星状細分定理について

河野正晴 (北見工業大学)

2次元の単体的複体に対する共通星状細分定理を証明します。この定理はすでに [2] で示されている様です。ここでは一般に共通星状細分が存在することだけではなく，この様に構成できるというアルゴリズムも与えます。

2005年8月神戸では「単体的複体と言った場合，すべての simplex はある固定されたユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の中にあるものと考えている。即ち単体を越える線型構造を1つ固定して考えている事は注意して下さい。」と言いましたが，今回の証明の中ではこの注意は必要ないようです。考えている複体がすべてある1つの単体的複体の細分になっているときは注意する必要はありませんが，一般次元で Alexander の定理を幾何的に議論しようとすると，1つの単体的複体の中で議論できるかどうかは分からないので，単体を越える線型構造への注意が必要になります。

1 用語の準備

単体的複体・星状細分等の定義を一応書いておきます。知っている人は読み飛ばして下さい。

$\boldsymbol{R}^N$ 内の集合 X に対し，X を含む最小の凸集合を $\langle X \rangle$ と書く。$P_0, P_1, \ldots, P_n$ をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の点とする。$\langle \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \rangle$ を $\langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ とも書く。$P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ が1次独立であるとき，$P_0, P_1, \ldots, P_n$ は一般の位置 (general position) にあるという。$P_0, P_1, \ldots, P_n$ が一般の位置にあるとき，これらの点を含む最小の凸図形 $\sigma = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ を単体 (simplex) 呼ぶ。

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i P_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\ (i = 0, 1, \ldots, n) \right\}$$

と表すことができる。次元に注意するときは n–単体 (n–simplex) と呼ぶ。0–単体は点，1–単体は線分である。特に $n = -1$ も考え (-1)–単体を空集合と定義する。$\{a(0), a(1), \ldots, a(k)\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ とする。ただし $i \neq j$ ならば $a(i) \neq a(j)$ とする。このとき $\tau = \langle P_{a(0)}, P_{a(1)}, \ldots, P_{a(k)} \rangle$ を σ の面 (face) といい，$\tau \preceq \sigma$ と書く。

次元に注意するときはk–面(k-face)という。(-1)–単体はすべての単体の面になっていると考える。

定義 1.1 simplexを元とする集合$\boldsymbol{K}$が単体的複体(*simplicial complex*)であるとは次の条件を満たすことをいう。
(1) $\sigma \in \boldsymbol{K}$, $\tau \preceq \sigma$ならば$\tau \in \boldsymbol{K}$,
(2) $\sigma, \tau \in \boldsymbol{K}$に対し$\sigma \cap \tau \preceq \sigma$かつ$\sigma \cap \tau \preceq \tau$,
(3) $\boldsymbol{K}$は有限集合である[1]。

単体的複体$\boldsymbol{K}$に対し$|\boldsymbol{K}| = \bigcup_{\sigma \in \boldsymbol{K}} \sigma$を多面体(*polyhedron*)と呼ぶ。2つの単体的複体$\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{K}$の間に次の関係があるとき，$\boldsymbol{L}$を$\boldsymbol{K}$の細分(*subdivision*)といい，$\boldsymbol{L} \trianglelefteq \boldsymbol{K}$または$\boldsymbol{K} \trianglerighteq \boldsymbol{L}$と書く。
(1) $|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{K}|$,
(2) 任意の$\tau \in \boldsymbol{L}$に対し$\tau \subseteq \sigma$となる$\sigma \in \boldsymbol{K}$が存在する。

単体的複体$\boldsymbol{K}$の部分集合$\boldsymbol{L}$が単体的複体をなすとき，$\boldsymbol{L}$を$\boldsymbol{K}$の部分複体(*subcomplex*)という。$\boldsymbol{K}$の単体σが他の単体の面にならないとき主(*principal*)であるという。$\boldsymbol{K}$のp次元以下の単体の全体を$\boldsymbol{K}_{(p)}$と表す。$\boldsymbol{K}_{(p)}$は$\boldsymbol{K}$の部分複体をなし，$\boldsymbol{K}$のp骨格(*p–skelton*)と呼ばれる。

2つの単体σとτに対し$\dim \langle \sigma \cup \tau \rangle = \dim \sigma + \dim \tau + 1$が成立するとき，可接合(*joinable*)であるといい，

$$\sigma * \tau \ (= \sigma\tau) = \{ (1-t)a + tb \mid a \in \sigma, b \in \tau, 0 \leqq t \leqq 1 \}$$

と書く。$\sigma * \tau$も単体となる。

2つの単体的複体$\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{K}$が次の条件を満たすとき可接合(*joinable*)であるという。
(1) 任意の$\sigma \in \boldsymbol{K}$と任意の$\tau \in \boldsymbol{L}$に対し$\sigma$と$\tau$は可接合である。
(2) 任意の$\sigma, \sigma' \in \boldsymbol{K}$と任意の$\tau, \tau' \in \boldsymbol{L}$に対し$(\sigma * \tau) \cap (\sigma' * \tau') = (\sigma \cap \sigma') * (\tau \cap \tau')$が成立する。このとき

$$\boldsymbol{K} * \boldsymbol{L} = \{ \sigma * \tau \mid \sigma \in \boldsymbol{K}, \tau \in \boldsymbol{L} \}$$

と定義すると，$\boldsymbol{K} * \boldsymbol{L}$も単体的複体になる。

$\sigma \in \boldsymbol{K}$に対し$\boldsymbol{\sigma} = \{ \tau \in \boldsymbol{K} \mid \tau \preceq \sigma \}$と定義すると$\boldsymbol{\sigma}$は単体的複体になる。この$\boldsymbol{\sigma}$を$\sigma$の複体化という。$\partial \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \{\sigma\}$とおくと，$\partial \boldsymbol{\sigma}$も単体的複体になる。

$\sigma \in \boldsymbol{K}$に対し$\boldsymbol{K}$における$\sigma$の星複体(*star complex*)を

$$\mathrm{St}(\sigma, \boldsymbol{K}) = \{ \mu \in \boldsymbol{K} \mid \sigma \preceq \exists \tau \in \boldsymbol{K}, \mu \preceq \tau \}$$

[1]通常はlocally finiteを仮定するが，我々はcompactの場合のみ扱うのでこの様に仮定する。

で定義する。また $\boldsymbol{K}$ における σ のからみ複体 (*link complex*) を

$$\mathrm{Lk}(\sigma, \boldsymbol{K}) = \{\tau \in \boldsymbol{K} \mid \sigma * \tau \in \boldsymbol{K}\}$$

で定義する。$\boldsymbol{\sigma}$ を σ の複体化としたとき，$\boldsymbol{\sigma} * \mathrm{Lk}(\sigma, \boldsymbol{K}) = \mathrm{St}(\sigma, \boldsymbol{K})$ となる。

$\sigma = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle \in \boldsymbol{K}$ に対し

$$\mathring{\sigma} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i P_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t > 0\ (i = 0, 1, \ldots, n) \right\}$$

と定義する。$x \in \mathring{\sigma}$ となる点を σ の内点という。0–単体以外は通常の内点集合と一致している。任意の $x \in |\boldsymbol{K}|$ に対し $\sigma_x \in \boldsymbol{K}$ で $x \in \mathring{\sigma}_x$ となる単体が唯 1 つ存在する。この単体 σ_x を x の台 (*support*) という。x の星複体 (*star complex*)，からみ複体 (*link complex*) を次で定義する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{St}(x, \boldsymbol{K}) &= \{\tau \in \boldsymbol{K} \mid \tau \preceq \exists \sigma \ni x\} \\
\mathring{\mathrm{St}}(x, \boldsymbol{K}) &= \{\sigma \in \boldsymbol{K} \mid x \in \sigma\} \\
\mathrm{Lk}(x, \boldsymbol{K}) &= \mathrm{St}(x, \boldsymbol{K}) - \mathring{\mathrm{St}}(x, \boldsymbol{K})
\end{aligned}$$

x の台を σ_x とすれば $\mathrm{St}(x, \boldsymbol{K}) = \mathrm{St}(\sigma_x, \boldsymbol{K})$, $\mathrm{Lk}(x, \boldsymbol{K}) = \partial \boldsymbol{\sigma}_x * \mathrm{Lk}(\sigma_x, \boldsymbol{K})$ の関係がある。

$a \in |\boldsymbol{K}|$ に対し

$$\boldsymbol{K}^a = \{\boldsymbol{K} - \mathrm{St}(a, \boldsymbol{K})\} \cup a * \mathrm{Lk}(a, \boldsymbol{K})$$

と定義し $\boldsymbol{K}$ の a による初等星状細分 (*elementary stellar subdivision*) という。a の台の次元が k のとき初等星状細分 $\boldsymbol{K}^a$ をタイプ k の初等星状細分という。$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}^a$ のとき $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}^{a^{-1}}$ と書く。また $(\boldsymbol{K}^a)^b$ を $\boldsymbol{K}^{ab}$ と書く。初等星状細分を有限回施してできる細分を星状細分 (*stellar subdivision*) という。$\boldsymbol{L}$ が $\boldsymbol{K}$ の星状細分のとき，$\boldsymbol{L} \overset{*}{\trianglelefteq} \boldsymbol{K}$ または $\boldsymbol{K} \overset{*}{\trianglerighteq} \boldsymbol{L}$ と書く。

2 結果

次が 2 次元の場合の共通星状細分定理である。

定理 2.1 $\boldsymbol{K}$ を 2 次元の単体的複体とする。$\boldsymbol{K}$ の任意の細分 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ に対し，$\boldsymbol{L}_1$ および $\boldsymbol{L}_2$ 両方の星状細分になっている $\boldsymbol{K}$ の細分 $\boldsymbol{L}_0$ が存在する。

