箱根セミナ記録 9 3 (1993)35-53.

平面上の或る等長変換群

河野正晴 （神戸大学 理学部）
山下正勝 （東洋大学 工学部）

序にかえて

閉曲面Fに埋め込まれた(有限) 3-regular graph G について考える．いまF－G の各連結成分 α が open 2-cell である場合に限定してみる．各αから内点 v_α を一点ずつ適当に選び，$F^*=F-\{v_\alpha\}$ とする．このF^* の普遍被服空間をUとし，Gのリフトを$\tilde{G}$とする．$\tilde{G}$を不変にするU上の変換について調べたものがこの小論の内容である．この変換を初めは「平面上の自己同型写像」と呼んでみたが，著者の一人（河野）が，「双曲平面上の等長変換」にほかならないことを確認した．この小論では話題を組合せ的に議論するため，あえて双曲構造を用いなかった．

DS-diagramとそれらの間の変形を代数的に表示する方法について，あれこれと思案をめぐらせているうちに，普遍被覆空間モドキのものにつきあたった．（あとで考えるとアタリマエのことであった．）しかし，そのようなＤＳ理論への応用については，今回は一切触れない．したがって，この小論の内容は大学２，３年の演習問題のレポートみたいなことになってしまった．ただ，今後の話の展開のなかで，このような事実を常識として使いたいので，原稿にまとめてみたものである．

ここでの知識をＤＳ理論以外にも使ってもらえれば幸いである．閉曲面上の 3-regular graphの理論に使えそうな気がするのだが ……．たとえば根上生也氏や小室秀雄氏のＨ変形理論に使えないだろうか？有向グラフの場合には「曲がり角」を辺の番地にすることができるし，無向グラフの辺の場合には鏡映を番地に用いることができるからである．頂点についても或る同値類を番地に採用できる（河野）．

じつは，ＤＳ理論においてもこの「番地」という考え方を池田－山下－横山が追求していたのであるが，まだ未完成である．津久井氏も辺彩色グラフに対する代数表現を研究中で，そこでは別の群表示が用いられている．いずれ近いうちに公表されるであろうが，いまから楽しみである．

§1．平面の胞状分割と等長変換

平面内の標準的な無限 3-regular tree Y をつぎのように定め，議論の出発点としたい．

1.1 <u>Definition.</u> 点の集合V_n，線分の集合E_nを帰納的に定める．(但しiは虚数単位を表わす)：

$V_0 = \{ 0 \}$.

$V_1 = \{ e^{\theta i} \mid \theta = 2k\pi/3,\ k=0,1,2 \ (\mathrm{mod}.3) \}$,

$E_1 = \{ 0 * y$ の内部 $\mid y \in V_1 \}$.

以下帰納的に

$V_n = \{ n e^{\theta i} \mid (n-1) e^{\eta i} \in V_{n-1},\ \theta = \eta \pm (2\pi/3 \cdot 2^n) \}$,

$E_n = \{ x * y$ の内部 $\mid x=(n-1) e^{\eta i} \in V_{n-1},\ y = n e^{\theta i},\ \theta = \eta \pm (2\pi/3 \cdot 2^n) \}$.

と定める．また

$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots\cdots \cup V_n \cup \cdots\cdots$,

$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots\cdots \cup E_n \cup \cdots\cdots$,

とあらわす．このときの$Y = V \cup E$を平面内の標準的な無限 3-regular tree として採用する．Yの underlying space $\cup \{ \alpha \in Y \}$ も同じYで表わす．

平面における$Y = \cup \{ \alpha \in Y \}$ の補空間の連結成分の集合をFと表わす．

$D = V \cup E \cup F$を平面の<u>標準的な胞状分割</u> cell-like division ということにする．

$\alpha \in D$の平面における閉包を $|\alpha|$ と表わすことにする．この記法は伝統的な記法と異なるので紛らわしいが，ワープロの都合による．$|\alpha| \subset |\beta|$ であるとき，$\alpha < \beta$ と表わす．$D = V \cup E \cup F$ は わずかに胞複体(cell complex)にはなっていない．しかしながら，V，E，F の元をそれぞれ<u>頂点</u>(vertex)，<u>辺</u>(edge)，<u>面</u>(face)，と 呼ぶ．

$V_0(\infty) = \{ -e^{\theta i} \mid e^{\theta i} \in V_1 \}$,

$V_n(\infty) = \{ 2 n e^{\theta i} \mid n e^{\theta i} \in V_n,\ n \neq 0 \}$,

$V(\infty) = V_0(\infty) \cup V_1(\infty) \cup V_2(\infty) \cup \cdots\cdots \cup V_n(\infty) \cup \cdots\cdots$,

と定める．また，原点0を端点とし，$v_\infty \in V(\infty)$ を通る半直線$\ell(0, v_\infty)$ から$0, v_\infty$を結ぶ半開線分$[0, v_\infty]$を除いた集合

