

HAKONE SEMINAR 15 (1999) 181-202.

拡張版 DS について

河野正晴 (北見工業大学)

拡張版というのはグラフを連結でないものも考えることを意味します。連結の場合 (通常の DS diagram の場合) よく知られているようにラベル付きグラフから identification が一意的に決まりますが, グラフの連結性をはずすと一般には正しくありません。2枚の planar surface が張り合わされている場合は, 池田さんにより多様体が unique である事が分かっています。ここではその条件も外して, ラベル付きグラフから多様体がどれぐらい決定されるか結論は「4つのタイプの例外を除き, 拡張版 DS が決める多様体はについて以下の結果を得ました。ラベル付きグラフから決まる」というものです。3つはその様な例があります。最期のタイプは除けるのではないかと思っていますが, まだ成功していません (残念)。

1 定義と結果

この節では拡張版 DS diagram の定義と結果について述べます。グラフの連結性をはずしたのでグラフがのっている曲面も連結でなくてよいことにします。

ここでグラフといったら vertex を含まない loop (津久井さんに従ってこれを hoop と呼びます) も許すことにします。

定義 1 $\Delta = (S, G, f)$ が extended DS diagram (拡張版 DS diagram 略して ES と書きます) であるとは以下の条件をみたすこととします。 $S = \bigcup_{i=1}^p S_i^2$ は向きのつけられた有限個の 2 球面の集まり, G は S 上の 3-regular なグラフで f は S からある fake surface P への onto local homeomorphism で次を満たす。

$$(1) f|_{V(G)} : V(G) \rightarrow V(P) \text{ は } 4 \text{ 対 } 1$$

$$(2) f|_{E(G)} : E(G) \rightarrow E(P) \text{ は } 3 \text{ 対 } 1$$

$$(3) f|_{S-G} : S - G \rightarrow F(P) \text{ は } 2 \text{ 対 } 1$$

ただし, $V(G), V(P)$ は G および P の頂点, $E(G), E(P)$ は edge, $F(P)$ は P の face である。

$B = \bigcup_{i=1}^p B_i^3$ を向きの付けられた有限個の 3 球体で, $\partial B_i^3 = S_i^2$ と考えたとき, B/f を $M(\Delta)$ と書く。 $M(\Delta)$ が向き付け可能のとき, その向きは B のそれから定まっているとす。

定義 2 (S, G, g) がラベル付きグラフであるとは以下の条件を満たすこととします。 S, G は定義 1 と同じとします。 E_g を loop と arc の集まり, g を $E(G)$ から E_g への onto な orientation preserving な local homeomorphism で 3 対 1 なもの。なお edge の向きは S の向きとは無関係で, E_g の向きを 1 つ決めると決まるものとする。

ES $\Delta = (S, G, f)$ に対し $g = f|_{E(G)}$ と置くと, (S, G, g) はラベル付きグラフになる。このラベル付きグラフを $L(\Delta)$ と書く。

この定義ではラベル付きグラフという感じがしないかもしれないので、次の様に G の edge に向き付きラベルがついていると考えてもよい。 E_g の component C に対し、 $g^{-1}(C)$ が3つの component のときそれぞれに向き付きラベル C を付ける。 $g^{-1}(C)$ が2つの component からなるときはそれ上で g が2対1になっている成分に $2C$ 、1対1になっている成分に C のラベルを付ける (ただし ES から来てる場合、これはおきない)。 $g^{-1}(C)$ が connected のときはラベル $3C$ を付ける。

次に ES, ラベル付きグラフの同値を定義しよう。

定義 3 2つの ES $\Delta = (S, G, f)$ と $\Delta' = (S', G', f')$ が同値であるとは S から S' への orientation preserving homeomorphism F と P から P' への homeomorphism \underline{F} が存在して $f' \circ F = \underline{F} \circ f$ を満たす。このとき $\Delta \equiv \Delta'$ と書く。

またラベル付きグラフ (S, G, g) 、 (S', G', g') が同値であるとは S から S' への orientation preserving homeomorphism F と E_g から $E_{g'}$ への同相写像 \underline{F} が存在して $g' \circ F|_{E(G)} = \underline{F} \circ g$ を満たす。このとき $(S, G, g) \equiv (S', G', g')$ と書く。

以下同値な ES, ラベル付きグラフは $G = G'$ と仮定する事にする。

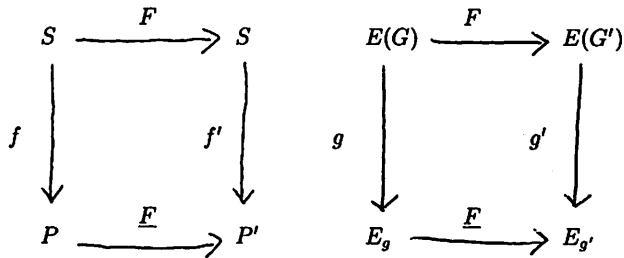


図 1

ラベル付きグラフが多様体を一意的に決めない例外となる4つのタイプを次に述べよう。

④

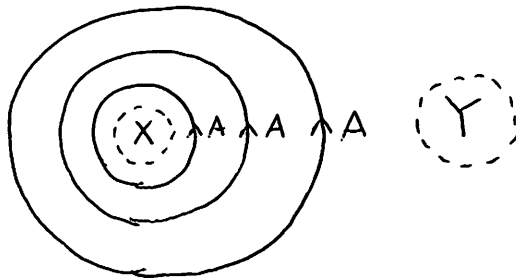


図 2

ラベル A を 2 つもつ (穴あき or 穴なし)annulus が自分自身と張り合わせられる場合は $M(\Delta) = M_1 \# P^3 \# P^3$ となるのに対し他の annulus と張り合わせられる場合は $M(\Delta) = M_1 \# S^2 \times S^2$ となる。