証明をみると存在定理だけでなくアルゴリズムを与えている事が分かる。即ち $\boldsymbol{L}_1$ と $\boldsymbol{L}_2$ に対し $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in |\boldsymbol{K}|$ を $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ から具体的に指定できて $\boldsymbol{L}_1^{a_1 \cdots a_n} = \boldsymbol{L}_2^{b_1 \cdots b_m}$ が成立する。

共通星状細分定理は一般次元では知られていない。我々は2次元および3次元の場合に特に興味がある。

Alexanderは[1]において2つのsymbolicな複体が同型な細分を持てばsymbolicな星状細分およびその逆の列で移りあう事を証明した。その事実は誤解されている場合があるので少し述べておく。

単体的複体 $\boldsymbol{K}$ の2つの細分 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ が $\boldsymbol{K}$ のなかで星状細分とその逆で移りあえるとき星状同値 (*stellar equivalent*) であるという；即ち $\boldsymbol{K}$ の細分である単体的複体の列 $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_s$ が存在して，(1) $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{K}_s$, (2) 各 i に対し $\boldsymbol{K}_i \overset{*}{\trianglelefteq} \boldsymbol{K}_{i+1}$ または $\boldsymbol{K}_i \overset{*}{\trianglerighteq} \boldsymbol{K}_{i+1}$ が成立する。Alexanderが[1]で示したのは次の「定理」ではありません。

幾何的Alexanderの「定理」　$\boldsymbol{K}$ の2つの細分 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ は星状同値である。

「定理」と書いたが，証明された事実ではないので「予想」と書くべきかもしれない。ここでは一応「定理」と呼んでおく。Alexanderが[1]で示したのは次の定理である。

Alexanderの定理　$\boldsymbol{K}$ の2つの細分 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ に対し単体的複体の列 $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_s$ が存在して，(1) $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{K}_s$, (2) 各 i に対し $\boldsymbol{K}_i \overset{*}{\trianglelefteq} \boldsymbol{K}_{i+1}$ または $\boldsymbol{K}_i \overset{*}{\trianglerighteq} \boldsymbol{K}_{i+1}$ または $\boldsymbol{K}_i$ から $\boldsymbol{K}_{i+1}$ への同型写像 f_i が存在する。

Alexanderは[1]ではsymbolicな複体を用いて定理を述べている。上に述べたAlexanderの定理はそれを幾何学的に翻訳したもので，この定理にでてくる $\boldsymbol{K}_i$ は $\boldsymbol{K}$ の細分になっているとは限らない。これらの定理の間には

共通星状細分定理 $\Longrightarrow$ 幾何的Alexanderの「定理」$\Longrightarrow$ Alexanderの定理

の関係がある。

3　2次元における幾何的Alexanderの定理

次の定理が議論の出発点となる。以下では単体的複体というとき2次元であるものとする。

定理 3.1 2次元の単体的複体 $\boldsymbol{K}$ の2つの細分 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ は星状同値である。

次の命題3.2から定理3.1が従うのは容易に分かる。

命題 3.2 2次元単体 $\boldsymbol{K}$ とその細分 $\boldsymbol{L}$ に対し $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{K}$ は星状同値である。証明を見ると分かるように，$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$ が与えられたとき星状同値を与える列 $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_s$ を具体的に求められる。

証明　$\boldsymbol{K}$ と異なる $\boldsymbol{L}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{L}$ と星状同値であって頂点の数が $\boldsymbol{L}$ より少ない $\boldsymbol{K}$ の細分 $\boldsymbol{L}'$ を見つけるアルゴリズムを与える。そうすればいつかは $\boldsymbol{K}$ にたどり着き $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{K}$ が星状同値であることが分かる。

単体的複体 $\boldsymbol{L}$ の2つの2–単体 σ_1, σ_2 が $\boldsymbol{K}$ の1つの2–単体に含まれており，$\sigma_1 \cup \sigma_2$ は凸4辺形をなしているとする。このとき σ_1 および σ_2 は1つの1–単体 τ を共通部分としてもち，τ を辺に持つ2–単体は σ_1, σ_2 のみである。τ に属さない σ_i $(i = 1, 2)$ の頂点を P_i とするとき P_1 と P_2 を結んでできる1–単体を τ' とする。4辺形 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ を τ' でカットしてできる2つの2–単体を σ_1', σ_2' とする。$\boldsymbol{L}_1$ を

$$\boldsymbol{L}_1 = (\boldsymbol{L} - \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \tau) \cup (\sigma_1' \cup \sigma_2' \cup \tau')$$

とおくと $\boldsymbol{L}_1$ は $\boldsymbol{K}$ の細分で，$\boldsymbol{L}$ と星状同値である。$\boldsymbol{L}$ から $\boldsymbol{L}_1$ を得る操作を τ に関する横縦変形と定義する。横縦変形は頂点の数を変えない

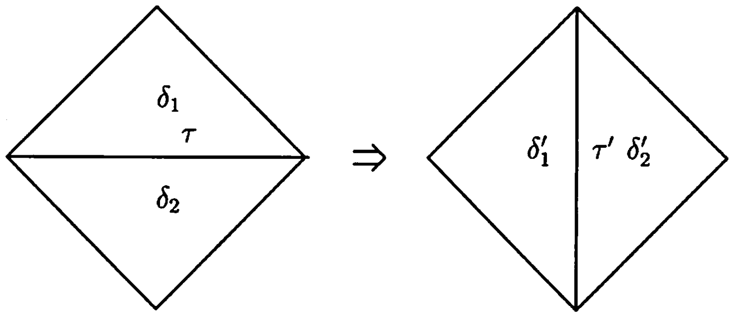


図 3.1

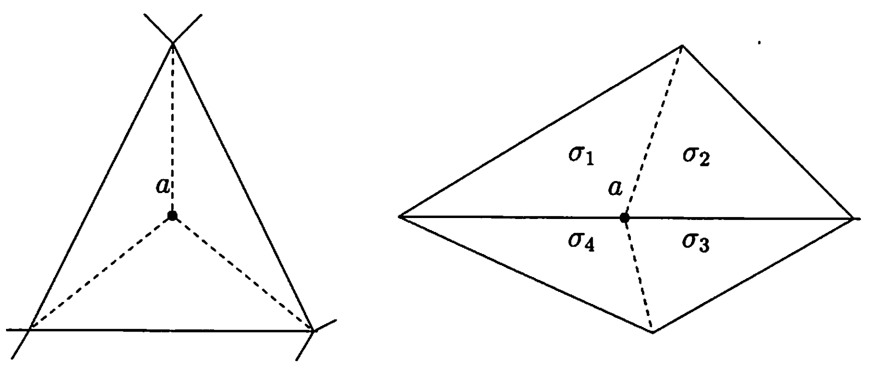


図 3.2

(I) $\boldsymbol{K}$ の1–単体上にない $\boldsymbol{L}$ の頂点が存在するとき：　この頂点を a とすると，a は $\boldsymbol{K}$ のある2–単体 $\tilde{\sigma}$ の内点である。この頂点の $\boldsymbol{L}$ における次数が3のときは (図

3.2 左図参照), $\sigma = |\mathrm{St}(a, \boldsymbol{L})|$ とおき, $\boldsymbol{L}'\ \boldsymbol{L} - \mathring{\mathrm{St}}(a, \boldsymbol{L}) \cup \{\sigma\}$ とおく。$\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{L}'$ の a による初等星状細分になっている。$\boldsymbol{L}'$ の頂点の数は $\boldsymbol{L}$ より 1 つ少ない。

よって a の次数は 4 以上と仮定してよい。最初に次数が 4 で, $\mathrm{St}(a, \boldsymbol{K})$ に属する隣接する 2 つの 2–単体で角 a に関する和が π になるものが存在する場合を考える (図 3.2 右図参照)。$\mathrm{St}(a, \boldsymbol{L})$ は 4 つの 2–単体 $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ (この順で隣接しているとする) から構成され, 隣り合う 2–単体 σ_1 と σ_2 の角 a の和が π になっているとする。このときは $\sigma_1 \cup \sigma_2$ を 2–単体と考えたものを $\widetilde{\sigma}_1$, $\sigma_3 \cup \sigma_4$ を 2–単体と考えたものを $\widetilde{\sigma}_2$ とするとき

$$\boldsymbol{L}' = \left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{\sigma}_4\right) \cup \left(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cup \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)$$

とおくと, $\boldsymbol{L}'^a = \boldsymbol{L}$ となっている。この場合は示されたので, 次数 4 のときは, 隣接する 2–単体の角 a の和は π でないと仮定してよい。

このとき「$\mathrm{St}(a, \boldsymbol{L})$ に含まれる 2–単体 σ_1, σ_2 で 1 辺を共有し, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ が凸 4 角形になっているものが存在する」ことを示す。この様な凸 4 辺形の存在が示されれば, そこに対して横縦変形を行うことにより a の次数を 1 つ下げる事ができる。これを続けて次数 3 または次数 4 で隣接する 2–単体の角の和が π になったとき, 先程の変形を行えばよい。

隣り合う 2–単体 σ_1, σ_2 が凸 4 角形をなさないのは, σ_1 における角 a と σ_2 における角 a の和が π 以上のとき (これを type I と呼ぶ), または共有辺の a でない頂点に関する角の和が π 以上のとき (これを type II と呼ぶ) のいずれかである。次数 4 の場合を除いて type I の組は存在しても高々 2 つである。

