箱根セミナ記録 87(1987)81-89

DS－diagramとincompressible surface

河野正晴（神戸大教養）

3次元多様体Mが与えられた時，そのincompressible surface をすべて調べるということを考えたい．しかし，次の様なexampleを考えることが出来る．

$M = S^2 \times S^1 \# M_1$ とする（#はconnected sum)．ここで，M_1はπ_1がnon-trivialである多様体とする．$S = S^2 \times \{*\}$，αをSと1点でtransversalにまじわるloopでM_1を本質的に通っているものとする．$S(\alpha) = \partial U(S \cup \alpha)$とおくと（Uはregular neighborhood)，$S(\alpha)$はincomprssibleな2-sphereになる．αとβのM_1の通り方が本質的にちがえば，$S(\alpha)$と$S(\beta)$は異なる2-sphereになる．

しかし，この$S(\alpha)$は$S \# S$と書くことが出来る．ただし，#はSとちょっとずらしたS（これらは互にdisjointだとする）の間にarcを引き，それによってつくられる connected sumと考える．よって，前の問題は次の様に述べることが出来る．

『与えられた多様体Mにたいして，次の性質をもつincomprssible surfaceの集り $\{F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots\}$ を見つけよ．

（＊）任意のincomprssible surfaceFに対して$j(1)$，$j(2)$，…，$j(m)$が存在して，$F = F_{j(1)} \# F_{j(2)} \# \cdots \# F_{j(m)}$と書ける．』

以下，Mが具体的に与えられた時，この様な $\{F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots\}$ を具体的に求めることを考えよう．MはDS－diagramで与えられるとする．

(S^2, G)をDS－diagramとし，DS－diagramで決る多様体がMのとき，$M = M(S^2, G)$とかく．$P = S^2/\sim$をfake surfaceとする．FをMのなかのsurfaceとする．MをPでカットするとFもカットされるが，このカットされたsurfaceをF'とかく．つまり，$S^2 = \partial B^3$とみたとき，

$$(F', \partial F') \subset (B^3, S^2).$$

graphGのvertexを$V(V(G))$ edgeを$E(E(G))$とするとき，まず，

n（F）＝n（F'）＝#（F'∩G）／3とし，Fをisotopy classのなかで，n（F）が最小になるようにとっておく．一般にF'はいくつかのcomponentに分れるが，それはdiskとは限らない．しかし，次が成立つ．

Proposition

与えられた（S^2，G）とM（＝M（S^2，G））内の任意のsurfaceFに対して，surfaceS，S_1，…S_mが存在して（m=0の場合もある），
F＝S#S_1#…#S_mと書ける．ただし，S'，S_1'，…S_m'の各componentはdiskになる．

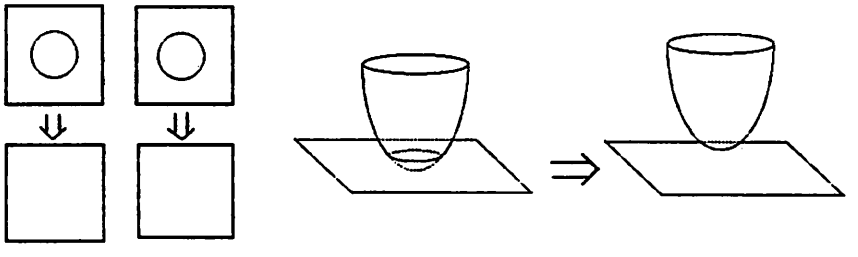
FがincomprssibleのときはSもincomprssibleにとれ，S_1，…S_mはそれぞれincompressible 2-sphereにとれる．

(proof)　∂F'のcomponentでinnermostなものから，diskでカットしていけばよい．

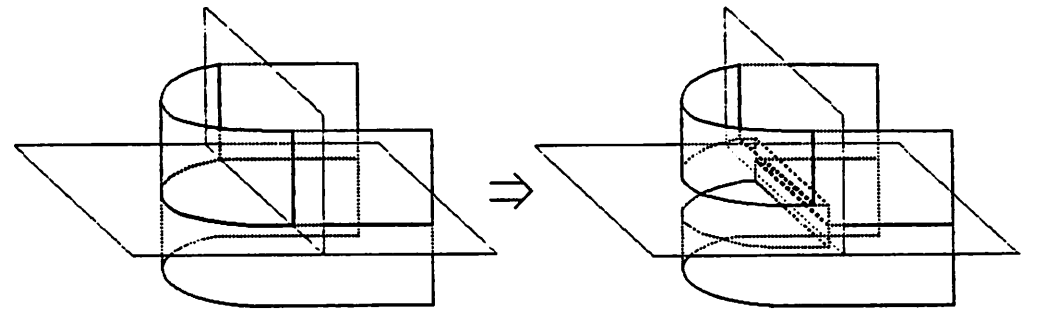
このことより，surfaceFが与えられるとは，DS－diagram（S^2，G）上にidentificationとcompatibleなループの集りL（L∩V＝φ）が与えられることと考えてもよい．よって以下，Lの変形を考える．