ⓑ

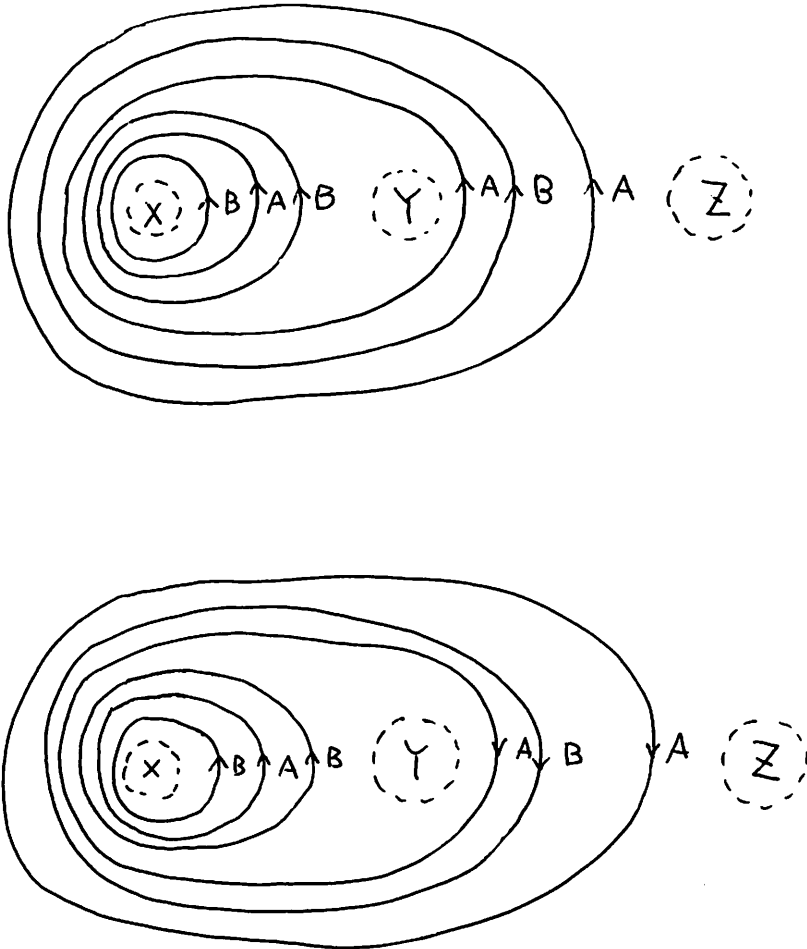


図 3

いずれの場合も (穴あき or 穴なし)annulus の張り合わせられる相手により一方は $M(\Delta) = M_1 \# S^2 \times S^1$, 他方は $M(\Delta) = M_1 \# S^2 \times S^1$ となる。ただし, $S^2 \times S^1$ は S^1 上の twisted S^2 -bundle.

Ⓒ

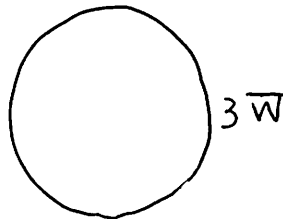


図 4

同一視の仕方により $M_1 \# L(3,1)$ または $M_1 \# L(3,2)$ になる。

Ⓓ

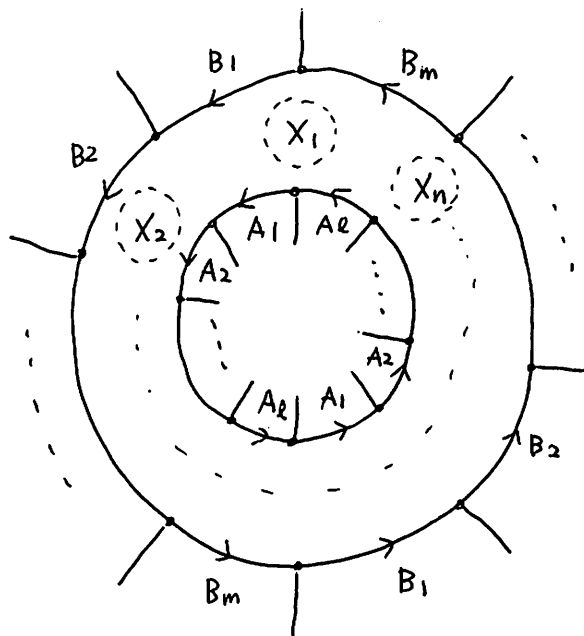


図 5

ただし図 5 において $n \geq 2$ である。この例で identification の違いにより多様体が異なる例は得られていない。この場合多様体は unique ではないかと予想している。

以上の準備により我々は次の様な定理を記述できる。

定理 2つの ES $\Delta = (S, G, f)$ と $\Delta' = (S', G', f')$ が同じラベル付きグラフを決めるとき、つまり $L(\Delta) \equiv L(\Delta')$ となるとき、 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}, \textcircled{D}$ を除くと $M(\Delta) \cong M(\Delta')$ 、ただし「 \cong 」は orientation preserving homeomorphism が存在することを意味する。

2 補題と定理の証明

この節ではいくつかの補題を証明しながら定理を証明する。次の補題は (拡張版でない)DS-diagram のときと同様に成り立つ。

補題 1 ES においても次図 6 の様なラベルづけは存在しない。



図 6

ES の identification は local homeomorphism なので、この様なラベル付けは存在しない。■

以下 $\Delta = (S, G, f)$ と $\Delta' = (S, G, f')$ は同じラベル付きグラフを与える、つまり $L(\Delta) \equiv L(\Delta')$ を満たすものとする。ES $\Delta = (S, G, f)$ が与えられると、 $S - G$ 上の fixed point free involution (以下簡単に free involution と呼ぶ) τ が以下の様に決まる。 $p \in S - G$ に対し $f^{-1}f(p) = \{p, p'\}$ とするとき、 $\tau(p) = p'$ とする。別の ES $\Delta' = (S, G, f')$ に対しても同じように involution が存在するが、これを τ' と書く事にする。

グラフ G の regular neighborhood $U(G)$ を 1 つ固定し、 f を同値の範囲で取り換えて、 $U(G) - G$ が τ で不変になるようにする。 $U(G)$ に block bundle の構造を入れ、 f を同値の範囲で取り換えて、(レベルもこめて) block bundle の構造を保っているようにする。以下出てくる f と f' はこれを満たしているものとする。

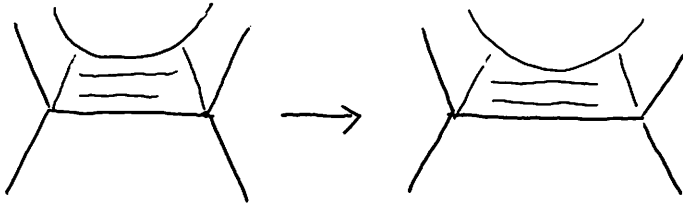


図 7

$\partial U(G) = \bigcup_{i=1}^p \alpha_i$ はラベル付けられていると考えることができる。これは f ではなく $L(\Delta)$ によって決まる。ここで次を定義する。

定義 4 次の条件が満たされるとき α_i は性質 (*) を持つという。 $L(\Delta) \equiv L(\Delta')$ を満たす任意の Δ' に対して $\tau(\alpha_i) = \tau'(\alpha_i)$ が成立する。

また G の subgraph H に対し $\partial U(H)$ のすべての component が性質 (*) を持つとき、 H は性質 (*) を持つという。

補題 2 subgraph H が性質 (*) を持ち 3C type のラベルを持たなければ、 H のまわりで identification は unique, すなわち $f|_{U(H)} = f'|_{U(H)}$ が成立する。

証明 ℓ を $\partial U(H)$ の任意の component とする。このとき ℓ と交わる $U(H)$ の任意の block b に対し $\tau(b-H) = \tau'(b-H)$ を示せばよい。これが成立していないとする。 b と交わる H の edge のラベルを A とする。 $\tau(b-H) = b-H$ ($\tau'(b-H) = b-H$) ということはありえない (local homeo でなくなる)。

(1) $\tau(\ell) = \ell$ のとき。このときは ℓ はラベル A (A^{-1} も含めて) を 3つは持つ。図 8 において $\tau(b-H) = b-H$ とすると $b''-H$ の行き先が存在しない。

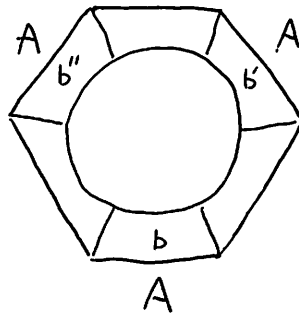


図 8

(2) $\tau(\ell) \neq \ell$ のとき。このとき ℓ は異なるラベル A を 2つは持つ。ラベルは全体で 3つしかないので図 9 の様になっている。