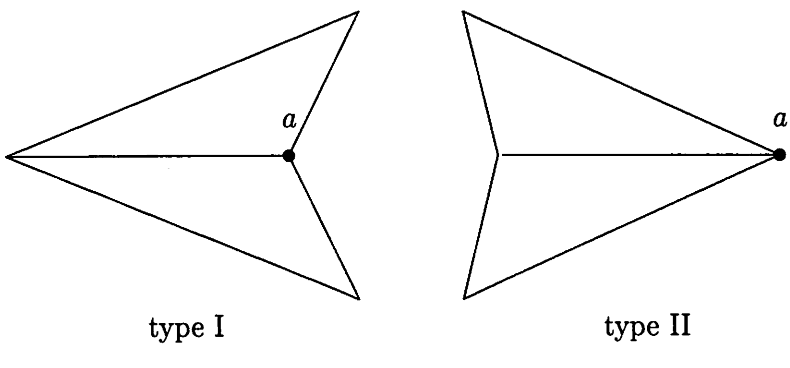


図 3.3

最初に次数 4 の場合を考える。隣接する 2 つの角の和が π である場合はすでに終わっているので, σ_1 と σ_2 における角 a の和は π でないとしてよい。この角の和が π より小さいときは σ_3, σ_4 と入れ替えることにより, π より大きいと仮定し

ても一般性を失わない。σ_1 の a 以外の頂点を b, c, σ_2 の a 以外の頂点を c, d とし，$\mathrm{St}(a, \boldsymbol{L})$ の残りの頂点を e とする。頂点 e が直線 bd に関し a と反対側にあるときは $\sigma_3 \cup \sigma_4$ は凸4辺形になる。よって e は直線 bd 上も含め直線 bd に関し a と同じ側にあるとする。e が直線 ca 上にある場合はすでに示したので，直線 ca 上にはないとしてよい。e が直線 ca に関し d と同じ側にあるときは $\sigma_2 \cup \sigma_3$ (ここで $\sigma_3 = ade$) が，反対側にあるときは $\sigma_1 \cup \sigma_4$ (ここで $\sigma_4 = abe$) がそれぞれ凸4辺形になるのでそこで横縦変形ができる。

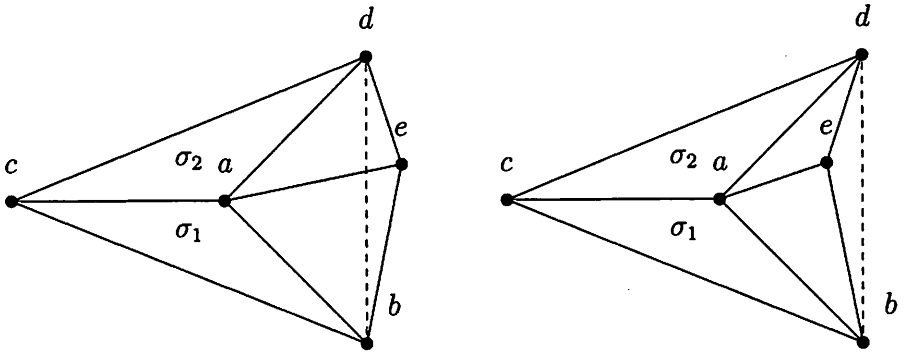


図 3.4

次に次数5以上で，type I 以外はすべて type II と仮定すると矛盾する事を示す。$\mathrm{St}(a, \boldsymbol{L})$ の a 以外の頂点の1つを b とし，他の a 以外の頂点を b から時計回りに $b_1, b_2, \ldots, b_N$ と名づける。最初はすべて type II の場合を考える。直線 bb_1 に関し a の側にある頂点が存在するが，そのうちで最も番号の小さい頂点を b_k とする。しかし 2–単体の組がすべて type II の場合頂点は bb_1 に関し a の側に来ることができないので矛盾。

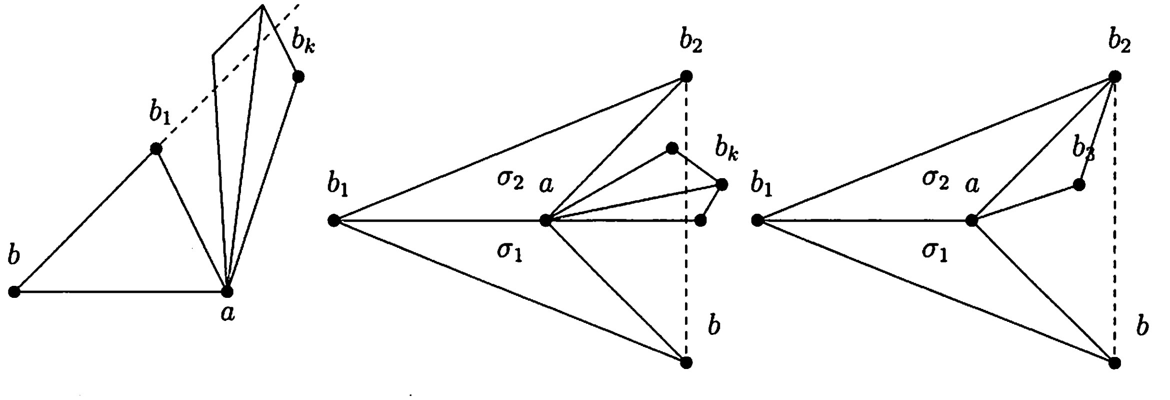


図 3.5

type Iが1組存在するとき，それをσ_1, σ_2とし，$\sigma_1 = abb_1$, $\sigma_2 = ab_1b_2$とする。直線bb_2に関しaと反対側にある頂点が存在するとき，そのなかで直線bb_2から最も遠い頂点をb_kとする。複数あるときは最小のkをとる。このとき2–単体$ab_{k-1}b_k$とab_kb_{k+1}は凸4辺形をなしているので矛盾。よって頂点$b_3, \dots, b_N$は直線bb_2上も含めてaの側にある。次数は5以上なので$b_3 \neq b_N$である。b_3が直線b_1aに関してb_2と同じ側にあるときは，2–単体ab_1b_2とab_2b_3は凸4辺形をなす。そうでないときはb_Nは直線b_1aに関してbと同じ側にある。このときは2–単体ab_1bとabb_Nは凸4辺形をなす。いずれにしても矛盾。

type Iが2組存在するとき，異なる4つの2–単体の組み合わせになっていることはない。即ち2–単体$\sigma_1 = abb_1$, $\sigma_2 = ab_1b_2$, $\sigma_3 = ab_2b_3$があり，σ_1とσ_2の組およびσ_2とσ_3の組がtype Iになっている。直線bb_3に関しaと反対側にある頂点が存在するときは，その中で直線bb_3から最も遠い頂点をb_kとする。複数あるときは最小のkをとる。このとき2–単体$ab_{k-1}b_k$とab_kb_{k+1}は凸4辺形をなしているので矛盾。よって頂点$b_4, \dots, b_N$は直線bb_3上も含めてaの側にある。このとき2–単体ab_2b_3とab_3b_4が凸4辺形をなすか，2–単体ab_1bとabb_Nが凸4辺形をなす。(次数が5のときは$b_4 = b_N$である。) いずれにしても矛盾。

(II) $\boldsymbol{L}$の頂点がすべて$\boldsymbol{K}$の1–単体上にあるとき： aを$\boldsymbol{K}$の頂点ではない$\boldsymbol{L}$の頂点であって，$\boldsymbol{K}$のある1–単体$\widetilde{\tau}$上にあるとする。この様な頂点が存在しないとき$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}$なので証明は終っている。$\widetilde{\tau}$を辺にもつ$\boldsymbol{K}$の2–単体を$\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_n$とする。この様な$\widetilde{\sigma}_i$が存在しないとき，$\widetilde{\tau}$は主であり，1次元においては細分と星状細分は同じ概念なのでaを除く変形は星状細分の逆操作になってる。各$\widetilde{\sigma}_i$ $(i = 1, \dots, n)$について考える。aを端点とする$\boldsymbol{L}$の1–単体で$\widetilde{\sigma}_i$に含まれており，$\widetilde{\tau}$上にないものが2つ以上存在するときは，隣り合う$\boldsymbol{L}$の2–単体の中には必ず凸4辺形になっているものがあるので，横縦変形でその数を減らすことができる。よって$\widetilde{\sigma}$内にそのような1–単体は1つであるとしてよい。これをτ_iとする。τ_iを辺とする$\boldsymbol{L}$の2–単体は2つ存在するが，これをσ_{i1}, σ_{i2}とする。$\sigma_{i1} \cup \sigma_{i2}$は2–単体となるが，これを$\sigma_i$とおく。

$$\boldsymbol{L}' = \left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\sigma}_{11} \cup \boldsymbol{\sigma}_{12} \cup \cdots \cup \boldsymbol{\sigma}_{n1} \cup \boldsymbol{\sigma}_{n2}\right) - \left(\boldsymbol{\sigma}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{\sigma}_n\right)$$

とおくと$\boldsymbol{L}'^{a} = \boldsymbol{L}$となっている。∎

補題 3.3 $\boldsymbol{K}^a$が$\boldsymbol{K}$のタイプ2の初等星状細分とする。このとき$b \in |\boldsymbol{K}|$が存在して$\boldsymbol{K}^a = \boldsymbol{K}^{bab^{-1}}$となる。ただし右辺の$b, a, b^{-1}$はすべてタイプ1の初等星状細分(またはその逆)である。

証明　aの台となる$\boldsymbol{K}$の2–単体をσとする。σの頂点の1つをcとしcとaを結ぶ線分をaの方に延長してσの辺と交わった点をbとする。このとき$\boldsymbol{K}^{ab} = \boldsymbol{K}^{ba}$となるが，$\boldsymbol{K}^b$における星状細分$a$はタイプ1である。星状細分$b$は$\boldsymbol{K}$においても$\boldsymbol{K}^a$においてもタイプ1なので補題が証明される。∎