$$e(v_\infty) = \ell(0, v_\infty) - [0, v_\infty]$$

の全体を $E(\infty) = \{ e(v_\infty) \}$ とあらわす．

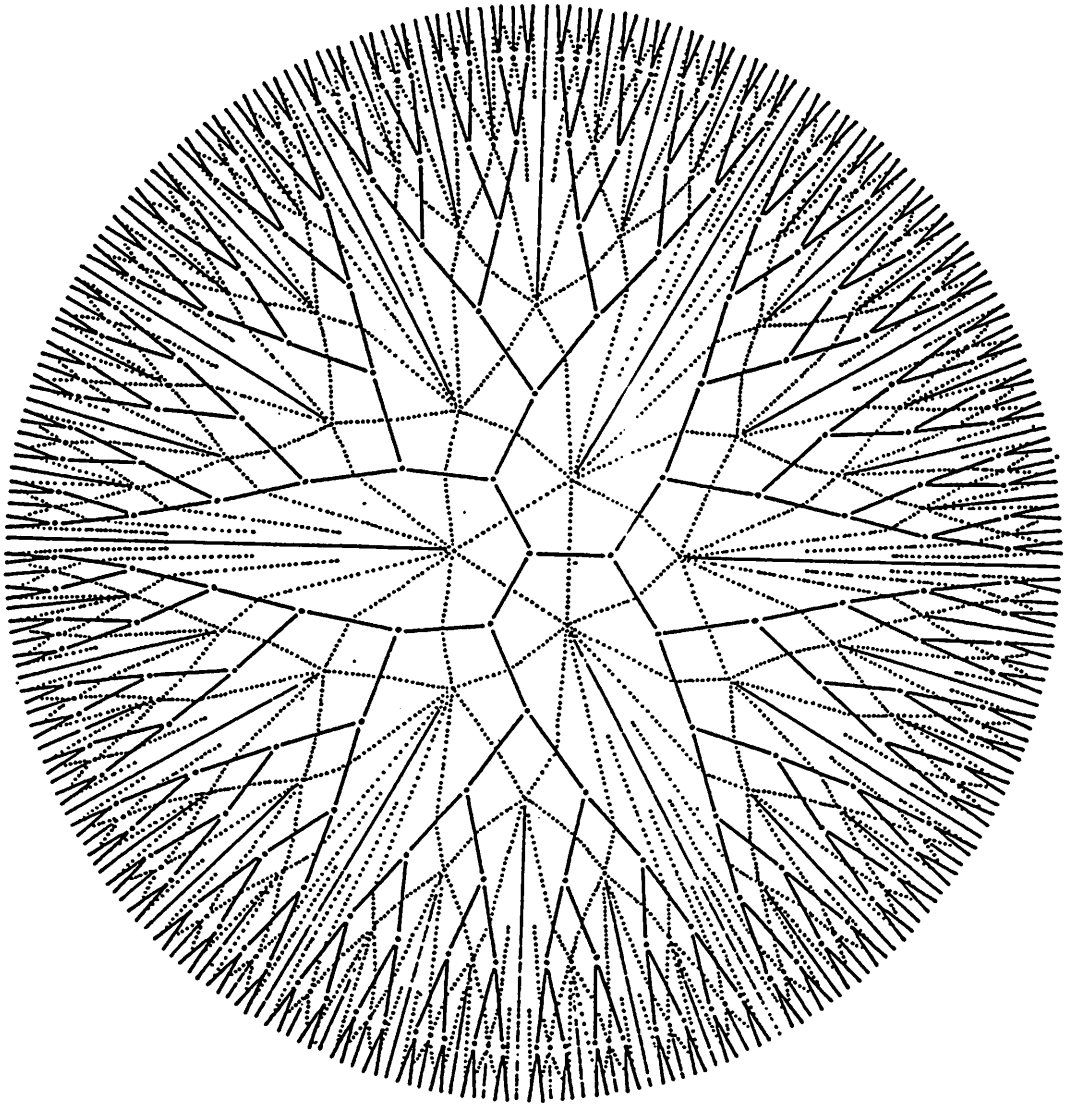


図 1-1

1.2 <u>Definition.</u> 平面上の（上への）ＰＬ同相写像 f が

$$\alpha \in D \Rightarrow f(\alpha) \in D$$
$$v \in V(\infty) \Rightarrow f(v) \in V(\infty)$$
$$\gamma \in E(\infty) \Rightarrow f(\gamma) \in E(\infty)$$

をみたすならば，fをＤ上の<u>胞状同型写像</u>（cell-like isomorphism）という．

胞状同型写像としては枠Ｙの行き先さえしっかりしていればあとは構わない．「内乱に干渉はしない」ということだが，そのためにつぎの命題ぐらいは必要であろう．

1.3 <u>Proposition.</u> f, g をD上の胞状同型写像とする．そのとき平面上の ambient isotopy $H_t : R^2 \to R^2$, $0 \leqq t \leqq 1$, で

(i) $H_0 = f$, $H_1 = g$,

(ii) $\alpha \in D \Rightarrow H_t(\alpha) \in D$ for each t.

(iii) $\gamma \in E(\infty) \Rightarrow H_t(\gamma) \in E(\infty)$ for each t.

(iv) $\gamma \in V(\infty) \Rightarrow H_t(\gamma) \in V(\infty)$ for each t.

となるものが存在するための必要十分条件は

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{for each } \alpha \in D$$

である．

上の条件（ii）は

(ii') $\alpha \in D \Rightarrow H_t(\alpha) = H_s(\alpha)$ for each s, t.

と置き変えてもよい．

1.4 <u>Definition.</u> f, g をD上の胞状同型写像とする．そのとき

各$\alpha \in D$ に対して $f(\alpha) = g(\alpha)$ である，

ならばfとgは<u>アイソトピック</u>（isotopic）であるといい，$f \cong g$ と表わす．

胞体同型写像の組合せ構造を知るにはそのアイソトピックなクラスについて調べれば十分である．そこでつぎの定義を置く．

1.5 <u>Definition.</u> 胞状分割$D = V \cup E \cup F$上の写像 $\Phi : D \to D$ が

(a) Φは bijection,

(b) $\Phi(V) = V$, $\Phi(E) = E$, $\Phi(F) = F$,

(c) $\tau < \sigma \Rightarrow \Phi(\tau) < \Phi(\sigma)$,

を満たすとき，Φを D上の<u>等長変換</u>（isometry）と呼ぶ．

胞状同型写像fに対応する等長変換 Φ_f は自然にただひとつ定まる．また，$f \cong g$ ならば $\Phi_f = \Phi_g$ である．

いわゆる初等幾何において

「三角形を合同な三角形に移す等長変換は一意に決まる」

という話があった．この類比として，

「Dの隣り合った２辺を，望みの隣り合った２辺に移す等長変換は必ず存在する．

さらに，そのような等長変換はたったひとつである．すなわち，隣り合った２辺の行き先が等長変換の全貌を決めてしまう …」
ことを示しておきたい．

1.6 Definition. A，B ∈E，A≠B，A∩B≠φ であるとき，ABをYの曲がり角（corner)である，という．

1.7 Theorem. AB，A'B' をYの曲がり角とする．そのとき，AをA'にBをB'に移すD上の等長変換 Φ が一意に存在する．

この定理を示すことが本節の目的であるが，その準備として頂点と頂点を結ぶ道の定義を与えておく．

1.8 Definition. 頂点 x，y∈V に対して，
Dの辺 $A_i \in E$，$i=1,2,\cdots,m$,の有限列 $\Pi = A_1A_2\cdots A_m$で，
(a) $i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$,
(b) $x < A_1$，$y < A_m$,
(c) $A_i \cap A_{i+1} \in V$,
(d) $A_i \cap A_{i+1} \neq x, y$,
となるものを xとyを結ぶ道（ path）と呼ぶ．

任意の頂点 x，y(≠x)∈V に対してxとyを結ぶ path は一意に存在する．この path を今後 $x\Pi y$ とあらわす．$x\Pi y = A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m$ ならば $y\Pi x = A_mA_{m-1}\cdots A_2A_1$ である．xとxを結ぶ path $x\Pi x$ とは空集合から成る列φのこととしてもよかろう．
さて２頂点のあいだの距離を定めておこう．このdがいわゆる metric の条件を満たしていることを確認するのはたやすい．

1.9 Definition. 2頂点 x，y∈V の間の距離d(x，y) を，
(a) d(x，x)=0,
(b) $d(x, y)=m \Leftrightarrow x\Pi y = A_1A_2\cdots A_m$
と定める．

1.10 Definition. 頂点 v∈V に対して

$$F_v\langle m\rangle = \{\alpha\in F \mid m = \min_{x<\alpha} d(v, x)\}$$

と表わす.