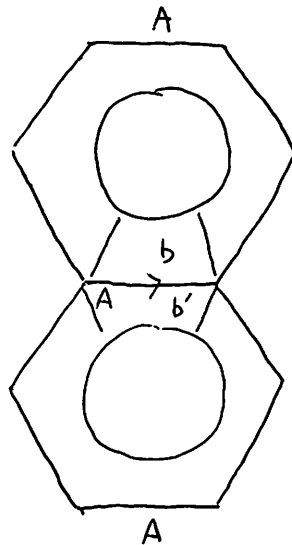


図 9

改めて真中の部分を b, b' とすると, $\tau(b-H) = b'-H$ や $\tau'(b-H) = b'-H$ とはなり得ないので $\tau(b-H) = \tau'(b-H)$ 。他のラベル A を持つ部分も同様。

補題 3 subgraph H が hoop を含まなければ H のまわりで identification は unique。

証明 H は hoop を持たないので 3C type のラベルは持たない。よって補題 2 より性質 (*) を持つことを示せば充分である。性質 (*) を持たないとすると, ある $l \subset \partial U(H)$ が存在して, $\tau(l) \neq \tau'(l)$ となっている。

(1) $\tau(l) = l$ のとき。このとき l は hoop ではないのでラベルは $A_1 A_2 \cdots A_n A_1 A_2 \cdots A_n$ となっている。ラベル A_1 は 3 つしかないので図 10 の様になっているがこれは補題 1 に矛盾する。

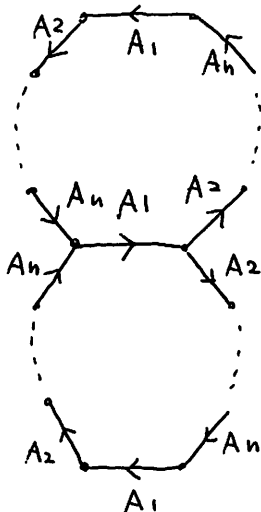


図 10

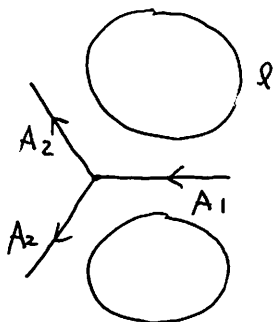


図 11

(2) $\tau(\ell) \neq \ell$ かつ $\tau'(\ell) \neq \ell$ のとき。このとき $\ell, \tau(\ell), \tau'(\ell), \tau(\tau'(\ell))$ の4つはそれぞれ異なっている。 ℓ のラベルの1つを A_1 とすると ℓ に含まれるラベル A_1 は1個だけである。よって図11のような部分が必要であるが、これは補題1に矛盾する。

補題4 F を $S - \overset{\circ}{U}(G)$ の1つの component とする。このとき

- (1) F が 2-disk ならば ∂F は性質 (*) を持つ。
- (2) ∂F のある component が性質 (*) を持てば他のすべての component も性質 (*) を持つ。

証明 ∂F の hoop でない component は補題3より性質 (*) を持つ。よってでてくるのは hoop としてよい。

(1) F が 2-disk のとき。このとき $\alpha = \partial F$ が性質 (*) を持たないとする。 α のラベルを A とすると、ラベル A をもつ hoop が S 上で4枚の 2-disk を張っている。 S は connected とは限らないので、このような配置は存在するが、orientation もこめて考えると、同一視できるのは3つなので、性質 (*) を持つ。

(2) α が性質 (*) を持つ ∂F の component で β が性質 (*) を持たない component とする。 $\tau(\alpha) = \tau'(\alpha)$ より $\tau(F) = \tau'(F)$ を得る。 $\tau(\beta) \neq \tau'(\beta)$ となるためには β と同じラベルを持つ ∂F の他の component β' が必要である。

a) $\tau(F) = F$ のとき。このとき $\beta, \tau(\beta), \tau'(\beta), \tau(\tau'(\beta))$ の4つは同じラベルを持つ相異なる hoop から来ていることになるので矛盾。

b) $\tau(F) \neq F$ のときは $\tau(\beta) = \tau'(\beta')$, $\tau(\beta') = \tau'(\beta)$ となっている。これら $\beta, \beta', \tau(\beta), \tau'(\beta)$ のうちの2つはある hoop の両側にならなければならない(図12参照)。しかし両側の部分では移り合うことができないので写像は unique になる。

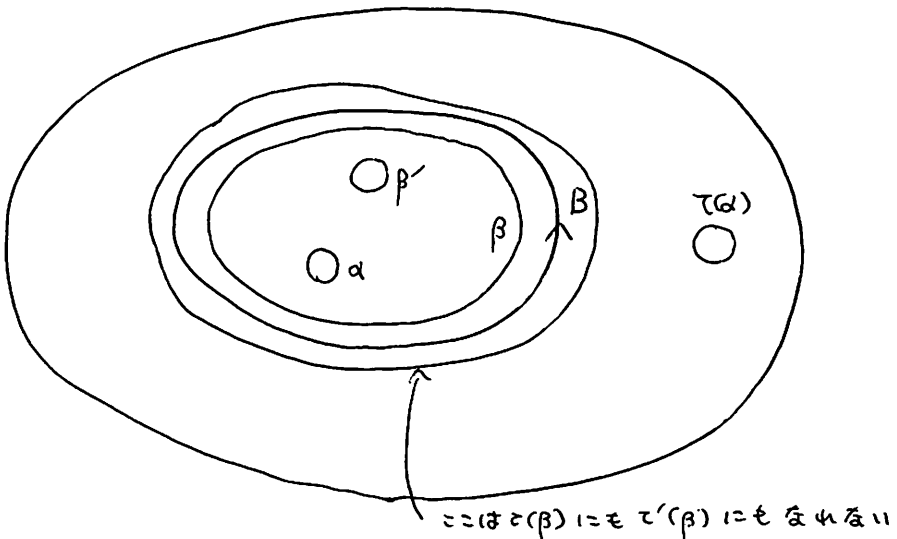


図 12

補題5 H をラベル A をもつ3つの hoop からなる subgraph, $\partial U(H) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_6$ とするとき性質 (*) を持たない α_i の個数は、存在したとすれば4個である。

証明 0個でないとき、 α_1 を $\tau(\alpha_1) \neq \tau'(\alpha_1)$ となるものとする。 $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$, $\tau'(\alpha_1) = \alpha_3$ としても一般性を失わない。 $\tau(\alpha_3) = \alpha_4$ とすると、 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ はすべて異なる。 $\tau'(\alpha_2) = \beta$ とおく。

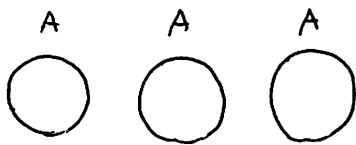
1) $\beta \neq \alpha_4$ のとき。 $\tau(\alpha_5) = \alpha_6$ となるので各 α_i の周りの様子は同じである。補題4より α_i は2-diskを張らなく、かつ α_i から $S-G$ 経由でつながるedgeはすべてhoopである。そのラベルを B とすると、あるloop c で G とはラベル A, B とのみその順序で3回ぶつかるものが存在するが、これは矛盾。

2) $\beta = \alpha_4$ のとき。 $\tau(\alpha_5) = \tau'(\alpha_5) = \alpha_6$ となる。別の τ'' が存在して、 $\tau''(\alpha_5) \neq \tau(\alpha)$ となるとき、1)の場合と同じ状況が発生するので、その様な τ'' は存在しない。このとき個数は4である。