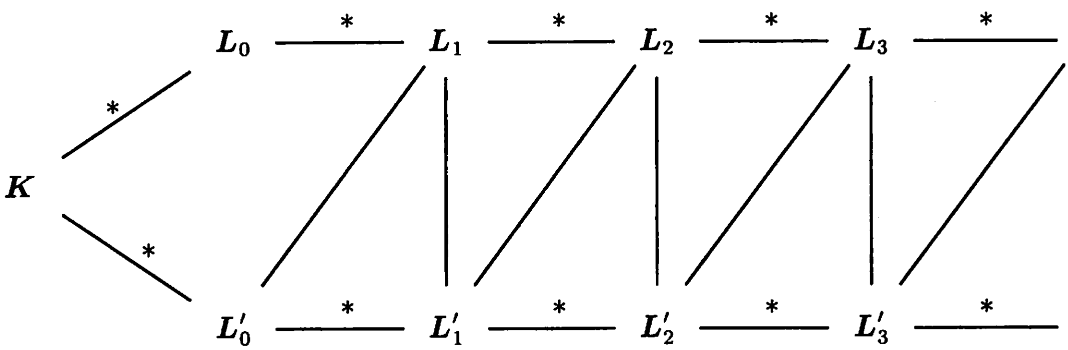
補題 3.3 により定理 3.1 の星状同値に現れる星状細分はすべてタイプ 1 またはタイプ 0 であるとしてよい。タイプ 0 の星状細分はなにもしない操作なので，以下でてくる星状細分はすべてタイプ 1 であるとする。

4 星状細分の生成

この節では定理2.1 の証明を目指して，星状細分が2つ与えられているとき，新たな星状細分を構成していくアルゴリズムを定義する。

次の命題 4.1 を証明すれば定理 3.1 より定理 2.1 が従う。

命題 4.1 K を 2 次元の単体的複体とし，L_0, L_0' を K の星状細分とする。このとき L_0 と L_0' から $L \overset{*}{\trianglelefteq} L_0$ かつ $L \overset{*}{\trianglelefteq} L_0'$ となる L を構成することができる。



命題 4.1 を示すために 2 次元の単体的複体 K と $L_0 = K^{a_1 \cdots a_m}$ と $L_0' = K^{b_1 \cdots b_n}$ が与えられたとき，L_k と L_k' $(k = 1, 2, \ldots)$ を構成する手続きを定義する。図の矢印は細分を表し，矢印の上についている星印は星状細分であること表している。最初に L_0 の星状細分で L_0' の細分になっている L_1 を構成する。次に L_0' の星状細分で L_1 の細分になっている L_1' を構成する。以下順に構成して行く。ある段階で $L_k = L_k'$ が成立すると，この L_k が求める共通星状細分であることが分かる。この事は次の節で示す。

$K^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1}}$ において星状細分 a_i を実行したとき，a_i を含む $K^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1}}$ の 1–単体が 2 つに分かれ，新たに 1–単体が何個か発生する。a_i が K の 2–単体の内点ならば 2 個，a_i が K の境界点ならば 1 個発生する。a_i が K の 1–単体上にあり，その 1–単体を含む K の 2–単体が μ_i 個あるなら μ_i 個発生する。その発生する 1–単体を $\ell_1(a_i), \ell_2(a_i), \ldots, \ell_{\mu_i}(a_i)$ とし，$L(a_i) = \ell_1(a_i) \cup \cdots \cup \ell_{\mu_i}(a_i)$ とする。

$K^{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}$ において星状細分 b_i を実行したとき，b_i を含む $K^{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}$ の 1–単体は 2 つに分かれ，新たに 1–単体が何個か発生する。b_i が K の 2–単体の内点なら

ば2個，b_i が $\boldsymbol{K}$ の境界点ならば1個発生する。b_i が $\boldsymbol{K}$ の1–単体上にあり，その1–単体を含む $\boldsymbol{K}$ の2–単体が ν_i 個あるなら ν_i 個発生する。その発生する1–単体を $\ell'_1(b_i), \ell'_2(b_i), \ldots, \ell'_{\nu_i}(b_i)$ とし，$L'(b_i) = \ell'_1(b_i) \cup \cdots \cup \ell'_{\nu_i}(b_i)$ とする。

A, B を変数とし，初期値は $A = a_1a_2\cdots a_m$, $B = b_1b_2\cdots b_n$ とする。A に対し $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}^A$, $c = c(A) = \sharp A + 1$ とおく。B に対し $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}^B$, $d = d(B) = \sharp B + 1$ とおく。ここで $\sharp A$ は A を構成する a_i の個数とし，$\sharp B$ は B を構成する b_i の個数とする。

[1st–Step] $\boldsymbol{L}_0$ から ($\boldsymbol{L}'_0$ を見ながら) $\boldsymbol{L}_1$ を作る過程を 1st–Step と呼ぶ。

1st–substep : B の先頭の b_1 に着目する。b_1 が A に含まれていないときは $a_c = b_1$ とし，A の値を Aa_c に変更する。これを $Aa_c \to A$ と書く。A の変更が行われると同時に，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}^A$ および $c = c(A) = \sharp A$ も変更される。b_1 が A に含まれているときはこの操作は行わない。

$\ell'_j(b_1) \subseteq |\boldsymbol{L}_{(1)}|$ となる1–単体が存在するとき，それらをすべて $L'(b_1)$ から取り除いた集合を $\widetilde{L}'$ とする。$\widetilde{L}' = \emptyset$ のときは次の substep に行く。空集合でないときは

$$\widetilde{L}' \cap \boldsymbol{L}_{(1)} = \left\{a_c, a_{c+1}, \ldots, a_{m(1)}\right\}$$

とおく。ただし a_i の順序は，通常 (Normal mode と呼ぶ) は次の様に決める ; $\ell'_1(b_1)$ 上の点から順に決めて行き，最後に $\ell'_{\nu_1}(b_1)$ 上の点を決める。同じ $\ell'_j(b_1)$ の中では b_1 に近い方から順に決めて行く。後で述べる別モード (LL mode と呼ぶ) では一旦決めたこの順序を一部変更する。ただし 1st–Step では LL mode に入らない。a_i の決め方は $\ell'_j(b_1)$ の順序の決め方に依存するが，できあがる星状細分は $\ell'_j(b_1)$ の順序の決め方によらない。点 $a_c, a_{c+1}, \ldots, a_{m(1)}$ が決定されたら，

$$Aa_ca_{c+1}\cdots a_{m(1)} \to A$$

とする。

以下 B の個数である n th–substep までこの操作を実行する。n th–substep が終った段階で $A_1 = A$, $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{K}^{A_1}$, $\alpha(1) = \sharp A_1$ とおく。

[1st'–Step] $\boldsymbol{L}'_0$ から ($\boldsymbol{L}_1$ を見ながら) $\boldsymbol{L}'_1$ を作る過程を 1st'–Step と呼ぶ。

1st–substep : A の先頭の a_1 に着目する。a_1 が B に含まれていないときは $b_c = a_1$ とし，$Bb_c \to B$ とする。B の変更が行われると同時に，$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}^B$ および $d = d(B) = \sharp B$ も変更される。a_1 が B に含まれているときはこの操作は行わない。

$\ell_j(a_1) \subseteq |\boldsymbol{L}'_{(1)}|$ となる1–単体が存在するとき，それらをすべて $L(a_1)$ から取り除いた集合を $\widetilde{L}$ とする。$\widetilde{L} = \emptyset$ のときは次の substep に行く。空集合でないときは

$$\widetilde{L} \cap \boldsymbol{L}'_{(1)} = \left\{b_d, b_{d+1}, \ldots, b_{n(1)}\right\}$$

とおく。ただし b_i の順序は，通常 (Normal mode と呼ぶ) は次の様に決める ; $\ell_1(a_1)$ 上の点から順に決めて行き，最後に $\ell_{\mu_1}(a_1)$ 上の点を決める。同じ $\ell_j(a_1)$ の中では a_1 に近い方から順に決めて行く。後で述べる別モード (LL mode と呼ぶ) では一旦

決めたこの順序を一部変更する。ただし 1st'–Step では LL mode に入らない。b_i の決め方は $\ell_j(a_1)$ の順序の決め方に依存するが，できあがる星状細分は $\ell_j(a_1)$ の順序の決め方によらない。点 $b_d, b_{d+1}, \ldots, b_{n(1)}$ が決定されたら，

$$Bb_d b_{d+1} \cdots b_{n(1)} \rightarrow B$$

とする。

以下 A の個数である $\alpha(1)$ th–substep までこの操作を実行する。$\alpha(1)$ th–substep が終った段階で $B_1 = B$，$\boldsymbol{L}'_1 = \boldsymbol{K}^{B_1}$，$\beta(1) = \sharp B_1$ とおく。

[$\boldsymbol{k}$ th–Step] $\boldsymbol{L}_{k-1}$ から ($\boldsymbol{L}'_{k-1}$ を見ながら) $\boldsymbol{L}_k$ を作る過程を k th–Step と呼ぶ。

$\boldsymbol{\beta(k-2)+1}$ th–substep : $(k-1)$ th–Step では $b_{\beta(k-2)}$ まで処理が終わっている。そこで処理されていない最初の b_i である B の $\beta(k-2)+1$ 番目の $b_{\beta(k-2)+1}$ に着目する。$b_{\beta(k-2)+1}$ が A に含まれていない場合は $a_c = b_{\beta(k-2)+1}$ とし，A の値を $Aa_c \rightarrow A$ とする。$b_{\beta(k-2)+1}$ が A に含まれているときはこの操作は行わない。

$\ell'_j(b_{\beta(k-2)+1}) \subseteq |\boldsymbol{L}_{(1)}|$ となる 1–単体が存在するとき，それらをすべて $L'(b_{\beta(k-2)+1})$ から取り除いた集合を $\widetilde{L}'$ とする。$\widetilde{L}' = \emptyset$ のときは次の substep に行く。空集合でないときは

$$\widetilde{L}' \cap \boldsymbol{L}_{(1)} = \left\{a_c, a_{c+1}, \ldots, a_{m(\beta(k-2)+1)}\right\}$$