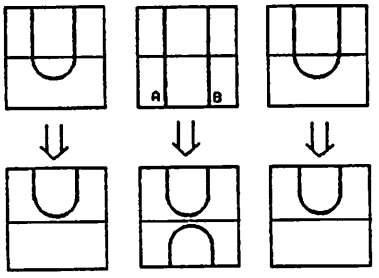
（１）変形

Vanishing



Gと交わらないLのループが存在する時は，上図の様にS^2との交わりを消すことが出来る．これを（０）－変形またはVanishingという．

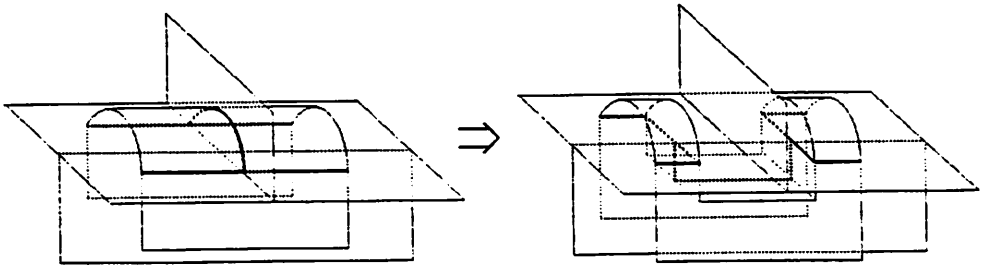


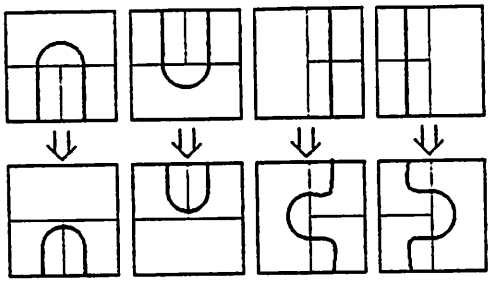


Ｇの１つの辺と交わるＬのarcが存在する時，上図の様な変形が出来る．ただし，isotopyで変形しただけでは，左図のAとBが同じcomponentのときは変形後のＦ’のcomponentのなかにannulusが表れる．この時は，それをdiskでカットして，２枚のdiskにかえる変形をするものとする．この変形を（Ｉ）－変形と呼ぶことにする．

incompressible surfaceにこの変形をすると，surface＋sphereになることが有るが，そのsphereがtrivialな場合は（０）－変形などで消すことが出来るので，componentが増えることを気にせず議論を進める．尚，この変形をすると，ｎ（Ｆ）は２つ減る．

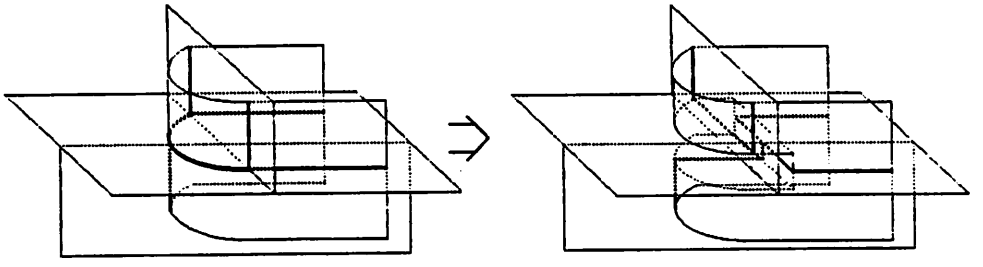
－変形

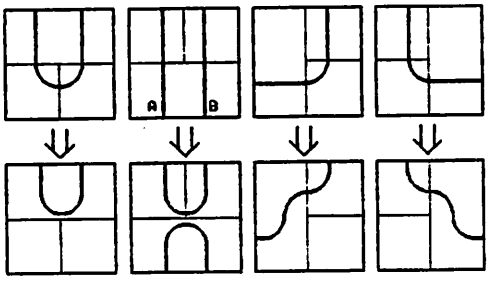




Ｇの隣どうしの２つの辺と交わるＬのarc(corner connectionと呼ぶ)が存在する時，上図の様な変形が出来る．この変形を（Ⅱ）－変形と呼ぶ．この変形では，ｎ（Ｆ）は減らないが，corner connectionは別の場所に移動する．