1.11 <u>Proposition.</u>

(a) $\#F_v\langle 0\rangle = 3$,

$\#F_v\langle m\rangle = 3\cdot 2^{m-1}$ if $m\geqq 1$,

(b) $F_v\langle 0\rangle = \{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$

$\Rightarrow$

$|\alpha_0|\cap|\beta_0|,\ |\beta_0|\cap|\gamma_0|,\ \gamma_0|\cap|\alpha_0|\in E$,

$|\alpha_0|\cap|\beta_0|\cap|\gamma_0| = v$,

(c) $\alpha,\ \beta(\neq\alpha)\in F_v\langle m\rangle,\ m\geqq 1 \Rightarrow |\alpha|\cap|\beta| = \phi$,

(d) $\alpha,\ \beta(\neq\alpha)\in F,\ |\alpha|\cap|\beta|\neq\phi \Rightarrow |\alpha|\cap|\beta|\in E$,

1.12 <u>lemma.</u>

$x\in V,\ X, Y(\neq X)\in E,\ \alpha\in F_v\langle m\rangle$; $x < X, Y < \alpha$ とする. そのとき

$d(v, x) = m \geqq n+1 \Rightarrow |\alpha|\cap|\beta|\subset X\cup Y$ for any $\beta\in F_v\langle n\rangle$.

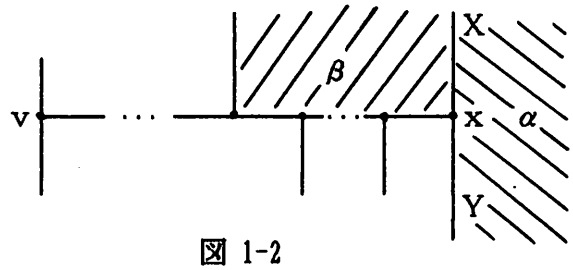


図 1-2

1.13 <u>定理1．7の証明</u>.

$Y\subset D$の曲がり角MNに対して2－胞体 $\alpha\in F$で, その境界が

$$\partial\alpha = \cdots\cdots MN\cdots\cdots$$

となるものが一意に存在する（このαのことをδ_{MN}とも書くことにする）ことに注意してD上の等長変換Φを具体的に構成してゆく. Φの一意性はその構成法からおのずとあきらかになろう.

［Φの構成法］

$v = A\cap B\in V,\ v' = A'\cap B'\in V$ とする.

$$F_m = F_v\langle 0\rangle\cup F_v\langle 1\rangle\cup F_v\langle 2\rangle\cup\ \cdots\cdots\ \cup F_v\langle m\rangle$$

とおくと

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots\cdots \subset F_m \subset \cdots\cdots, \quad \varinjlim F_m = F$$

である．したがって最初の仮定：

$$\Phi(A) = A', \ \Phi(B) = B'$$

を出発点として，mに関する数学的帰納法で等長変換ΦをD全体に拡張してゆく．

m＝0：

$v = A \cap B$, $v' = A' \cap B'$ にはそれぞれ第三の辺 C，C'∈E が結合されている．$\Phi(A) = A'$, $\Phi(B) = B'$ から，Φが等長変換であるならば

$$\Phi(v) = v', \ \Phi(\gamma_0) = \gamma'_0, \text{ 但し } \gamma_0 = \delta_{AB}, \ \gamma'_0 = \delta_{A'B'}$$

となる．したがって辺Cに対してもΦ（C）＝C'となる．よって$\alpha_0 = \delta_{BC}$, $\beta_0 = \delta_{CA}$に対しても，$\Phi(\alpha_0) = \alpha'_0 (= \delta_{B'C'})$，$\Phi(\beta_0) = \beta'_0 (= \delta_{C'A'})$ とならざるを得ない．この方法で $\Phi|F_0$ が一意に定まる．

$m = k \Rightarrow m = k+1$：$\Phi|F_k$ が定義されたとする．

任意の$\alpha \in F_v\langle k+1\rangle$ に対して， Lemma 1.12 から，αの境界$\partial\alpha$上の辺で

$M, N \in E$, $|M| \cap |N| \neq \phi$,

$M, N \in F_k$ ……(すなわち $\Phi(M)$, $\Phi(N)$はすでに定義されている)

$L \neq M, N \Rightarrow L \notin F_k$ …(すなわち $\Phi(L)$は未だ定義されていない)

となる組｛M，N｝が一意に存在する．したがって

$$\alpha = \delta_{MN} \text{ に } \alpha' = \delta_{M'N'} \text{ を対応させる，}$$

ようにΦを定めることができる．また等長変換の性質を保つにはこうするしかない．

Proposition 1.11 (c)により，

$$\alpha, \beta (\neq \alpha) \in F_v\langle k+1\rangle \Rightarrow |\alpha| \cap |\beta| = \phi$$

であるから，ΦはF$_v$⟨k+1⟩ の各２－胞体（およびそれらの faces）に対して定義できる．すなわち等長変換Φは $F_{k+1} = F_k \cup F_v\langle k+1\rangle$ 全体に対してただ一通りの方法で定義できる．∎

1.14 <u>Definition</u>. D上の等長変換の全体を Isom(D) と表わす．

Φ，Ψ∈ Isom(D) に対してその積ΨΦを写像の合成Φ∘Ψで定める．

すなわち，D内の各点 p∈Dに対して

$$\Psi\Phi(p) = \Phi \circ \Psi(p) = \Phi(\Psi(p))$$

である．

Isom(D) はこの積に関して群になる．

1.15 <u>Definition.</u> AB, A'B'をY上の曲がり角とする.

$$\Phi(A)=A',\ \Phi(B)=B'$$

によって定まる等長変換$\Phi : D \to D$ を

$$\Phi = (AB\rangle \to \langle A'B')$$

と表わすことがある. この記法を拡張して

$$\Phi_1 = (AB\rangle \to \langle A'B'),\ \Phi_2 = (A'B'\rangle \to \langle A''B'')$$

の積$\Phi_2\Phi_1$を

$$\Phi_2\Phi_1 = (AB\rangle \to \langle A'B'\rangle \to \langle A''B'') = (AB\rangle \to \langle A''B'')$$

などと書く,

$1 = (AB\rangle \to \langle AB)$ は恒等変換である. また$\Phi = (AB\rangle \to \langle A'B')$ の逆変換は$\Phi^{-1} = (A'B'\rangle \to \langle AB)$ と表わせる.

§2. 等長変換群の生成元

2.1 <u>Definition.</u> $v \in V$; A, B, C$\in E$; $v <$ A, B, C であるとき $(A ; B, C)_v$ をvの回りの<u>岐</u> (fork) という. Aをその<u>軸</u>という.
等長変換 $\Phi : D \to D$ と岐 $(A ; B, C)_v$ から定まる$\Phi(v)$ の回りの岐である $(\Phi(A) ; \Phi(B), \Phi(C))_{\Phi(v)}$ を$\Phi(A ; B, C)_v$ と表わす.

任意の頂点$v \in V$に対して, vの回りの岐はいつでも6個存在する. たとえば

$$J_k = 0 * \omega_k,\qquad \omega_k = e^{\theta i},\ \theta = (2/3)k\pi,\ k = 0, 1, 2,$$

とするとき, $0 \in V$の回りの岐は

$$(J_k ; J_{k+1}, J_{k-1})_0,\ k = 0, 1, 2 \ (\mathrm{mod.}\ 3)$$

$$(J_k ; J_{k-1}, J_{k+1})_0,\ k = 0, 1, 2 \ (\mathrm{mod.}\ 3)$$

である. $(J_0 ; J_1, J_2)_0$ を<u>原岐</u> (original fork) という.