とおく。ただし a_i の順序は，通常 (Normal mode と呼ぶ) は 1st–Step と同様に次の様に決める ; $\ell'_1(b_{\beta(k-2)+1})$ 上の点から順に決めて行き，最後に $\ell'_{\nu_{\beta(k-2)+1}}(b_{\beta(k-2)+1})$ 上の点を決める。同じ $\ell'_j(b_{\beta(k-2)+1})$ の中では $b_{\beta(k-2)+1}$ に近い方から順に決めて行く。一旦つけた順序を一部変更する場合がある (それを LL mode と呼ぶ)。定義は後で述べるが，$\ell'_j(b_{\beta(k-2)+1})$ の中の a_i と a_ℓ $(i < \ell)$ を端点とする線分に LL と名付けられた mark が指定されている場合がある。その場合は Normal mode で指定された a_i から a_ℓ までの順序を逆にする。2 つ以上の LL mark のついた線分が端点を共有している場合，連結な和集合を 1 つの塊と見てこの操作を実行する。ただし LL mark が付いていても，a_i が $\ell'_j(b_{\beta(k-2)+1})$ の端点の場合は入れ替えは行わず，その点を除いて入れ替えを実行する。

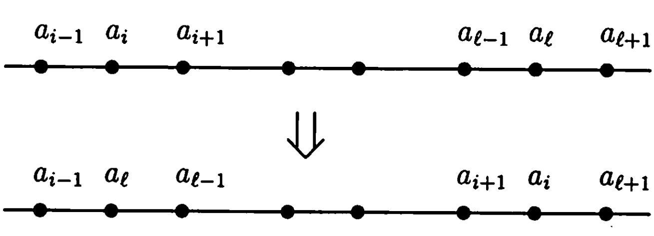


図 4.1

LL mode も含めて a_i を指定した後で

$$Aa_c a_{c+1} \cdots a_{m(\beta(k-2)+1)} \rightarrow A$$

とする。

以下現在の B の最後である $\beta(k-1)$ th–substep までこの操作を実行する。$\beta(k-1)$ th–substep が終った段階で $A_k = A$, $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{K}^{A_k}$, $\alpha(k) = \sharp A_k$ とおく。

[k th'–Step] $\boldsymbol{L}'_{k-1}$ から ($\boldsymbol{L}_k$ を見ながら) $\boldsymbol{L}'_k$ を作る過程を k th'–Step と呼ぶ。

$\alpha(k-1)+1$ th–substep : $(k-1)$ th'–Step では $a_{\alpha(k-1)}$ まで処理が終わっている。そこで処理されていない最初の a_i である A の $\alpha(k-1)+1$ 番目の $a_{\alpha(k-1)+1}$ に着目する。$a_{\alpha(k-1)+1}$ が B に含まれていない場合は $b_d = a_{\alpha(k-1)+1}$ とし，$Bb_d \rightarrow B$ とする。$a_{\alpha(k-1)+1}$ が B に含まれているときはこの操作は行わない。

$\ell_j(a_{\alpha(k-1)+1}) \subseteq |\boldsymbol{L}'_{(1)}|$ となる 1–単体が存在するとき，それらをすべて $L(a_{\alpha(k-1)+1})$ から取り除いた集合を $\widetilde{L}$ とする。$\widetilde{L} = \emptyset$ のときは次の substep に行く。空集合でないときは

$$\widetilde{L} \cap \boldsymbol{L}'_{(1)} = \left\{b_d, b_{d+1}, \ldots, b_{n(\alpha(k-1)+1)}\right\}$$

とおく。ただし b_i の順序は，通常 (Normal mode と呼ぶ) は 1st'–Step と同様に次の様に決める；$\ell_1(a_{\alpha(k-1)+1})$ 上の点から順に決めて行き，最後に $\ell_{\mu_{\alpha(k-1)+1}}(a_{\alpha(k-1)+1})$ 上の点を決める。同じ $\ell_j(a_{\alpha(k-1)+1})$ の中では $a_{\alpha(k-1)+1}$ に近い方から順に決めて行く。先程述べたのと同じ様に別モード (LL mode と呼ぶ) では一旦つけた順序を一部変更する。LL mode も含めて b_i を指定した後で

$$Bb_d b_{d+1} \cdots b_{m(\alpha(k-1)+1)} \rightarrow B$$

とする。

以下現在の A の個数である $\alpha(k)$ th–substep までこの操作を実行する。$\alpha(k)$ th–substep が終った段階で $B_k = B$, $\boldsymbol{L}'_k = \boldsymbol{K}^{B_k}$, $\beta(k) = \sharp B_k$ とおく。

この操作を繰り返し実行して $\boldsymbol{L}_k$ および $\boldsymbol{L}'_k$ を構成していく。

5 操作は有限回で止まる

前節で定義した操作 (LL に関してはまだ説明していないが) に基づいて定義される $\boldsymbol{L}_k$ および $\boldsymbol{L}'_k$ に対しある k が存在して $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{L}'_k$ となれば，命題 4.1 は証明され，前節の操作は共通星状細分をつくるアルゴリズムになっていることが分かる。

k th–Step においては $\boldsymbol{L}_k$ に属する 1–単体を赤線，$\boldsymbol{L}'_{k-1}$ に属する 1–単体を青線，$\boldsymbol{L}_{k-1}$ に属する 1–単体を黒線と呼ぶ。k th'–Step においては $\boldsymbol{L}'_k$ に属する 1–単体を赤線，$\boldsymbol{L}_k$ に属する 1–単体を青線，$\boldsymbol{L}'_{k-1}$ に属する 1–単体を黒線と呼ぶ。1st–Step 以外では黒線は青線であり，青線は赤線である。赤線であって青線でも黒線でもない線を赤い線と呼び，青線であって黒線でない線を青い線と呼ぶ。各 Step は黒線を出発点として，青い線を引いて行き，副作用として赤い線も引かれる。その Step で青い線のみで赤い線が引かれないという状態になったとき，$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{L}'_k$ または $\boldsymbol{L}'_k = \boldsymbol{L}_{k+1}$ となる。一旦 $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{L}'_k$ または $\boldsymbol{L}'_k = \boldsymbol{L}_{k+1}$ が成立するとその後のす

べての Step で等号が成立する。以下図を描くときは白黒なので黒線は少し太い線，青い線は実線，赤い線は点線で書く。場合によって青線を実線で書く場合もある。

以下補題を幾つか証明していきながら，前節の操作が有限回で止まることを示す。最初の補題は自明である。

補題 5.1 各 Step で新しく発生する頂点は青線の上に乗っている。

補題 5.2 各 Step で赤い 3 辺を持つ 2–単体は存在しない。

証明　各 Step では 3 辺が黒線である 2–単体 (黒線 2–単体と呼ぶ) を青い線で分割して行き，その副作用として赤い線が発生する。よって黒線 2–単体を任意に 1 つ固定して，その内部を考える。考えている Step でその黒線 2–単体に s 個の青い線が引かれるとする。s に関する帰納法で証明する。$s = 0$ のときは青い線・赤い線ともにないので補題は正しい。s より小さいときは赤い 2–単体 (3 辺が赤い 2–単体) が存在しないと仮定する。黒線 2–単体に引かれる最初の青い線は図 5.1 のいずれかである。青い線が 2–単体を 2 つに分けるが，3 辺形になっている部分は帰納法の仮定を適用できるので問題はない。よって 4 辺形になっている部分のみを考える。

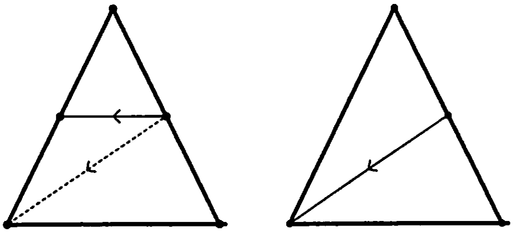


図 5.1

黒線 2–単体を $s-1$ 個の青い線でカットしてできる多辺形を考える。最後の s 番目の青い線でカットした結果は (赤い線を無視すれば) 青線 3 辺形になるので，多辺形は 4 辺形または 3 辺形である。4 辺形または 3 辺形は赤い辺で 3 辺形に分割されているが帰納法の仮定から少なくとも 1 辺は青線であり，図 5.2 左図の様になっている。この 3 辺形に青い線が通ることにより赤い線が発生するが，図 5.2 右図の様に新たにできる 3 辺形のうちの少なくとも 1 辺は青線になっている。∎

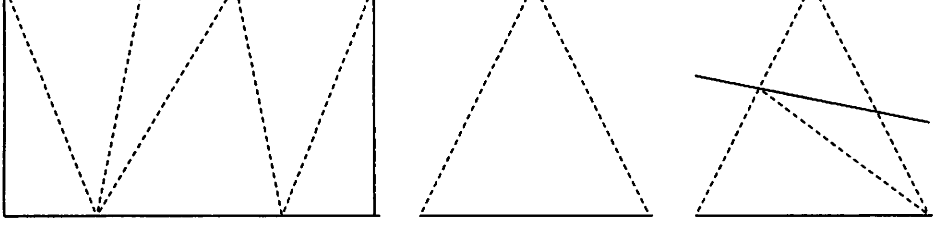


図 5.2

補題 5.3 1st–Step 以外では，赤い線が青線 2–単体を分割するとき，少なくとも 1 辺は分割されない。即ち，黒線でもある青線は分割されない。

証明 1st–Step 以外では，k th–Step または k th'–Step の青い線は $(k-1)$ th'–Step または k th–Step の赤い線になっている。補題 5.2 において Step を 1 つ移動することにより，1st-Step 以外では「青い 3 辺形」は存在しないことが分かる。よって青線 3 辺形の 1 辺は黒線上にある。黒線に乗っている青線が分割されているとすると，ある点があってそこから赤い線が出ている。赤い線は青い線を引く副作用で引かれるので，その点から外側に青い線が出ている。そこは 1 つ前の段階の単体的複体の頂点となっていて，考えている 2–単体が頂点を 4 つ持つことになり矛盾。 ∎