補題6 ㉔ ㉕ の2つのtypeを除いて G は性質(*)を持つ。

証明 補題3より性質(*)を持たないのはhoopとしてよい。また3C typeのhoopは性質(*)を持つので3C typeでないとしてよい。性質(*)を持たないhoopのラベルを A とすると、その平面上の配置は次の2つ。

(I)



(II)

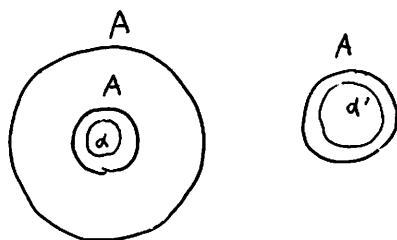


図 13

(I)はラベル A をもつhoopが張る2-diskで G のラベル A をもつedgeと交わらないものがそれぞれに存在する場合で、(II)は2つはあるが残りの1つはどちらの2-diskもラベル A をもつhoopと交わる場合である。

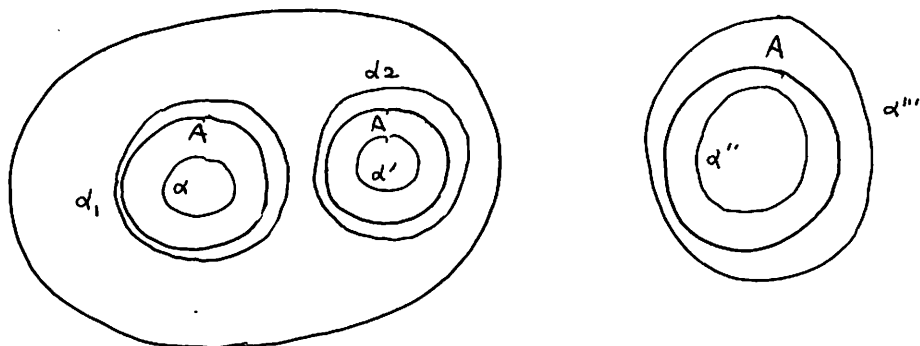


図 14

(I) さらに2つの場合に分ける。最初はラベル A をもつ2つの hoop が $S-G$ の1つの component F でつながっているとき。このとき残りの1つの hoop は F の境界にはない。なぜならその様な場合は identification が存在しないから。このとき図 14 の様になっている。

α が $S-G$ で 2-disk を張るときは α は補題 4 より性質 (*) を持つ。 F の存在により α_1 は τ および τ' で α_2 に移るので α 等は性質 (*) を持つので矛盾 (補題 5 より)。よってラベル A をもつ hoop に対し α の方向であるラベル B をもつ hoop が存在して、2つの hoop をその境界に含む $S-G$ の component が存在する。同様なことは $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ でも起こり、ラベル B をもつ hoop が4つ存在して矛盾。

3つの hoop が $S-G$ 上でつながって場合は、第1の場合の最後の議論と同様にあるラベル B をもつ hoop が4つ存在して矛盾。

(II) α, α' はラベル A をもつ edge と交わらない 2-disk を張るとする。 α, α' が性質 (*) を持つかどうかで場合分けをする。

(1) 共に性質 (*) を持たないとき。 α の横にはラベル B をもつ hoop が存在する。このときは図 15 の様になっている。 α の行き先は α' または α_2 であるが、 α を α' に写す involution は α_1 を α_2 に写すので矛盾。

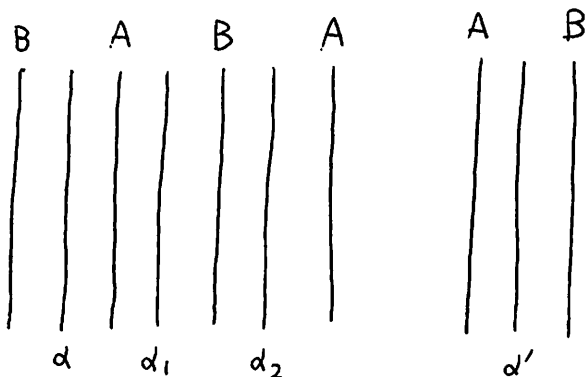


図 15

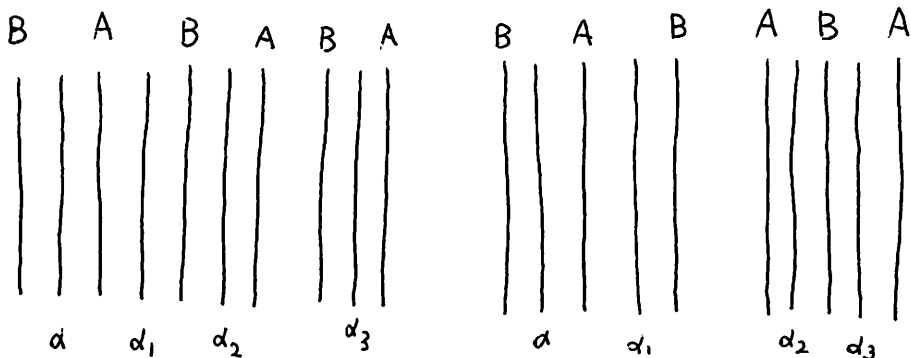


図 16

(2) α のみ性質(*)を持たないとき。 α の横にラベル B をもつ hoop が存在する。このときは図 16 のようになる。左は矛盾が生じる。右の場合ラベル A, B をもつ $S - \mathring{U}(G)$ の component が他の hoop を含むときラベルは 4 つ必要なので、ラベル A, B を持った edge が張る annulus A のなかに他の hoop はない。 A が頂点付きの subgraph を含むと補題 4 より性質(*)を持って矛盾。よって他の境界はない。これは ㉔ のタイプである。

(3) α, α' ともに性質(*)を持つときはさらに 3 つに分ける。ラベル A をもつ 3 つの edge が G で分けられているとき。

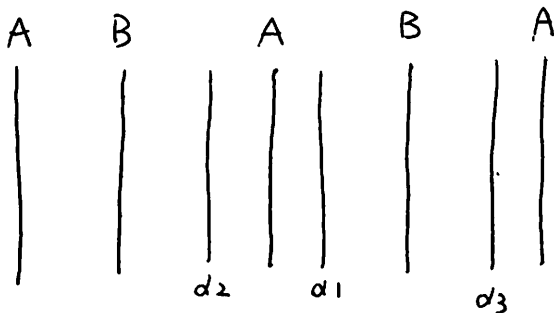


図 17

図 17 において $\tau(\alpha_1) = \alpha_2, \tau(\alpha_1) = \alpha_3$ はありえないので unique になり矛盾。

3 つの edge のうち 2 つがつながっていて、1 つが分けられているとき。つながっている部分は性質(*)をもつので全体が性質(*)を持つ。

3 つともつながっていて分けられていないとき。ラベル A をもつ 2 つの hoop を含む領域 F は (2) と同様に他の component を持たない。よって F は annulus である。このとき $\tau(\alpha_1) = \alpha_2, \tau(\alpha_3) = \alpha_4$ となる τ と、 $\tau'(\alpha_1) = \alpha_3, \tau'(\alpha_2) = \alpha_4$ となる τ' が存在する可能性があるが (図 18 参照), 向きが逆の場合 τ は存在しない。よってこの場合 ㉕ になる。■