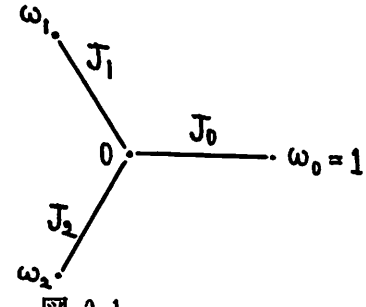


図 2-1

2.2 <u>Definition.</u> 岐 $(A;B,C)_v$ に対して
平面上の ambient isotopy $h_t: R^2 \to R^2$, $0 \leqq t \leqq 1$, で
(a) h_0=恒等変換,
(b) $h_1(v)=0$; $h_1(A)=J_0$, $h_1(B)=J_1$, $h_1(c)=J_2$,
となるものが存在するならば, 岐 $(A;B,C)_v$ は<u>正格</u> (positive) であるといい, そうでないとき<u>変格</u> (negative) であるという.

2.3 <u>Definition.</u> 等長変換$\Phi: D \to D$は, 岐$\Phi(J_0;J_1,J_2)_0$ が正格であるとき<u>正格変換</u> (orientation preserving isometry)といい, そうでないとき<u>変格変換</u> (orientation reversing isometry) という.
正格変換の全体を $\mathrm{Isom}_+(D)$, 変格変換の全体を$\mathrm{Isom}_-(D)$ と表わす.

2.4 <u>Proposition.</u>

$$\Phi, \Psi \in \mathrm{Isom}_+(D) \Rightarrow \Phi\Psi, \Psi\Phi \in \mathrm{Isom}_+(D)$$
$$\Phi, \Psi \in \mathrm{Isom}_-(D) \Rightarrow \Phi\Psi, \Psi\Phi \in \mathrm{Isom}_+(D)$$
$$\Phi \in \mathrm{Isom}_+(D), \Psi \in \mathrm{Isom}_-(D) \Rightarrow \Phi\Psi, \Psi\Phi \in \mathrm{Isom}_-(D)$$

2.5 <u>Definition.</u>
(a) $(A;B,C)_v$ を正格岐とする. そのとき

$$S_v = (BC\rangle \to \langle CA)$$

で定まる等長変換 $\sigma_v: D \to D$をvの回りの<u>$2\pi/3$回転</u> ($(2\pi/3)$-rotation) という.
(b) $A \in E$, $u, v \in V$; $u, v < A$とする. $(A;B,C)_u$, $(A;B',C')_v$ をそれぞれu, vの回りの岐とする. そのとき

$$H_A = (BC\rangle \to \langle B'C')$$

で定まる等長変換 $\tau_A: D \to D$をAの回りの<u>半回転</u> (half rotation) という.
(c) $(A;B,C)_v$ をAを軸とする岐とする. そのとき

$$R_A = (BC\rangle \to \langle CB)$$

で定まる等長変換 $\rho_A: D \to D$をAを軸とする<u>鏡映</u> (reflection) という.
σ_v, τ_A は正格変換, ρ_A は変格変換である.

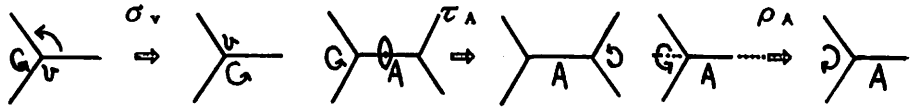


図 2-2

2.6 <u>Proposition.</u> $\alpha \in D$ に対して次が成り立つ：

(a) $\sigma_v(\alpha)=\alpha \iff \alpha=v$,

(b) $\tau_A(\alpha)=\alpha \iff \alpha=A$,

(c) $\rho_A(\alpha)=\alpha \iff \alpha<A$.

2.7 <u>Proposition.</u>

(a) $\sigma_v{}^3=1$, $\tau_A{}^2=1$, $\rho_A{}^2=1$,

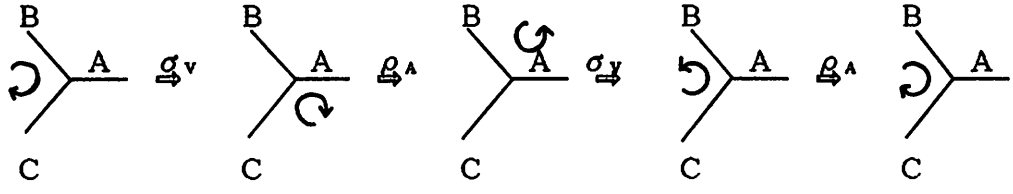
(b) $v<A \Rightarrow (\rho_A\sigma_v)^2=1$,

(c) $\alpha<A \iff (\rho_A\tau_A)^2=1$.

〔証明〕 (a)は明らかである.

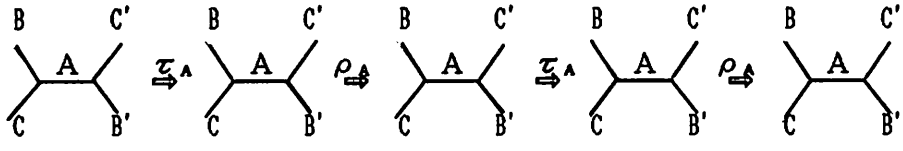
(b) $\rho\sigma\rho\sigma$型：

$$\begin{aligned}\rho_A\sigma_v\rho_A\sigma_v &= (BC\rangle \to \langle CA\rangle \to \langle BA\rangle \to \langle CB\rangle \to \langle BC)\\ &= (BC\rangle \to \langle BC)\\ &= 1\end{aligned}$$



(c) $\rho\tau\rho\tau$型：

$$\begin{aligned}\rho_A\tau_A\rho_A\tau_A &= (BC\rangle \to \langle B'C'\rangle \to \langle C'B'\rangle \to \langle CB\rangle \to \langle BC)\\ &= (BC\rangle \to \langle BC)\\ &= 1.\end{aligned}$$



∎

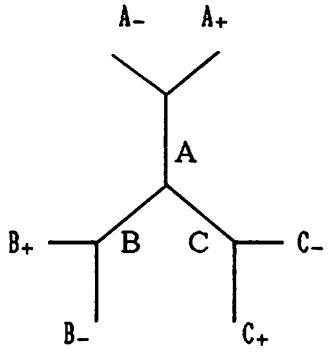
これから以降つぎの記号を用いることにしよう．

$J_k = 0 * \omega_k$,　$\omega_k = e^{\theta i}$,　$\theta = 2k\pi/3$,　$(k=0, 1, 2)$,

$I = J_0$, $J = J_1$, $K = J_2$,

$\sigma = \sigma_0$,　$\tau = \tau_1$,　$\rho = \rho_1$.