$\boldsymbol{L}_k$ 及び $\boldsymbol{L}'_k$ $(k \geq 1)$ の 2–単体 δ に対し，分割数 $m(\delta)$ 及び複雑度 (*complexity*) $c(\delta)$ を定義する。$\delta \in \boldsymbol{L}_k$, $\delta' \in \boldsymbol{L}'_{k-1}$ かつ $\delta \subseteq \delta'$ とする。2 つの 2–単体がこの様な状況にあるとき $\delta \lhd \delta'$ と書く。k th–Step では δ' は青線 3 辺形，δ は赤線 3 辺形である。δ' は $\boldsymbol{L}_k$ においては赤い線 $R_1, R_2 \ldots, R_t$ [(2)]によって分割されている。ただし，$R_1, \ldots, R_t$ の順は $\boldsymbol{L}_{k-1}$ から $\boldsymbol{L}_k$ を作るとき (k th–Step) に引かれる順とする。

R_1 は δ' を 2 つの領域 $\square^1_1$, $\square^1_2$ に分ける。このときそれぞれの領域の分割数を 1 と定義する。R_2 は $\square^1_i$ $(i=1$ または $2)$ を 2 つに分割する。分割されたそれぞれの領域の分割数は 2 と定義する。領域の名前をつけ直し $\square^2_1$, $\square^2_2$, $\square^2_3$ とする。R_3 は $\square^2_i$ $(i=1$ または $2,3)$ を 2 つに分ける。分割された領域を「$\square^2_i$ の分割数 $+1$」と定義する。領域の名前をつけ直し，$\square^3_1$, $\square^3_2$, $\square^3_3$, $\square^3_4$ とする。以下この操作を続ける。最後の段階では $\square^t_1, \square^t_2, \ldots, \square^t_{t+1}$ は $\boldsymbol{L}_k$ の 2–単体になっている。それぞれに対し分割数が定義されているので，それをそれぞれの 2–単体 δ の分割数といい，$m(\delta)$ で表す。また

$$c(\delta') = \max\{\, m(\delta) \mid \delta \lhd \delta' \,\}$$

を δ' の複雑度と呼ぶ。$\delta \in \boldsymbol{L}_k$, $\delta' \in \boldsymbol{L}'_k$, $\delta' \subseteq \delta$ の場合 (この場合も $\delta' \lhd \delta$ と書く) も同様に分割数・複雑度を定義できる。また $\boldsymbol{L}_k$, $\boldsymbol{L}'_k$ の複雑度 (*complexity*) を

$$c(\boldsymbol{L}_k) = \max\{\, c(\delta) \mid \delta \in \boldsymbol{L}_k \,\} \qquad c(\boldsymbol{L}'_k) = \max\{\, c(\delta') \mid \delta' \in \boldsymbol{L}'_k \,\}$$

で定義する。

分割数は 1st–Step でも考えることができるが，我々は分割数を考える 2–単体は補題 5.3 の条件が満たされているもののみを考えることにしたい。このとき δ の δ' 内の type を次の様に定義する。δ' 内の赤い線 $R_1, \ldots, R_s$ とする。ただしこの R_j は δ の分割数に関係のあるもののみを選んでおく。δ' を黒線が下になる位置におく。δ' の左右は R_1 の引かれる方向が右から左になる様に選んでおく。赤い線 R_j から見て δ が下にあるとき，R_j の (δ に関する) DUtype は D であると決める。上にあると

[(2)]分割線と呼ぶ。

きはUとする。R_j が右から左に引かれているとき R_j の LRtype は L，左から右に引かれているときは R と決める。R_j の type を DUtype と LRtype を並べたものとする。即ち DL，DR，UR，UL のいずれかとする。δ の type を $R_1, \ldots, R_s$ の type を並べてできる列として定義する。図 5.3 の例だと δ の type は DL·DL·UR·UR となる。

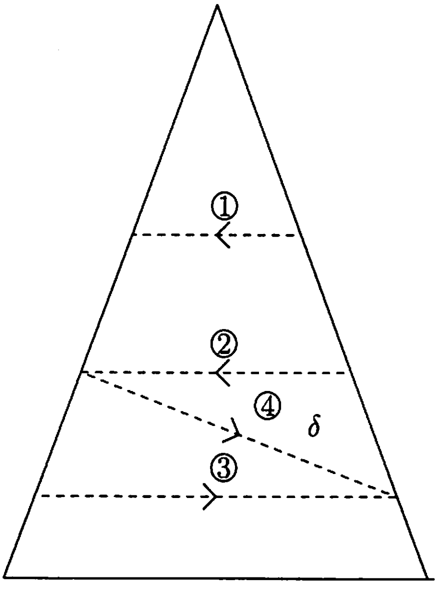


図 5.3

補題 5.4 $k \geq 2$ に対し $c(\boldsymbol{L}'_{k-1}) \geq c(\boldsymbol{L}_k) \geq c(\boldsymbol{L}'_k)$ が成立する。

次の補題 5.5 を示せば補題 5.4 は示される。

補題 5.5 $k \geq 2$，$\delta \in \boldsymbol{L}_k$，$\delta' \in \boldsymbol{L}'_{k-1}$，$\delta \lhd \delta'$ に対し $m(\delta) \leq m(\delta')$ が成立する。

証明　$\widetilde{\delta} \in \boldsymbol{L}_{k-1}$ を $\delta' \lhd \widetilde{\delta}$ となる 2–単体とする。$m(\delta') = s$ とし，$B_1, B_2, \ldots, B_s$ を δ' の分割数に関係する $\widetilde{\delta}$ 内の分割線とする。定義では青線 3 辺形内の赤線 3 辺形を考えたが，ここでは 2 つの段階を考えるので，δ' の分割数を考えるときの分割線は青い線とする。分割数を定義するときに考えた $\square^i_j$ で δ' を含むものを $\square^i$ と書く。このとき $\square^s = \delta'$ である。各 $\square^i$ は赤い線により幾つかの 3 辺形に分割されている。新たな青い線によって $\square^i$ が分割数も含めてどの様に変化するかを調べる。最初は例を見る。図 5.3 の例を考える。

〔22〕

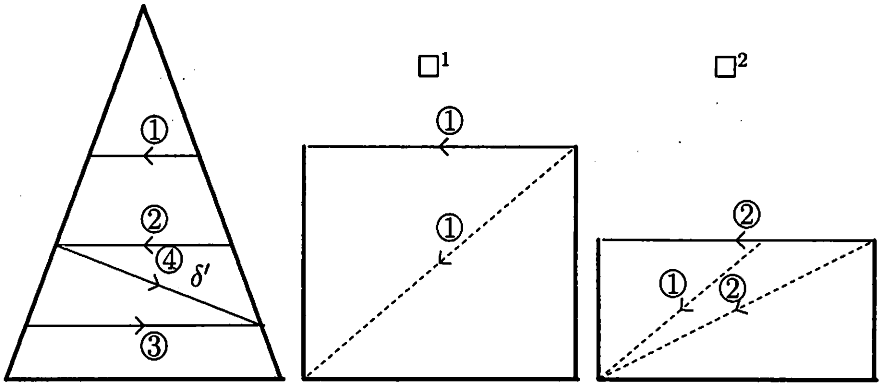


図 5.4

$\square^1$ は 4 辺形だが赤い線により上向き 3 辺形と下向き 3 辺形に分かれている。それぞれの 3 辺形の分割数は 1 である。これを

$$\square^1 = (\underset{1}{\triangledown}, \underset{1}{\triangle})$$

と書いておく。次の B_2 (青い線②) で $\square^1$ はカットされ，一方が $\square^2$ になると同時に，$\square^2$ に赤い線②が引かれる。下向き 3 辺形部分は分割されるだけで新たな赤い線は引かれない。上向き 3 辺形部分は分割され，更に赤い線②が引かれる。$\square^2 = (\underset{1}{\triangledown}, \underset{2}{\triangledown}, \underset{2}{\triangle})$ となっている。以下

$$\square^3 = (\underset{2}{\triangledown}, \underset{2}{\triangle}, \underset{3}{\triangledown}, \underset{3}{\triangle}, \underset{2}{\triangle}) \qquad \square^4 = (\underset{2}{\triangledown}, \underset{2}{\triangle}, \underset{4}{\triangledown}, \underset{4}{\triangle}, \underset{3}{\triangle}, \underset{2}{\triangledown})$$

となる。$\square^4 = \delta'$ なので δ' は分割数 $2, 2, 4, 4, 3, 2$ の 6 個の 3 辺形に分かれることが分かる。

一般に分割線の type が DL のときの 3 辺形の変化は

$$\underset{t}{\triangle} \xrightarrow{\text{DL}} (\underset{t+1}{\triangledown}, \underset{t+1}{\triangle}) \qquad \underset{t}{\triangledown} \xrightarrow{\text{DL}} \underset{t}{\triangledown}$$