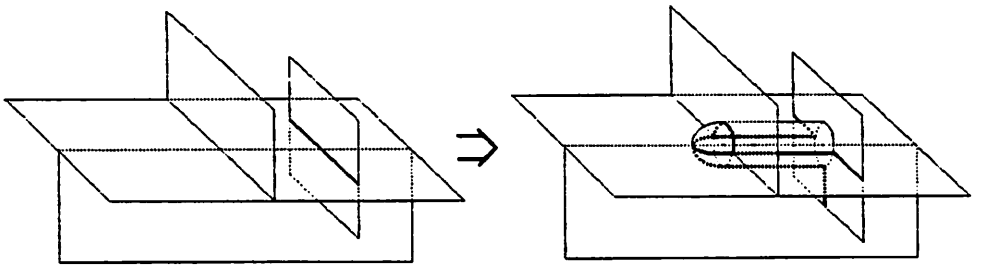
（Ⅲ）－変形

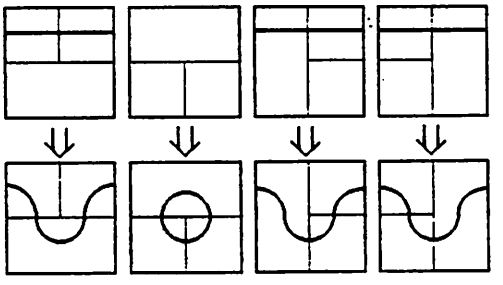




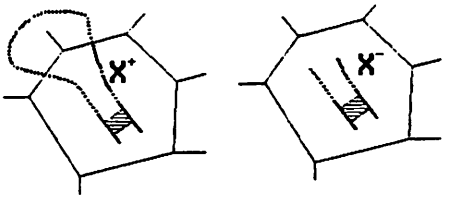
corner connecttionが２つ連続して存在する時は上図の様な変形をすることができる．この変形を（Ⅲ）－変形と呼ぶ．この変形は（Ⅱ）－変形と（Ⅰ）－変形をつづけておこなったものになっている．（Ⅰ）－変形を行なうので，AとBが同じcomponentのときは（Ⅰ）と同じ様に，diskでカットすることとする．

Piping

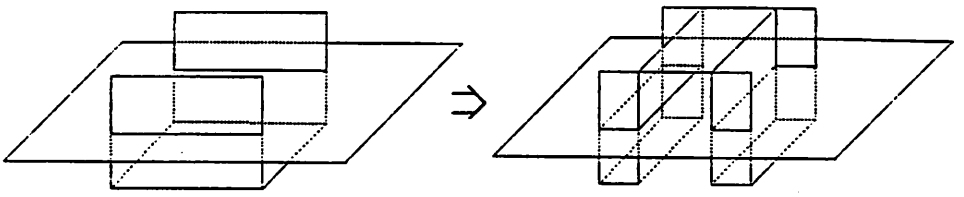


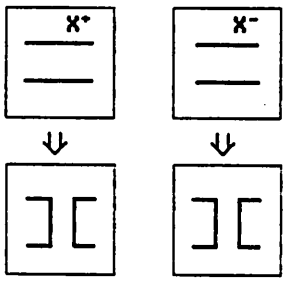


上図の様な変形を（Ⅳ）－変形，またはPipingと呼ぶ．この変形は（０）$^{-1}$－変形（（０）－変形の逆），（Ⅰ）$^{-1}$－変形，（Ⅱ）$^{-1}$－変形をこの順で続けて行なったものになる．



S^2上の１つのregionのなかで，Ｌが左図の様になっている時，つまり４角形Ｄが存在してＤはＬの１つのcomponentαとだけ２つのarcで交わり，他とは交わらない時．αはB^3でdiskを張るが，そのdiskは$\alpha \cap D$のまわりでＤをすこし押込んだものと考えられる．その部分をＭのなかで，$P = S^2/\sim$の反対側へ少し押出す変形を考える．





この変形を行なうと，左図の様に変る．変形を行なうX⁻の２つのarcが同じcomponentに属している時は，変形の結果できる２つのloopはannulusを張る．この時は，diskでカットしたものを（Ｖ）－変形と呼ぶ．

Ｍ内にincompressible surfaceＦ，Ｈが有る時，

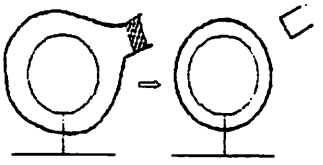
$(F', \partial F') \subset (B^3, S^2)$

$(H', \partial H') \subset (B^3, S^2)$

$L(F) = \partial F'$ と $L(H) = \partial H'$ が（０）－変形から（Ｖ）－変形およびその逆からなる変形を何回か続けてお互に移りあえる時，ＦとＨはisotopyで重ねる事ができる（diskによるカットはこの場合trivialな2-sphereをつくるだけなので）．逆にisotopyで重ねる事ができるならば，変形の列が存在する．