2.8 Definition. 正格岐 $(A; B, C)_v$ に対して A_δ, B_δ, $C_\delta \in E$, $(\delta = \pm)$ を次図のように定める：



2.9 <u>Theorem.</u>　$g = \langle JK\rangle \to \langle BC\rangle \in \mathrm{Isom}_+(D)$ に対して

(a)　$\langle JK\rangle \to \langle CA\rangle = g\cdot\sigma$, $\langle JK\rangle \to \langle AB\rangle = g\cdot\sigma^{-1}$.

(b)　$\langle JK\rangle \to \langle A_-A_+\rangle = g\cdot\tau$.

［証明］(a)　$\sigma = \langle JK\rangle \to \langle KI\rangle$, $\sigma^{-1} = \langle JK\rangle \to \langle IJ\rangle$ であり，一方で $g = \langle KI\rangle \to \langle CA\rangle = \langle IJ\rangle \to \langle AB\rangle$ であるから

$$g\sigma = \langle JK\rangle \to \langle KI\rangle \to \langle CA\rangle,$$

$$g\sigma^{-1} = \langle JK\rangle \to \langle IJ\rangle \to \langle AB\rangle.$$

(b)　$\tau = \langle JK\rangle \to \langle I_-I_+\rangle$ である．いま $g(1) = x$ とすると，$(A; A_-, A_+)_x$ は x の回りの正格岐で，$g(I_-) = A_-$, $g(I_+) = A_+$ であるから

$$g = \langle I_-I_+\rangle \to \langle A_-A_+\rangle.$$

したがって　$g\tau = \langle JK\rangle \to \langle I_-I_+\rangle \to \langle A_-A_+\rangle$. ∎

この節の目的はつぎの定理を示すことである．

2.10 <u>Theorem.</u>　(a) $\mathrm{Isom}(D)$ は $\{\sigma, \tau, \rho\}$ から生成される．

(b) $\mathrm{Isom}_+(D)$ の（単位元以外の）勝手な元は σ, τ の有限個の積で

$$\cdots\cdots \tau\sigma^{\varepsilon_i}\tau\sigma^{\varepsilon_{i+1}}\tau\cdots\cdots,$$

の形で表わせる．但し$\varepsilon_1=\pm 1$．

(c) $\mathrm{Isom}_-(D)$ の任意の元 h に対して$h=g\rho$となる$g\in\mathrm{Isom}_+(D)$が存在する．

［証明］ (b)，(c) が示されれば (a) はそれらからの帰結である．したがって (b)，(c) を示すことだけが残されている．簡単な (c) から先に示しておこう．

(c)：$h\in\mathrm{Isom}_-(D)$ に対して$g=h\rho$とおくと$g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ である． $g=h\rho$ の両辺に右からρを掛けると，$\rho^2=1$であることから$h=g\rho$を得る．

(b)：$n=d(0,g(0))$， $g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ に関する数学的帰納法による．
$n=0$のとき；$g(0)=0$ だから$g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ は 1，σ，σ^{-1}のいずれか．
$n\Rightarrow n+1$；$d(0,\Phi(0))=n$なる $f\in\mathrm{Isom}_+(D)$ はすべてσ，τの有限個の積で表わされているものとする．いま$g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ が $d(0,g(0))=n+1$ をみたすとする．$g(0)=y$とするとyを端点に持つ辺が3つある．そのうちのひとつは $d(0,x)=n$ なる $x\in V$をもうひとつの端点としてもつ．いまそれをAとする．そのときgは

$g_0=(JK\rangle\to\langle A_-A_+)$，$g_1=(JK\rangle\to\langle A_+A)$，$g_2=(JK\rangle\to\langle AA_-)$

のどれか1つである．

$(A;B,C)_x$ をxの回りの正格岐とする．そのとき仮定により，$f=(JK\rangle\to\langle BC)$は$\sigma$，$\tau$の有限個の積で表わされている．このfでIはAに移るから必然的に $f(I_-)=A_-$，$f(I_+)=A_+$ となり，fは$f=(I_-I_+\rangle\to\langle A_-A_+)$ と表わしてもよい．$\tau=(JK\rangle\to\langle I_-I_+)$ だから

$$f\tau=(JK\rangle\to\langle I_-I_+\rangle\to\langle A_-A_+)=g_0.$$

定理2.9 (a) により$g_{k+1}=g_k\sigma$ (mod.3) だから，gは $g_0=\Phi\tau$，$g_1=g_0\sigma=f\tau\sigma$，$g_2=g_0\sigma^2=f\tau\sigma^{-1}$ のいずれかである．したがってgはσ，τの有限個の積で表わされている．∎

$d(0,g(0))=0$ならば $g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ は1，σ，σ^{-1}のいずれかであった．また $d(0,g(0))=1$ならば $g\in\mathrm{Isom}_+(D)$ はつぎの9個の元のいずれかである：

τ ，$\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}$ ，$\sigma^{-1}\cdot\tau\cdot\sigma$，
$\tau\sigma$ ，$\sigma\cdot\tau\sigma\cdot\sigma^{-1}$ $(=\sigma\tau)$ ，$\sigma^{-1}\cdot\tau\sigma\cdot\sigma$ $(=(\sigma\tau\sigma)^{-1})$，
$\tau\sigma^{-1}$ $(=(\sigma\tau)^{-1})$，$\sigma\cdot\tau\sigma^{-1}\cdot\sigma^{-1}$ $(=\sigma\tau\sigma)$，$\sigma^{-1}\cdot\tau\sigma^{-1}\cdot\sigma$ $(=\sigma^{-1}\tau)$．

この様子を図示するとつぎのようになる．1つの曲がり角を基準に選ぶ．どの曲がり角を選んでもよいが，JKを基準にしてみよう．単位元1はこの曲がり角JKを自分自身に移すからその場所JKに1を書く．$2\pi/3$回転によってJKはKIに移るからKIにσを書く．σ^{-1}はIJに書く．以下同様にして等長変換を図示できる．

§3. 等長変換群の群構造

前節で，Isom(D) は｛ σ，τ，ρ｝で生成されること，および Isom$_+$(D) は｛σ，τ｝で生成されることを見た．また，それらの生成元のあいだには

$$\sigma^3=\tau^2=\rho^2=(\sigma\rho)^2=(\tau\rho)^2=1$$

という関係があることも見た．この節ではIsom(D)，Isom$_+$(D)がこれ以外の（独立な）関係式を含まないことを示そう．

3.1 <u>Theorem.</u>　σ，τ，ρは互いに独立である．すなわち，これらの各元は他の２つからは決して生成されない．

［証明］　σ，$\tau\in$Isom$_+$(D) から生成される等長変換は常に Isom$_+$(D) の元だから，鏡映$\rho\in$Isom$_-$(D) はσ，τからは生成されない．

$\sigma(0)=0$，$\rho(0)=0$だから回転σ，鏡映ρから生成される等長変換は０を不動点として持つ．ところが０は半回転τの不動点ではない（実際，$\rho(0)=1\neq0$）．したがって半回転τはσ，ρからは生成されない．

鏡映ρは線分０＊１上のすべての点を不動点とする．また半回転τは０＊１の中点１／２を不動点に持つ．したがって，τ，ρから生成される等長変換は１／２を不動点として持つ．ところが１／２は回転σの不動点ではない．したがって回転σはτ，ρからは生成されない．∎