となっている。他の type の場合はそれぞれ

$$\underset{t}{\triangle} \xrightarrow{\text{DR}} (\underset{t+1}{\triangle}, \underset{t+1}{\triangledown}) \qquad \underset{t}{\triangledown} \xrightarrow{\text{DR}} \underset{t}{\triangledown}$$

$$\underset{t}{\triangledown} \xrightarrow{\text{UR}} (\underset{t+1}{\triangledown}, \underset{t+1}{\triangle}) \qquad \underset{t}{\triangle} \xrightarrow{\text{UR}} \underset{t}{\triangle}$$

$$\underset{t}{\triangledown} \xrightarrow{\text{UL}} (\underset{t+1}{\triangle}, \underset{t+1}{\triangledown}) \qquad \underset{t}{\triangle} \xrightarrow{\text{UL}} \underset{t}{\triangle}$$

となる。B_j と B_{j+1} が端点を共有して赤い線が発生しない場合もあるし (先程の $\square^3$ から $\square^4$ の過程で起きている)，赤い線が δ' の内点と交わらないために上の様に変化しない場合もある。この場合を退化している場合ということにする。退化している場合は分割数が減ることはあっても増えることはないので補題は示される。∎

補題 5.5 は

$$c(\delta) \leq m(\delta)$$

とも言い替えられる。$\boldsymbol{L}_k$ のすべての 2–単体 δ に対して $c(\delta) < m(\delta)$ が成立すればよいのだが，そうはなっていない。δ を図 5.5 のものとする(3)。type は $\mathrm{DL}^3{\cdot}\mathrm{UL}$ である。図 5.5 右の様な模式図も用いる(4)。

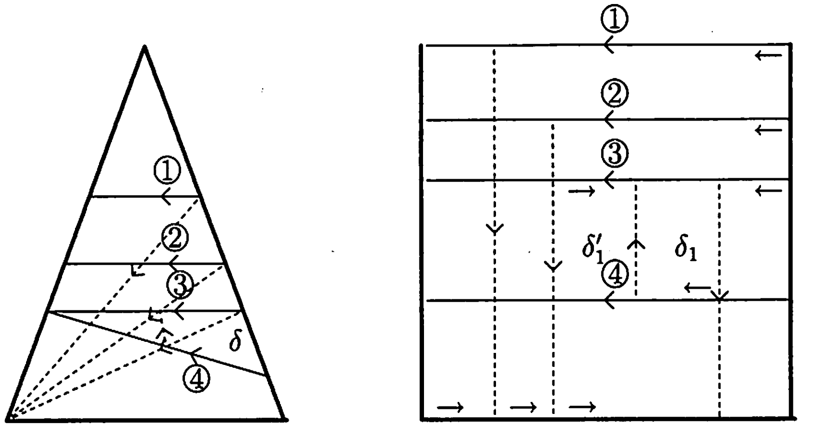


図 5.5

模式図では赤い線は縦に書かれているが，赤い線の始点と終点を青い線に添えられている矢印で頂点まで引き戻したのが実際の図である。3 辺形も 4 辺形で書かれているが，これも青い線に添えられている矢印で引き戻すと 3 辺形になる (δ そのものも 4 辺形として描かれている)。実際の図は青い線の数が多くなると見にくくなるが，模式図はまだましである。例では **LL** のことは考えずに **Normal mode** で細分が生成されていくものと考える。模式図で見ると δ_1 の type が $\mathrm{DL}^2{\cdot}\mathrm{UL}{\cdot}\mathrm{DR}$ であることが分かる。

δ に含まれる $\boldsymbol{L}_k'$ の 2–単体で分割数が 4 なのは δ_1 と δ_1' だけである。δ_1' の 2 番目の分割線が最初の分割辺の上にあるので $c(\delta_1') < m(\delta_1')$ が成立する。よって δ_1 に着目する。δ_1 に関する模式図を書くと δ_2, δ_2' 以外は分割数が下がっている。δ_2' は分割数は 4 であるが，2 番目の分割線が最初の分割線の上にあるので，$c(\delta_2') < m(\delta_2')$

---

(3)図では注目している 2–単体に関連する分割線のみ書いてあり，関連のない分割線は省略している。以下同様とする。
(4)模式図でも前注と同様に関連のない分割線は省略している。

となっている。δ_2 は $m(\delta_2) = m(\delta_1)$ であるが，UUtype(後述なので) $c(\delta_2) < m(\delta_2)$ となっている。即ち

$$4 = m(\delta) = c(\delta) = m(\delta_1) = c(\delta_1) = m(\delta_2) > c(\delta_2)$$

となっている。

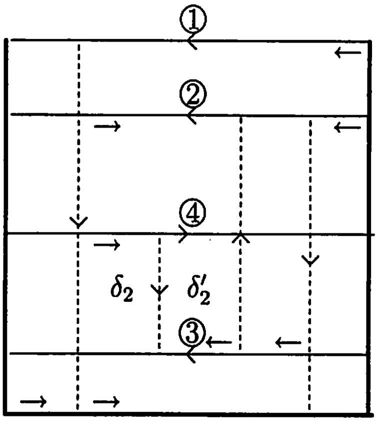


図 5.6

補題 5.6 $\delta \in \boldsymbol{L}_k$ に対し次が成立する。
(1) $\delta' \lhd \delta$ となる $\delta' \in \boldsymbol{L}'_k$ は2個を除いて $m(\delta') < m(\delta)$
(2) 除外された2個の内1つの δ' に対し $c(\delta') < m(\delta')$ が成立する。
(3) $c(\delta) = m(\delta)$ のとき $\delta' \lhd \delta$ で

$$c(\delta') = m(\delta') = c(\delta)$$

となる δ' は存在したとしても高々1つである。

証明　補題 5.5 の証明を見ると各 step で分割辺の個数と同じ分割数を持つ可能性のある領域は高々2個であることが分かるので (1) は成立している。最後の step でこの2つの領域は隣り合わせであり，3辺形の向きは逆になっている。δ の最初の分割線および2番目の分割線とこれら2つの3辺形が交わらなければ分割数は下がる。よってどちらの分割線とも交わっているとしてよい。よってこれらの2–単体の一方は2番目の分割線が最初の分割線の上にあり，複雑度は分割数より小さくなっている。∎

δ の type を1つ与えると，補題 5.6 の (3) の 2–単体 δ' が唯1つ存在する。δ' の分割数が下がっている場合もあるが，退化の問題を無視して **Normal mode** のみの

模式図の世界の対応を考えれば，type に対し別の type を対応させる写像を定義することができる。$s \geq 3$ に対し type の集合を

$$TS(s) = \{\, \mathrm{DL}\cdot\gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_s \mid \gamma_i = \mathrm{DL,DR,UR\ or\ UL} \}$$

とするとき，$TS(s)$ から $TS(s)$ への写像 T をこの様な写像として定義する。

補題 5.7 $T : TS(s) \longrightarrow TS(s)$ は一対一写像である。

証明　例で説明する。$Y = \mathrm{DL}\cdot\mathrm{UR}\cdot\mathrm{DL}$ とする。Y から $X \in TS(s)$ で $T(X) = Y$ となるものを一意的に復元できることを見る。Y の模式図は図 5.7 左の様になっている。X を $T(X) = Y$ となる $TS(3)$ の元とする。X の模式図は図 5.7 中央または右となっている。

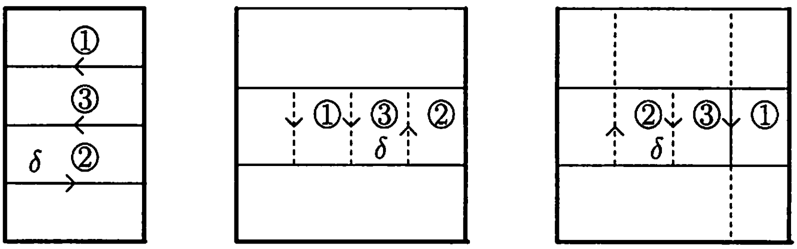


図 5.7

X の最初の分割線の type は DL であり，X の 2 番目の分割線の DUtype が U のとき 2 番目の分割線によって生じる赤線は最初の分割線によって生じる赤線の左にある。この場合，右の図が正しい置き方になっている。DUtype が D である 3 番目の分割線が 2 番目の分割線の右にあるので，2 番目の分割線の LRtype は R であることが分かる。よって X の 2 番目の分割線の type は UR である。最後の分割線の LRtype は δ の選ばれ方により決まる。δ が選ばれているということは，今の場合の最初の分割線と 2 番目の分割線と δ の関係から δ は上向き 3 辺形でなくてはならない。これは 3 番目の分割線の LRtype が R であることを意味している。よって $X = \mathrm{DL}\cdot\mathrm{UR}\cdot\mathrm{DR}$ となる。一般の場合も同様に一意的に決定できるので，T は一対一である。∎

任意の type を T で写していったとき，何回か写すと，退化することが証明できればよいのだが，そうはならない例が (残念ながら) 存在する。$t \geq 3$ とし，$s = 2t$ とするとき $O_s = (\mathrm{DL}\cdot\mathrm{UR})^t$ とおく。