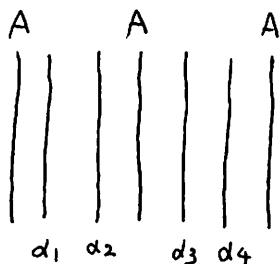


図 18

F を planar surface とし、 τ を F 上の free involution とする。 c を \mathring{F} 内の loop で $\tau(c) \cap c = \emptyset$ となるものとする。このとき τ' を次の様に定義する。 T_c を c に沿った Dehn twist とする。 $x \in F - (\mathring{U}(c) \cup \tau(\mathring{U}(c)))$ に対しては $\tau'(x) = \tau(x)$, $x \in \tau(U(c))$ に対しては $\tau'(x) = T_c \tau(x)$, $x \in U(c)$ に対しては $\tau'(x) = \tau T_c^{-1}(x)$ とする。 τ' は F 上の free involution になるが、このとき τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるという事にしよう。

τ が orientation preserving のとき、 c を \mathring{F} 内の loop で $\tau(c) = c$ となるものとする。このとき c に沿った Dehn twist T_c で得られる homeomorphism τ' で free involution になるようなものが存在する。このと

きも τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるという事にしよう。

また境界を固定した F の isotopy $H_t (0 \leq t \leq 1)$ が各レベル t で $H_t \tau$ が free involution のとき equivariant isotopy といい, $\tau' = H_1 \tau$ となると τ' は τ から equivariant isotopy で得られるという。

τ' が τ から基本 Dehn 変形と equivariant isotopy の有限列で得られるとき, Dehn 変形で得られるという。次の補題は Dehn twist と Dehn surgery の基本的関係から容易に得られる。

補題 7 性質 (*) を満たす G に対し 2 つの ES $\Delta = (S, G, f)$ と $\Delta' = (S, G, f')$ を考える。 F を $S - \overset{\circ}{U}(G)$ の component の集まりで τ invariant なものとする。 τ' が τ から F に関する equivariant isotopy でえられるとき, $\Delta \cong \Delta'$ である。

また c を $c \cap G = \emptyset$ かつ $c \cap \tau(c) = \emptyset$ となる loop, d を c を少し B^3 の内部に押し込んだ knot とする。 τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるものとする。このとき $M(\Delta)$ を d に沿って ± 1 -surgery してできる多様体は $M(\Delta')$ である。特に d は trivial knot であるので $M(\Delta) \cong M(\Delta')$ である。

τ, τ' が orientation preserving のとき, c を $c \cap G = \emptyset$ かつ $\tau(c) = c$ となる loop, d を c を少し B^3 の内部に押し込んだ knot とする。 τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるものとする。このとき $M(\Delta)$ を d に沿って ± 1 -surgery してできる多様体は $M(\Delta')$ である。特に d は trivial knot であるので $M(\Delta) \cong M(\Delta')$ である。

F が annulus のときは次の補題のように境界を setwise に固定しないという仮定なしでもいえるが, 一般の場合には成功していない。これがいえると \textcircled{D} の type をはずす事ができる (のだが)。

補題 8 τ, τ' を annulus A 上の free involution で $\tau|_{\partial A} = \tau'|_{\partial A}$ を満たすとする。このとき τ は τ' から Dehn 変形で得られる。

証明 境界の違う component どうしを結ぶ arc m を equivariant surgery することにより 1 つの τ に関しては $m \cap \tau(m) = \emptyset$ とできる。 m を 2 つの境界を結ぶ arc で $\tau'(m) \cap m = \emptyset$ となるものとする。 $\tau(m)$ と m の intersection を見る。 annulus なので innermost なものがあれば equivariant isotopy によつてはずす事ができる。よつて図 19 のようになっている。境界と平行な invariant な loop にそつて何回か Dehn twist をすることにより (orientation reversing のとき c は $c \cap \tau(c) = \emptyset$, perserving のときは $c = \tau(c)$ と考える), τ は τ' になる。

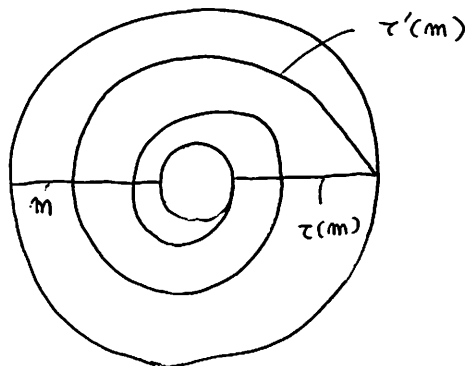


図 19

次の補題を証明する前に 3 つのタイプの Dehn twist を紹介する。

(I) 最初は図 20 の様な部分が存在したとする。ただし $\tau(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta) = \emptyset$ を満たしているものとする。c に沿う Dehn twist を T_c で表す。 T_c を行った結果は図 21 の様になっている。ここで α と変形前、変形後の arc 達との intersection の変化を見る。 β は 2 つ減り、 B_1 は変化なし、 B_2 は 1 つ減り、 B_0 は 1 つ増えている。全体として intersection の個数が減っていることに注意。

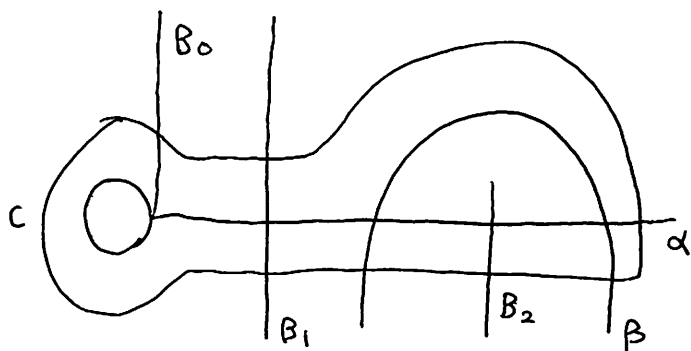


図 20

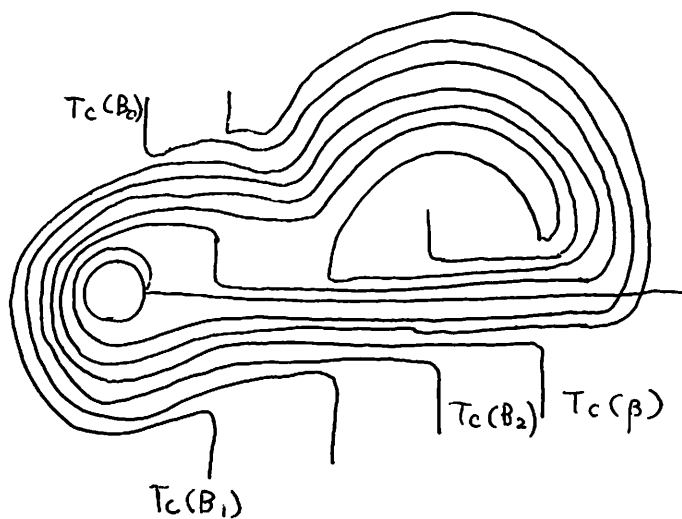


図 21

(II) 図 22 の様な部分が存在したとする。ただし $\tau(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta) = \emptyset$ を満たしているものとする。 c に沿う Dehn twist を T_c で表す。 T_c を行った結果は図 21 の様になっている。ここで β, B_2 ともに α との intersection は変形前より減っていることに注意。