3.2 <u>Definition.</u>　頂点の集合Vをつぎのように２つの部分集合 V_+，V_-に分ける：$0\in V_-$ と定める．$v(\neq0)\in V$に対して，０，$v\in V$を結ぶ道を

$${}_0\Pi_v=A_1A_2\cdots\cdots A_n,\ 0\in A_1,$$

とする．$A_1=0*1$（＝I）であるならば$v\in V_+$，そうでない（すなわち$A_1=J$またはK）ならば$v\in V_-$と定める．

3.3 <u>Proposition.</u>

(a) $\sigma(V_+)\subset V_-$　　$\sigma^{-1}(V_+)\subset V_-$

(b) $\tau(V_+)=V_-$　　$\tau(V_-)=V_+$

(c) $v\in V$，$d(0,v)=m\Rightarrow d(0,\sigma(v))=m$

(c) $v\in V_-$，$d(0,v)=m\Rightarrow d(0,\tau(v))=m+1$

3.4 <u>Definition.</u> 等長変換 r_n を

$$r_n = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n) = \tau\sigma^{\varepsilon_n}\tau\sigma^{\varepsilon_{n-1}} \cdots\cdots \tau\sigma^{\varepsilon_2}\tau\sigma^{\varepsilon_1}$$

と定める．ただし，$\varepsilon_1 = \pm 1$である．

3.5 <u>Proposition.</u> $r_n(0) \in V_+$, $d(0, r_n(0)) = n$

［証明］ nに関する数学的帰納法で示す．
$n=1$のとき： $r_1 = r(\varepsilon) = \tau\sigma^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$，であるから，
$r_1(0) = \tau\sigma^\varepsilon(0) = \tau(0) = 1 \in V_+$, $d(0, r_1(0)) = d(0, 1) = 1$.
$n=k$のとき $r_k(0) \in V_+$, $d(0, r_k(0)) = k$ が成り立つとする．
$r_{k+1} = \tau\sigma^\varepsilon \cdot r_k$, $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$, に対して

$$r_{k+1}(0) = \tau\sigma^\varepsilon r_k(0) \in \tau\sigma^\varepsilon(V_+)) \subset \tau(V_-) = V_+,$$

$$\therefore\ r_{k+1}(0) \in V_+.$$

$$\begin{aligned} d(0, r_{k+1}(0)) &= d(0, \tau\sigma^\varepsilon r_k(0)) \\ &= d(0, \sigma^\varepsilon r_k(0)) + 1 \\ &= d(0, r_k(0)) + 1 \\ &= k+1. \ \blacksquare \end{aligned}$$

3.6 <u>Corollary.</u> $n \geqq 1 \Rightarrow r_n \neq 1, \sigma, \sigma^{-1}, \tau$.

［証明］ $d(0, r_n(0)) = n \geqq 1$ から $r_n \neq 1, \sigma, \sigma^{-1}$.
$r_1(V_+) = \tau\sigma^\varepsilon(V_+) \subset \tau(V_-) = V_+$ から $r_1 \neq \tau$.
$n \geqq 2$ならば $d(0, r_n(0)) = n \geqq 2$ から $r_n \neq \tau$. ■

3.7 <u>Proposition.</u> $r_n\tau \neq 1$, $\sigma^\varepsilon r_n \neq 1$.

［証明］ $r_n\tau = 1 \Leftrightarrow r_n = \tau$, $\sigma^\varepsilon r_n = 1 \Leftrightarrow r_n = \sigma^\varepsilon$. だがこれらはどちらも系3.6 の結果に反する．■

3.8 <u>Proposition.</u> $r_n \neq \sigma^\varepsilon\tau$.

［証明］ $\sigma^\varepsilon\tau(0) = \sigma^\varepsilon(1) \in V_-$. 一方命題3.5により$r_n(0) \in V_+$. したがって$r_n \neq \sigma^\varepsilon\tau$. ■

3.9 <u>Corollary.</u>　$\sigma^{e} r_{n} \tau \neq 1$.

［証明］　$\sigma^{e} r_{n} \tau = 1$とすると$r_{n} = \sigma^{-e} \tau$．これは命題3.8に反する．■

3.10 <u>Theorem.</u>　$\mathrm{Isom}_{+}(D)$ は群表示 $\langle \sigma, \tau, : \sigma^{3} = \tau^{2} = 1 \rangle$ を持つ．

［証明］　$\mathrm{Isom}_{+}(D)$ は $\{\sigma, \tau\}$ から生成される．$\mathrm{Isom}_{+}(D)$ の元のあいだの任意の関係式 $R = 1$ が関係式$\sigma^{3} = 1$および$\tau^{2} = 1$からの帰結であることを示せば証明は完成する．$\sigma^{3} = 1$，$\tau^{2} = 1$の性質を用いると，word Rは$R^{*} = 1$または

$$R^{*} = \cdots\cdots \tau \sigma^{\varepsilon_{i+1}} \sigma^{\varepsilon_{i}} \tau \cdots\cdots \quad , \quad \varepsilon_{i} = \pm 1$$

に帰結される．すなわち，Rは

$$1,\ \sigma^{e},\ \tau,\ r_{n},\ r_{n}\tau,\ \sigma^{e} r_{n},\ \sigma^{e} r_{n} \tau$$

のいずれかを帰結として持つ．ところが 3.2, 3.6, 3.7, 3.8 から

$$\sigma^{e},\ \tau,\ r_{n},\ r_{n}\tau,\ \sigma^{e} r_{n},\ \sigma^{e} r_{n} \tau$$

はいずれも1にならない．したがって$R = 1$ならば$R^{*} = 1$となる．よって$\mathrm{Isom}_{+}(D)$の関係式はすべて$\sigma^{3} = \tau^{2} = 1$からの帰結となる．■

3.11 <u>Theorem.</u>　等長変換群 $\mathrm{Isom}(D)$ は

$$\langle \sigma, \tau, \rho : \sigma^{3} = \tau^{2} = \rho^{2} = (\rho\sigma)^{2} = (\rho\tau)^{2} = 1 \rangle$$

を群表示として持つ．

［証明］　$\{\sigma, \tau\}$ から生成される元はすべて明らかにされて，それらの間の関係は $\sigma^{3} = \tau^{2} = 1$ で尽くされている．残されている問題は，$\{\sigma, \tau, \rho\}$ から生成される元のうち，ρを含むものの間の関係式はすべて

$$\sigma^{3} = \tau^{2} = \rho^{2} = (\rho\sigma)^{2} = (\rho\tau)^{2} = 1$$

からの帰結であることを示すことだけである．

$$(\rho\sigma)^{2} = 1 \iff \rho\sigma = \sigma^{-1}\rho, \qquad (\rho\tau)^{2} = 1 \iff \rho\tau = \tau\rho$$

であるから，word Rの中にρがいくつかあればそれらのρはすべて word の最後尾に持ってくることができる．そこで $\rho^{2} = 1$ を適用すると，結局ρは word の