補題 5.8 $T(O_s) = O_s$ であり，$s \geq 3$ 以上のとき退化は起こらない。

証明　図 5.8 より $T(O_s) = O_s$ が成立してることが分かる。退化しないのは青い線に付いている矢印の状況から分かる。■

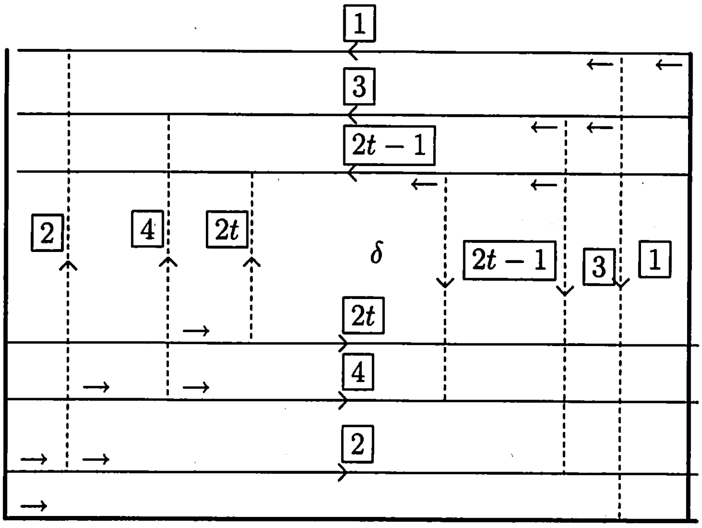


図 5.8

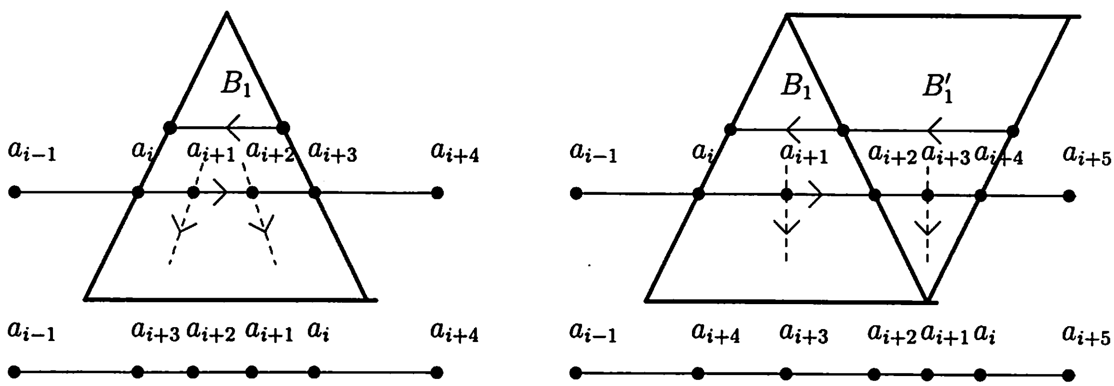


図 5.9

ここで保留していたLL modeについて説明する。k th–Stageを考える。$\delta \in \boldsymbol{L}_{k-1}$ に対し「δ にLLを適用する」とは δ の2番目以降の分割線に対しそれが最初の分割線と向きが逆の場合「LL mark」を付けることを意味する。LL markが付けられると，星状細分の生成の所で説明した様にNormal modeで定められた順序が一部変更される。δ の分割線を $B_1, \ldots, B_s$ とする。このとき2番目以降の分割線が最初の分割線と同じ方向になる様に，即ち分割線のLRtypeがすべてLになる様に頂

点の順序を入れ替える。即ち δ が図 5.9 左の様になっているときは a_i から a_{i+3} までを入れ替える。この入れ替えは δ の内部にのみ影響を与え，他の細分の状況を変えることはない。LL mark の付いた分割線が 2 個以上連続して存在している場合は右図の様に一度に入れ替える。

ただし u th–step における LL mark の付いた分割線が $\ell'_j(b_u)$ の端点を含んでいるときは，その端点の順序は入れ替えない (入れ替えられないというべきか)。即ち $\ell'_j(b_u)$ に対し b_u と等しい a_k を A_s とし，他の端点を A_e とするとき A_s と A_e の順序は入れ替えない。この場合 $\ell'_j(b_u)$ を引こうとするときに，すでに A_s(または A_e) を通る青線が引かれているか黒辺 3 辺形の頂点であることに注意すると，A_s(または A_e) を含む赤線 3 辺形内で A_s(または A_e) はその 3 辺形の頂点になっている。よって A_s(または A_e) を含む赤線 3 辺形内で $\ell'_j(b_u)$ が新たな赤線を発生させることはない。よって他の点を入れ換えれば，出来上がる細分は，A_s(または A_e) の順序を入れ換えた細分と同じものになっている。

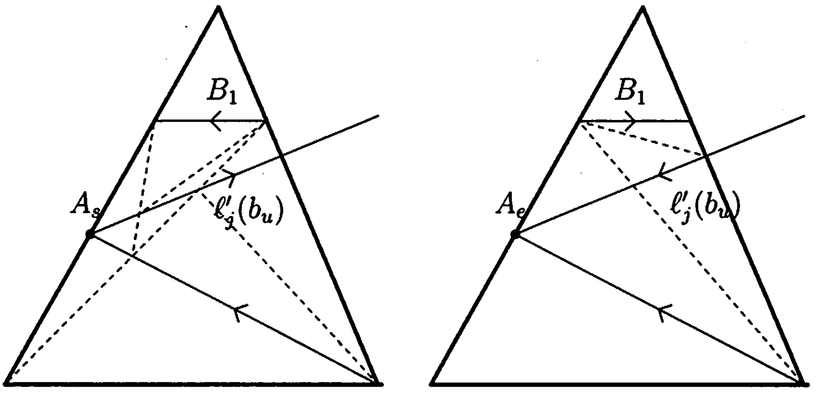


図 5.10

LL を適用するのは次の 2 つ場合である。

(1) $\boldsymbol{L}_2$ に属するすべての 2–単体に適用する。
(2) 2nd–Stage 以降では $\delta_1 \lhd \delta_2$ であり，$m(\delta_1) < m(\delta_2)$ となったすべての 2–単体 δ_1 に適用する。

$X = \mathrm{DL} \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_s \in TS(s)$ の γ_i $(i \geq 2)$ の DUtype がすべて D のとき X を DDtype と呼ぶ。γ_i $(i \geq 2)$ の DUtype がすべて U のとき X を UUtype と呼ぶ。γ_i $(i \geq 2)$ の LRtype がすべて L のとき X を LLtype と呼ぶ。

補題 5.9 $R \in TS(s)$ が DDtype ならば $T(R)$ は LLtype である。逆に $T(R)$ が LLtype ならば R は DDtype である。

証明　R が DDtype のとき 3 辺形 (模式図では 4 辺形) は元の 3 辺形 (模式図では 4 辺形) の一番下にある。赤線は上から来るしかなく，$T(R)$ の分割線の LRtype は一致している。最初の分割線の type は L なので $T(R)$ は LLtype である。逆は T が一対一から従う。 ▮

補題 5.10 $Q \in TS(s)$ が LLtype ならある自然数 N が存在して $T^N(Q)$ は DDtype である。

証明　補題 5.7 と補題 5.9 から従う。 ▮

補題 5.11 δ が DDtype または UUtype のとき $\delta_2 \lhd \delta_1 \lhd \delta$ に対し $m(\delta_2) < m(\delta)$ となる。

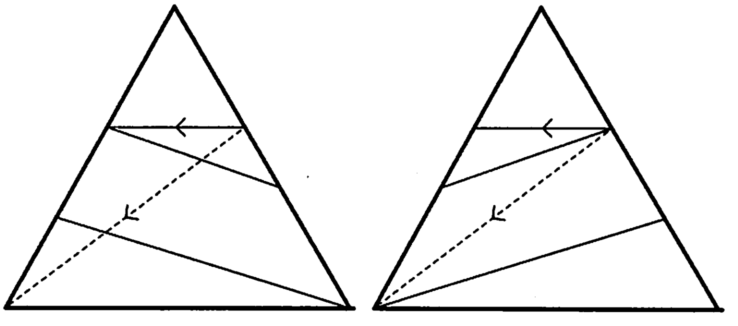


図 5.11

証明　図 5.11 の様に δ_1 が δ の最初の分割線と交わらないか (右図)，最初の分割線の上に 2 番目の分割線がある (左図) のいずれかである。右図の場合は $m(\delta_1) < m(\delta)$ となる。左図の場合 $m(\delta_1) = m(\delta)$ となる場合もあるが，その場合も $c(\delta_1) < m(\delta_1)$ となるので補題は成立する。 ▮

前節で定義した星状細分の列はいつかは止まる。即ち次が成立する。

命題 5.12 ある自然数 N が存在して

$$c(\boldsymbol{L}_N) = 0$$

となる。

命題 5.12 を示せば命題 4.1 が成立し，定理が示される。そのためには次の命題を示せば命題 5.12 および命題 4.1 が従う。

命題 5.13 任意の自然数 k に対しある自然数 N が存在し

$$c(\boldsymbol{L}_{k+N}) < c(\boldsymbol{L}_k)$$

が成立する。

証明　$\delta \in \boldsymbol{L}_k$ を $c(\boldsymbol{L}_k) = c(\delta)$ を満たす $\boldsymbol{L}_k$ の 2–単体とする。その様な δ は有限個である。
(I) δ が複雑度が減って δ になった場合 (直前の減った場合を考える)，減ったときに LL が適用されているので，ある $N = N(\delta)$ が存在して，

$$\delta_N \lhd \delta'_N \lhd \cdots \lhd \delta_1 \lhd \delta'_1 \lhd \delta$$

に対し $m(\delta_N) < m(\delta)$ となる。
(II) δ の分割度が今まで減ってない場合は，2nd-Stage で LL が適用されているので同様に $N = N(\delta)$ が存在して，

$$\delta_N \lhd \delta'_N \lhd \cdots \lhd \delta_1 \lhd \delta'_1 \lhd \delta$$

に対し $m(\delta_N) < m(\delta)$ となる。
　$c(\boldsymbol{L}_k) = c(\delta)$ となる $\boldsymbol{L}_k$ の 2–単体のすべてを

$$\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^\mu$$

とするとき

$$N = \max \{ N(\delta^i) \mid i = 1, \ldots, \mu \}$$

とおくと

$$c(\boldsymbol{L}_{k+N}) < \boldsymbol{L}_k$$

となっている。∎

参考文献

[1] J. W. Alexander, The combinatorial theory of complexs, Ann. of Math. 31(1930) No2 292–320

[2] V. Günter Ewald, Über stellare Unterteilung von Simpliziakomplexn , Archives of Math. 46(1986) No2 153–158