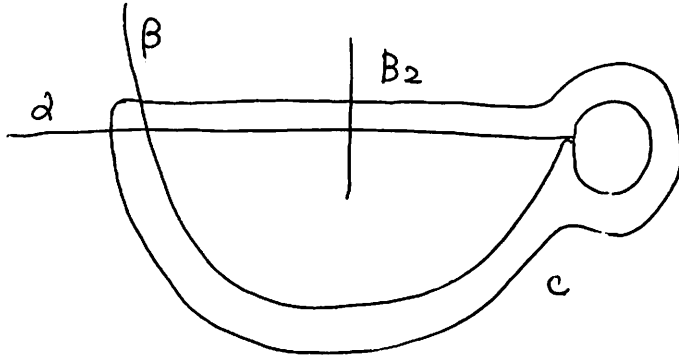


図 22

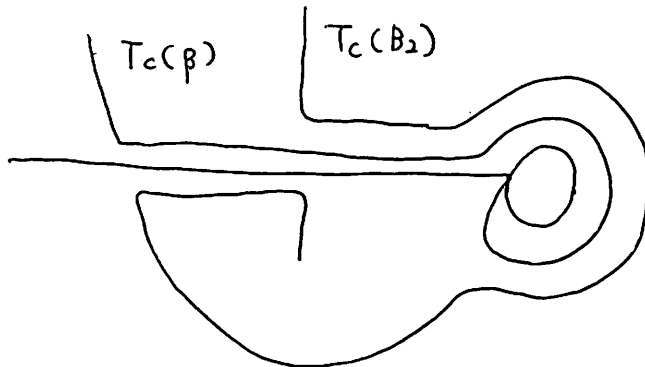


図 23

(III) 図 24 の様な部分が存在したとする。ただし $\tau(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta) = \emptyset$ を満たしているものとする。 c に沿う Dehn twist を T_c で表す。 T_c を行った結果は図 25 の様になっている。 α との intersection は変形前より減っていることに注意。

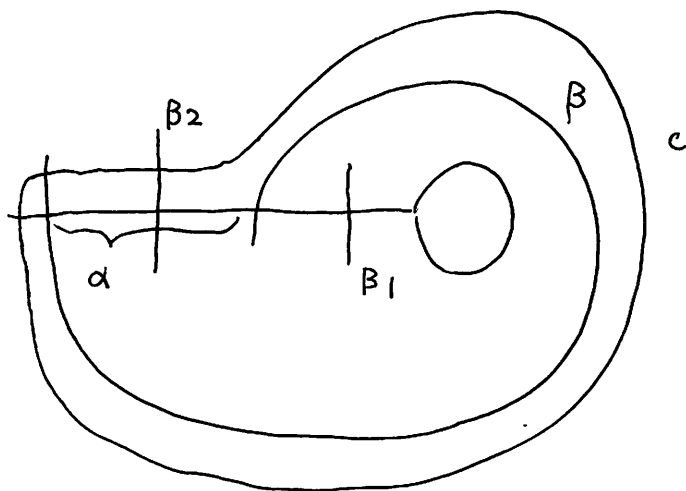


図 24

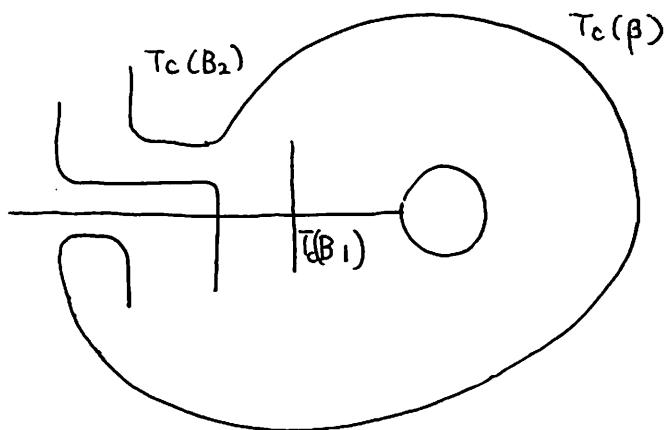


図 25

補題 9 τ, τ' を planar surface F 上の free involution で $\tau|_{\partial F} = \tau'|_{\partial F}$ を満たすとする。ただし, setwise に固定される境界の component は存在しないとする。このとき τ' から Dehn 変形で得られる τ_0 と, 別

の境界の component どれしをを結ぶ F の proper arc m が存在して, $\tau(m) = \tau_0(m), \tau(m) \cap m = \emptyset$ を満たす。

証明 次の2つの場合に証明すればよい。(A) $F = F_1 \cup F_2$ で F_i が connected で $(= 1, 2)$, $\tau(F_1) = F_2$ の場合。(B) F は connected の場合。(A) の場合 任意の loop または arc c に対し $\tau(c) \cap c = \emptyset$ という条件は自動的に満たされる。

(A) m を F_1 の proper arc である境界と他の境界を結ぶものとする。 $l_0 = \tau(m), l = \tau'(m)$ とおく。 l と l_0 が isotopic のときは equivariant isotopy で $l = l_0$ とできるので補題は成立。よって isotopic でないとする。

(1) $\#(l \cap l_0) = 2$ のとき。

図 26 の様になっているので, それぞれの場合に c に沿って基本 Dehn 変形を行う。

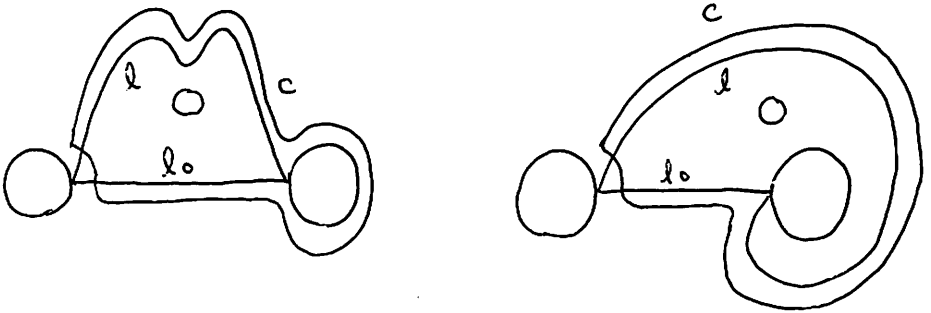


図 26

左の場合は更に境界に平行な loop に沿って基本 Dehn 変形を行ったものを τ_0 とすると, $\tau(m)$ と $\tau_0(m)$ は isotopic になっているので, $\tau(m) = \tau_0(m)$ とできる。

(2) $\#(l \cap l_0) > 2$ のとき。 m に向きをつけておく。 τ, τ' で写した l_0, l にもそれから induce される向きを入れておく。 $\partial l_0 (= \partial l)$ と交わっていない境界に disk D_1, \dots, D_n を張り付け, annulus $A = F \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ を考える。 $\alpha \subset l_0, \beta \subset l$ が $\alpha \cap l = \partial \alpha = \beta = \beta \cap l_0$ をみたし, A で disk を張るとき innermost という。 l と l_0 の intersection で向きの違うものが存在するとき, innermost な α と β が存在する。