のなかで高々1個にすることができる．このようにして

$$\rho^{2} = (\rho\sigma)^{2} = (\rho\tau)^{2} = 1$$

で整理された新たな word をR^{*}とする．R^{*}がρを含まなければR^{*}は$\{\sigma, \tau\}$

から生成できる．R^*がρを１個含む場合には等長変換R^*は変格だから$R^* \neq 1$．すなわちρを含む関係式は関係式

$$\sigma^3 = \tau^2 = \rho^2 = (\rho\sigma)^2 = (\rho\tau)^2 = 1$$

の帰結になる．∎

さて，正格等長変換群 $\mathrm{Isom}_+(D)$ の生成系 $\{\sigma, \tau\}$ には$\sigma^3 = \tau^2 = 1$以外には独立な関係式は存在しないことが分かった．一方，$\mathrm{Isom}_+(D)$ の任意の元は

$$1,\ \sigma^e,\ \tau,\ r_n,\ r_n\tau,\ \sigma^e r_n,\ \sigma^e r_n\tau$$

のいずれかである．これらが互いに異なる元であることを確認しておきたい．ただし1，σ^e，τ，r_n が互いに異なることはすでに知っている(3.2)．

ここでは，r_n型の元の一意性について調べておこう．

3.12 <u>Proposition.</u> $r_n = r_m \Rightarrow n = m$.

［証明］ $d(0, r_n(0)) = n$，$d(0, r_m(0)) = m$ であるから $r_n = r_m$ であれば必然的に$n = m$となる．∎

3.13 <u>Theorem.</u>
$r_n = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n)$，$r_n' = r(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots\cdots, \varepsilon_n')$ とするとき $r_n = r_n'$ ならば $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots\cdots, \varepsilon_n')$ である．

［証明］ $n = 1$のとき：$r_1 = \tau\sigma^\varepsilon$，$r_1' = \tau\sigma^{\varepsilon'}$，$\varepsilon$，$\varepsilon' = \pm 1$，とする．
仮定から $\tau\sigma^\varepsilon = \tau\sigma^{\varepsilon'}$，すなわち$\sigma^{\varepsilon-\varepsilon'} = 1$．$\therefore\ \varepsilon = \varepsilon'$．
$n = k$のとき定理が成り立っているものとする．

$$\sigma^{\varepsilon_j} = \sigma_j, \quad \sigma^{\varepsilon_j'} = \sigma_j'$$

と略記することにする．そのとき

$$r_k = \tau\sigma_{k+1}\ \tau\sigma_k \cdots\cdots \tau\sigma_2\ \tau\sigma_1$$
$$r_k' = \tau\sigma_{k+1}'\ \tau\sigma_k' \cdots\cdots \tau\sigma_2'\ \tau\sigma_1'$$

である．このとき $r_{k+1} = r_{k+1}'$ ならば

$$\tau\sigma_{k+1}\ \tau\sigma_k \cdots\cdots \tau\sigma_2\ \tau\sigma_1 = \tau\sigma_{k+1}'\ \tau\sigma_k' \cdots\cdots \tau\sigma_2'\ \tau\sigma_1' \qquad (※)$$

さて，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_1'$，$\varepsilon_{k+1} \neq \varepsilon_{k+1}'$と仮定してみる．(※)から

$$\tau\sigma_{k+1}\tau\sigma_k \cdots\cdots \tau\sigma_2\tau\sigma_1 \cdot \sigma_1'^{-1}\tau\sigma_2'^{-1}\tau \cdots\cdots \sigma_k'^{-1}\tau\sigma_{k+1}'^{-1}\tau = 1$$

が成り立つ．この両辺に左から$\sigma_{k+1}^{-1}\tau$，右から$\tau\sigma_{k+1}$ をかけると

$$\tau\sigma_k\cdots\cdots\tau\sigma_2\tau(\sigma_1\cdot\sigma_1'^{-1})\tau\sigma_2'^{-1}\tau\cdots\cdots\sigma_k'^{-1}\tau(\sigma_{k+1}'^{-1}\sigma_{k+1})=1$$

となる．簡単のために

$$\sigma_1\sigma_1'^{-1}=\sigma_1^*,\ \sigma_{k+1}'^{-1}\sigma_{k+1}=\sigma_{k+1}^*$$

とおくと，$\varepsilon_1\neq\varepsilon_1'$，$\varepsilon_{k+1}\neq\varepsilon_{k+1}'$ だからσ_1^*，σ_{k+1}^* は単位元でない，すなわち$\sigma^{\pm1}$である．そこで，対応する符号をそれぞれε_1^*，ε_{k+1}^*とする．このとき

$$r_{2k}^*=\tau\sigma_k\cdots\cdots\tau\sigma_2\tau\sigma_1^*\tau\sigma_2'^{-1}\tau\cdots\cdots\tau\sigma_k'^{-1}\tau\sigma_{k+1}^*=1.$$

言い変えると

$$r_{2k}^*=r(\varepsilon_{k+1}^*,\ \varepsilon_k',\ \cdots,\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_1^*,\ \varepsilon_2,\ \cdots\varepsilon_k)=1.$$

ところが 3.5により $d(0,\ r_{2k}^*(0))=2k\geqq2$ であるから$r_{2k}^*\neq1$．これは矛盾である．したがって

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1',\qquad \varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{k+1}'$$

のどちらか一方は成り立っている．

$\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{k+1}'$ が成り立つとする．式(※)の両辺に左から $\sigma_{k+1}^{-1}\tau$ をかけて

$$\tau\sigma_k\cdots\cdots\tau\sigma_2\ \tau\sigma_1=\tau\sigma_k'\cdots\cdots\tau\sigma_2'\tau\sigma_1'$$

が得られる．すなわち

$$r(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k)=r(\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k')$$

であるから帰納法の仮定により

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k)=(\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k')$$

となる．よって$\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{k+1}'$ の仮定とあわせて

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k,\ \varepsilon_{k+1}')=(\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k',\ \varepsilon_{k+1}')$$

$\varepsilon_1=\varepsilon_1'$ の場合にも同様にして $r_{k+1}=r_{k+1}'$ から

$$\tau\sigma_{k+1}\ \tau\sigma_k\cdots\cdots\tau\sigma_2\ =\ \tau\sigma_{k+1}'\tau\sigma_k'\cdots\cdots\tau\sigma_2'$$

すなわち

$$r(\varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k,\ \varepsilon_{k+1})=r(,\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_k',\ \varepsilon_{k+1}')$$

が得られるので帰納法の仮定により定理が成り立つ．∎

3.14 <u>Corollary.</u>

$$r(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_n)=r(\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_m')$$

であるための必要十分条件は

$$n=m\quad かつ\quad(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_n)=(\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_n').$$

$r_n\tau$，$\sigma^e r_n$，$\sigma^e r_n\tau$ が σ^e，τ と異なることも確認できる．

3.15 <u>Corollary.</u> $r_n\tau$，$\sigma^e r_n$，$\sigma^e r_n\tau\neq\sigma^e$，$\tau$