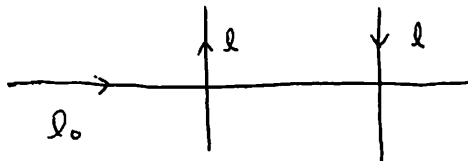


図 27

その様な α, β に対し $\partial\alpha$ の一方の点から 境界上の点を結んだ ℓ_0 上の arc を γ とする。

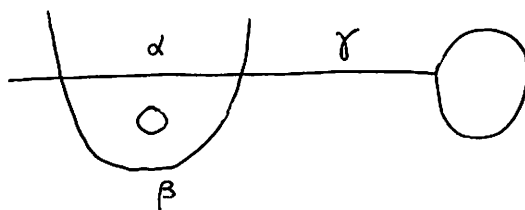


図 28

このとき, $\tau(\alpha \cup \beta \cup \gamma) \cap (\alpha \cap \beta \cap \gamma) = \emptyset$ なので, type (I) の変形を実行すれば intersection は減らせる。よって ℓ と ℓ_0 の intersection の向きは同じとすると, 図 29 の様になっているので, 境界に平行な loop で何回か基本 Dehn 変形を行えばよい。

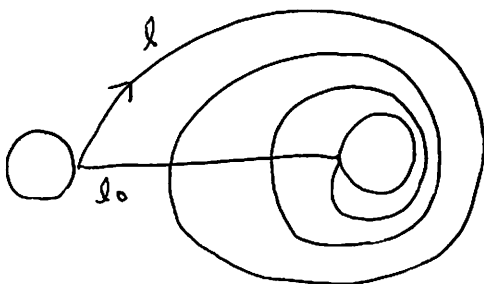


図 29

(B) 境界の違う component どうしを結ぶ arc m を equivariant surgery することにより 1 つの τ に関しては $m \cap \tau(m) = \emptyset$ とできる。このことにより ∂m を含む F 境界の component と $\tau(\partial m)$ を含む境界の component には共通部分がないように m を選ぶ事ができる。 $\ell_0 = \tau(m), \ell = \tau'(m), m_0 = \tau'(\ell_0)$ とおく。

F の全ての境界に 2-disk D_1, D_2, \dots, D_n を張り付けて 2-球面 $S = F \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ を考える。 τ, τ' は自然に S 上の free involution に拡張できる。 m に向きを考える。ただし ∂D_1 から ∂D_2 に向かっていくように選ぶ。また m から決まる ℓ の向きは ∂D_3 から ∂D_4 へ向かうものとする。

(1) $m \cap \ell = \emptyset, m_0 \cap \ell_0 = \emptyset$ かつ $\#(\ell \cap \ell_0) = 2$ のとき。 $\ell \cup \ell_0$ が S で張る disk を d とする。 d は図 30 のように d が D_4 を含む場合と, D_3, D_4 ともに含まない場合があるがどちらも τ' に対し c に沿った Dehn 変形を行い, 左の場合は更に ∂D_4 に平行な loop に関し Dehn 変形を行ったものを τ_0 とおくと, $\tau(m) = \tau_0(m)$ とできる。

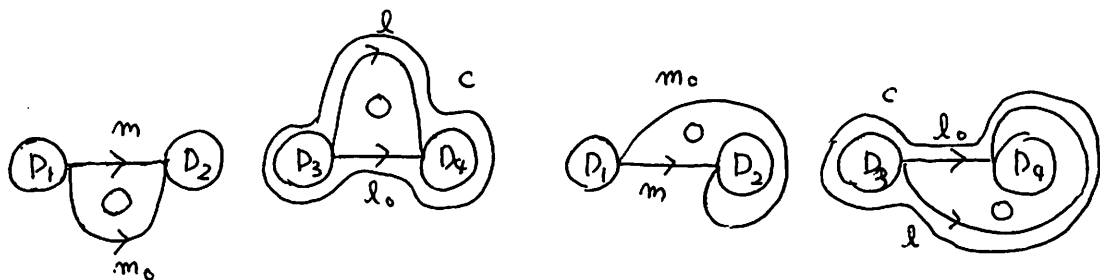


図 30

(2) m, l, m_0, l_0 の intersection が (1) の場合以上に存在するとき、Dehn 変形で減らせる事を示す。最初に m と他のものの intersection があるとき減らせる事を示す。図 31 のような向きの intersection があるときと (場合 (I) とする)、ないとき (場合 (II) とする) に分ける。



図 31

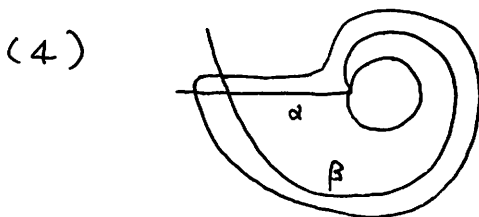
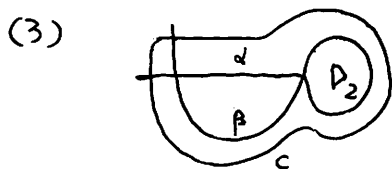
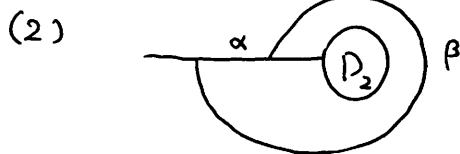
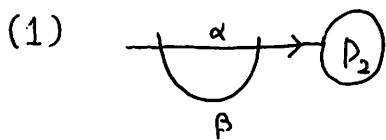


図 32

(I) α, β が次の性質を満たすとき innermost であるという。 $\alpha \subset m, \beta \subset l$ かつ $\alpha \cap l = \partial\alpha = \partial\beta = \beta \cap m$ 。このとき $\alpha \cup \beta$ は S で 2-disk を張る。他の m と m_0 等にも同様に定義する。この場合 m と l または m と m_0 に関して innermost なものが存在する。このなかで m の向きに関して一番 D_2 よりのものをとる。このとき次の 4 つの type が考えられるが, (3),(4) はそれぞれ図 32 の c に関して type (II) の Dehn 変形を行う。その結果 r' から得られる τ_0 は intersection が r' より少なくなっている。

次に図 32 の (2) の場合を考える。 $r'(\alpha) \neq \beta$ のときは type (III) の変形によりはずす事ができる。よって $r'(\alpha) = \beta$ とする。 $\alpha \cup \beta$ が張る disk を d とする。このとき $r'(\alpha \cup \beta) = \alpha \cup \beta$ なので r' が free ということから $r'(d) \cup d = S$ となる。 $D_3 \subset d$ なので $D_1 \not\subset d$ 。また $D_2 \subset d$ 。 ∂D_1 と ∂D_2 を結ぶ arc m_0 は $\alpha \cup \beta$ と交われないので矛盾。

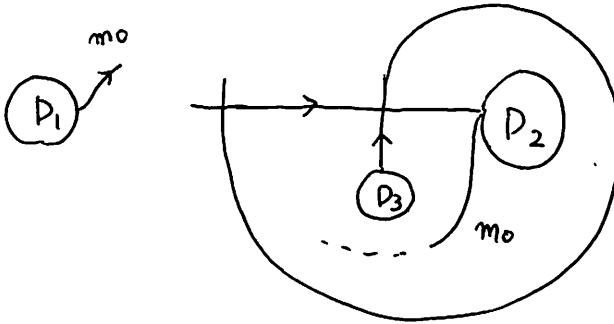


図 33

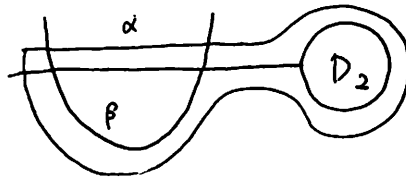


図 34

残った (1) の場合について考える。 m の α より ∂D_2 方向の部分をも γ とする。 $r'(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$ のときは図 34 の c にそって type (I) の Dehn 変形を行う事により intersection を減らせる。