［証明］ すべてを書いてみればよい：

$r_n\tau=\sigma^\varepsilon \Leftrightarrow r_n=\sigma^\varepsilon\tau$ （命題3.8 に反する）

$r_n\tau=\tau \Leftrightarrow r_n=1$ （系3.6 に反する）

$\sigma^\varepsilon r_n=\sigma^{\varepsilon'} \Leftrightarrow r_n=\sigma^{\varepsilon'-\varepsilon}=1,\ \sigma,\ \sigma^{-1}$の何れか．（系3.6 に反する）

$\sigma^\varepsilon r_n=\tau \Leftrightarrow r_n=\sigma^{-\varepsilon}\tau$ （命題3.8 に反する）

$\sigma^\varepsilon r_n\tau=\sigma^{\varepsilon'} \Leftrightarrow r_n\tau=\sigma^{\varepsilon'-\varepsilon}=1,\ \sigma,\ \sigma^{-1}$の何れか．（上に反する）

$\sigma^\varepsilon r_n\tau=\tau \Leftrightarrow \sigma^\varepsilon r_n=1$ （命題3.7 に反する）∎

残された事柄は $r_n,\ r_n\tau,\ \sigma^\varepsilon r_n,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau$ が互いに異なる元であることを示すことだけである．

3.16 <u>Proposition.</u> $r_n\tau,\ \sigma^\varepsilon r_n,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau \neq r_m$.

［証明］ 命題3.5により $r_n(0)\in V_+$ だから $\sigma^\varepsilon r_n(0)\in\sigma^\varepsilon(V_+)\in V_-$. よって$\sigma^\varepsilon r_n \neq r_m$である．

$r_n=\tau\sigma_n\cdots\cdots\tau\sigma_2\tau\sigma_1,\ r_m=\tau\sigma_m'\cdots\cdots\tau\sigma_2'\tau\sigma_1',\ \sigma_i,\ \sigma_j'=\pm1$,

としよう．そのとき

$$r_m\tau r_n^{-1}=\tau\sigma_m'\cdots\cdots\tau\sigma_2'\tau\sigma_1'\cdot\tau\cdot\sigma_1^{-1}\tau\sigma_2^{-1}\cdots\cdots\tau\sigma_n^{-1}$$

はr_{m+n} の形だから系3.15 により $r_m\tau r_n^{-1} \neq 1,\ \sigma^\varepsilon$ である．

$$r_n\tau=r_m \Leftrightarrow r_m\tau r_n^{-1}=1\ ,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau=r_m \Leftrightarrow r_m\tau r_n^{-1}=\sigma^\varepsilon$$

はこの事実に矛盾するから

$$\sigma^\varepsilon r_n\tau\neq r_m,\quad \sigma^\varepsilon r_n\tau\neq r_m$$

である．∎

3.17 <u>Proposition.</u> $r_n\tau,\ \sigma^\varepsilon r_m,\ \sigma^{\varepsilon'} r_\ell\tau$ はすべて異なる．

［証明］ これらはすでに調べた事柄からの帰結にすぎない．すなわち

$$r_n\tau=\sigma^\varepsilon r_m \quad\Leftrightarrow\quad \sigma^\varepsilon r_m\tau=r_n$$

$$\sigma^\varepsilon r_m=\sigma^{\varepsilon'} r_\ell\tau \quad\Leftrightarrow\quad \sigma^{-\varepsilon+\varepsilon'} r_\ell\tau=r_n$$

$$\sigma^{\varepsilon'} r_\ell\tau=r_n\tau \quad\Leftrightarrow\quad \sigma^{\varepsilon'} r_\ell=r_n$$

であるが，これらはすべて命題3.16 に反する．∎

最後に，$r_n\tau,\ \sigma^\varepsilon r_n,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau$ のそれぞれの型の元の一意性について調べておく．

3.18 <u>Proposition.</u>

(a) $r_n\tau = r_m\tau \quad \Leftrightarrow \quad r_n = r_m$

(b) $\sigma^\varepsilon r_n = \sigma^{\varepsilon'} r_m \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon',\ r_n = r_m$

(c) $\sigma^\varepsilon r_n\tau = \sigma^{\varepsilon'} r_m\tau \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon',\ r_n = r_m$

［証明］ $\Leftarrow$ はあたり前である．$\Rightarrow$ について調べてみる．(a)はあきらかで，$\varepsilon = \varepsilon'$ならば (b)，(c) もあきらかである．そこで，$\varepsilon \neq \varepsilon'$と仮定してみよう．$\sigma^{\varepsilon-\varepsilon'} = \sigma^*$ とおくと $\sigma^* = \sigma^{\pm 1}$ である．このとき，(b)，(c) の左辺はいずれも $\sigma^* r_n = r_m$ と同値な関係式であるが，これは命題3.16 に反する．したがって $\varepsilon = \varepsilon'$でなければならない．∎

以上の議論をまとめると：

3.19 <u>Theorem.</u> $\mathrm{Isom}_+(D)$ の任意の元は

$$1,\ \sigma^\varepsilon,\ \tau,\ r_n,\ r_n\tau,\ \sigma^\varepsilon r_n,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau$$

のいずれかとして一意に表わされる．また$\mathrm{Isom}_-(D)$ の任意の元は

$$\rho,\ \sigma^\varepsilon\rho,\ \tau\rho,\ r_n\rho,\ r_n\tau\rho,\ \sigma^\varepsilon r_n\rho,\ \sigma^\varepsilon r_n\tau\rho$$

のいずれかとして一意に表わされる．

しかし，$\mathrm{Isom}_+(D)$ の元のあいだの組合わせ的関係を考慮にいれると，$\mathrm{Isom}_+(D)$ の別の群表示の方が便利なこともある．たとえば，$\lambda = \sigma\tau\sigma$ とおくと，
$\tau = \sigma^{-1}\lambda\sigma^{-1}$ だから，$\tau^2 = 1 \Leftrightarrow \sigma^{-1}\lambda\sigma\lambda\sigma^{-1} = 1 \Leftrightarrow (\lambda\sigma)^2 = 1$．
したがって

$$\langle \sigma,\ \tau : \sigma^3 = 1,\ \tau^2 = 1 \rangle \sim \langle \sigma,\ \lambda : \sigma^3 = 1,\ (\lambda\sigma)^2 = 1 \rangle.$$

この $\{\sigma,\ \lambda\}$ の幾何学的な意味は次のとおりである．

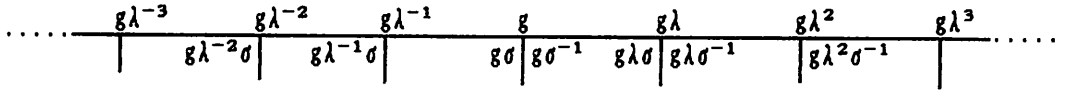


図 3-1

ただし，$\{\sigma,\ \tau\}$ の場合と違って，$\mathrm{Isom}_+(D)$ の元を $\{\sigma,\ \lambda\}$ で表わす方法は一意ではない．