よって $r'(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$ とする。このとき γ 上の点 p, q で $\tau(p) = q$ となるものが存在する。 p, q を端点とする γ の部分区間 δ の内部に $r'(p) = q'$ となる点が存在するとき、区間をとり直す事により、 δ の内部には $r'(p) = q'$ となる点存在しないとしてよい。このとき $\delta \cup r'(\delta)$ は S^1 と同相なので、2-disk d を張る。

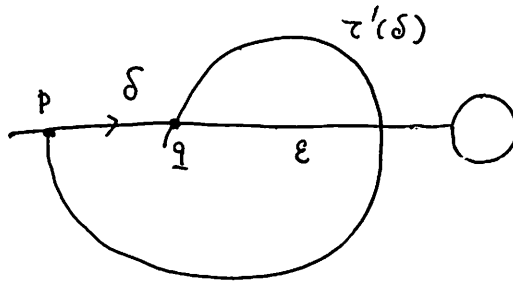


図 35

m の q より ∂D_2 よりの部分を ϵ とする。 $\epsilon \cap \tau'(\delta) \neq \emptyset$ のときは innermost な部分が発生するので $\epsilon \cap \tau'(\delta) = \emptyset$ である。 l の q より ∂D_1 よりの部分を ϵ' とする。 $\epsilon' \cap m \neq \emptyset$ のときも同様なので $\epsilon \cap m = \emptyset$ になっている。このとき図 36 の様になっている。 m_0 は δ とぶつかるので innermost が存在して矛盾。よって case (I) の場合の証明は終わった。

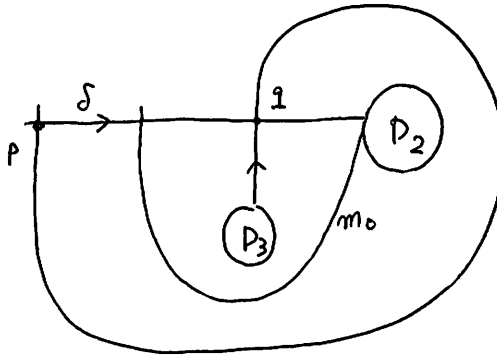


図 36

次に (II) の場合を考える。 $\beta \subset l$ で $\beta \cap m = \partial\beta$ となる β に対し、 $\alpha \subset m$ を $\partial\alpha = \partial\beta$ となるものとする。 $\alpha \cap l \neq \partial\alpha$ のときは innermost が生じる (図 37 参照)。よって $\alpha \cap l = \partial\alpha$ となっている。このとき図 38 の様になっているので、 m_0 に関しては (I) の場合が起きている。そこで減らせばよい。

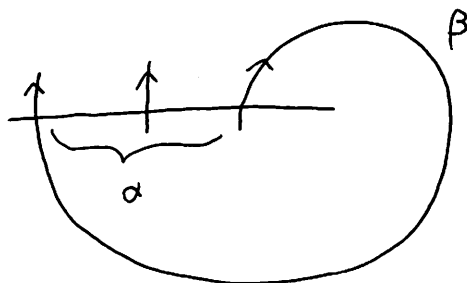


図 37

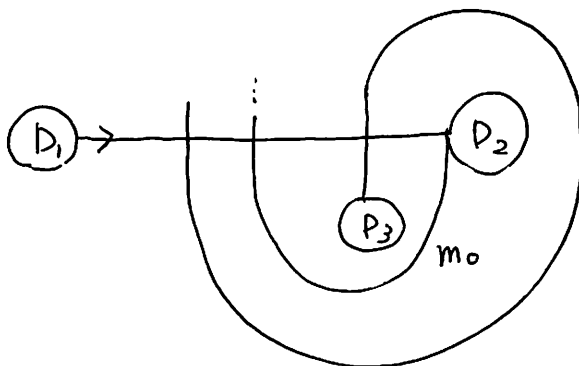


図 38

補題 10 τ, τ' を planar surface F 上の free involution で $\tau|_{\partial F} = \tau'|_{\partial F}$ を満たすとする。ただし, setwise に固定される境界の component は存在しないとする。このとき τ は τ' から Dehn 変形で得られる。

証明 F が connected の場合または $F = F_1 \cup F_2$ (F_i connected) で $\tau(F_1) = F_2$ の場合の 2 つのとき示せばよい。前者を S type 後者を O type と呼ぶ。 $O < S$ という順序関係を入れ, $(\#\partial F, \epsilon)$ についての辞書式順序での induction により示す。ただし, $\epsilon = O$ or S である。

最小は $(2, O)$ のとき。このとき F_i は 2-disk なので, F を止めた isotopy h_t で $\tau|_{F_1} = \tau'|_{F_1}$ とできる。 $H_t : F \rightarrow F$ を $H_t(x) = h_t(x)$ ($x \in F_1$), $H_t(x) = h_t^{-1}(x)$ ($x \in F_2$) とおくと, H_t が equivariant isotopy を与える。

$(\#\partial F, \epsilon) = (2n, O)$ のとき, 補題 9 より τ' から Dehn 変形でえられる τ_0 と arc m が存在して, $\tau(m) = \tau_0(m), \tau(m) \cap m = \emptyset$ を満たす。このとき境界上での仮定より, $V = U(m) \cup \tau(U(m))$ 上で $\tau(V) = \tau_0(V) = V$, 更に $\tau|_V = \tau_0|_V$ としてよい。 $\tilde{F} = F - (V), \tilde{\tau} = \tau|_{\tilde{F}}, \tilde{\tau}_0 = \tau_0|_{\tilde{F}}$ とおく。 $\epsilon = O$ のとき \tilde{F} は $(2(n-1), O)$ に, $\epsilon = S$ のとき $F - (\tau(m) \cup m)$ の連結・非連結によってそれぞれ $(2(n-1), S), (2n, O)$ となるので, 帰納法の仮定が使える。

補題 11 type ① のラベルを含まなければ, $f|_{U(G)} = f'|_{U(G)}$ なら $M(\Delta) \cong M(\Delta')$

証明 F を $S-\mathring{U}(G)$ の component とする。 $\tau(F) \neq F$ のときは補題 10 より $\tau|_F$ は $\tau'|_F$ から Dehn 変形で得られる。 $\tau(F) = F$ のとき、 τ_F が orientation reversing なら setwise に固定される境界の component は存在しないので、同様に Dehn 変形で得られる。

orientation preserving のとき固定される component は 2 つで、それらのラベルは $A_1 A_2 \cdots A_n A_1 A_2 \cdots A_n$ の形をしている。 F が annulus のときは補題 8 より Dehn 変形で得られる。それ以外の場合は type ① になるので仮定に矛盾。以上より τ は τ' から Dehn 変形で得られる。補題 7 より多様体は同相である。 ■

ほとんど明らかなが最後に一応定理の証明をしておこう。補題 6 より ④, ⑤ を除くと性質 (*) を持つ。補題 2 より ⑥ を除くと edge のまわりの identification は unique。 identification は unique とは限らないが、よって補題 11 より、⑦ を除いて多様体は unique に決まる。