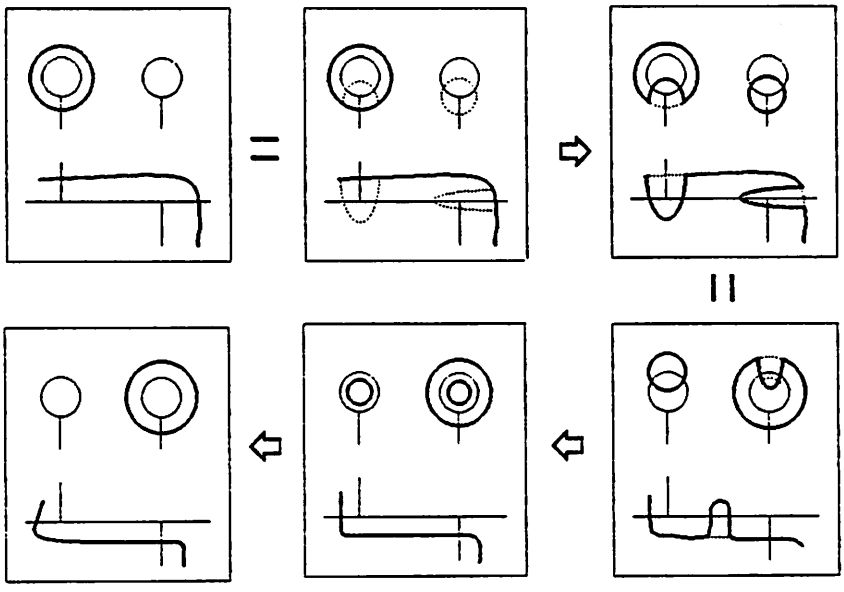
（２）変形の組合せ

（１）で述べた変形を組合せて幾つかの変形を考える事ができる．



１辺形が存在し，１辺形とつながっている辺（１辺形の足）を通るＬのcomponentがある時，それを１辺形を回るloopにできる．このときは（Ｖ）－変形ができる．よって１辺形の足を通るＬのcomponentはloopだけと考えて良い．なお，この変形は１辺形でなくとも１本足の図形ならできる．

※2※ 1辺形が存在し1辺形の足を通るLのloopがある時，次の様な変形で他の1変形の足に移動できる．よって，1辺形の足の一方はLと交わらないとしてよい．



※3※

corner connection(CC)（Ⅱ）－変形によって，別の場所に移すことが出来る．2辺形がある時，2辺形とLのまじわりはCCなので，（Ⅱ）－変形によって1個は消すことが出来る．

（3） SUPPORT

次の条件を満たすS^2上の4辺形の集りSuをサポートと呼ぶ．

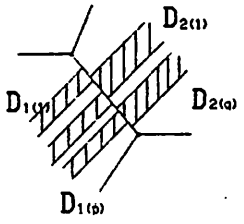
$$Su = \{D^+_1, D^-_1, \cdots D^+_u, D^-_u\}$$

（1）各D^e_i（e＝±）は4辺形で$D^e_i \cap E(G)$はD^e_iの相対する2辺．

（2）X^+，X^-がidentifyされる時，$X^+ \supset D^+_i$とすると，対応する位置で，$X^- \supset D^-_i$．

サポートＳｕにたいし，ｕ個の０以上の整数の集りで次を満たすものを，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \cdots \alpha_u)$ をindexという．

Ｇの各edgeにＡたいし，Ａを境界にもつ面をＸ，Ｙとする．Ａと交わる４辺形でＸに含まれるものを $D^{e_1}{}_{1(1)}, \cdots, D^{e_p}{}_{1(p)}$，Ｙに含まれるものを $D^{f_1}{}_{2(1)}, \cdots, D^{f_q}{}_{2(q)}$ とした時，$\Sigma\alpha_{1(i)}=\Sigma\alpha_{2(i)}$．



indexつきのサポート（Ｓｕ，$\boldsymbol{\alpha}$）にたいし，つぎのようにloopのあつまりＬ＝Ｌ（Ｓｕ，$\boldsymbol{\alpha}$）を作ることが出来る．各４辺形 $D^+{}_i$，$D^-{}_i$ の中に，Ｇの辺から辺へ α_i 本平行にarcを引く．そして，各arcを辺の周りで調節してつながるようにする．

Ｌ＝Ｌ（Ｓｕ，$\boldsymbol{\alpha}$）の各componentにdiskをはって出来る曲面を

Ｆ＝Ｆ（Ｓｕ，$\boldsymbol{\alpha}$）と書き，ＦはＳｕにサポートされるという．

S^2 上のサポートもloopと同じ様に（１），（２）で述べた変形をすることが出来る（何本かまとめて変形すると考えれば良い）．一般に，ＤＳ－diagram（S^2，Ｇ）にたいしサポートは有限個であるが，変形で必要なサポートの数をさらに減らすことが出来る．

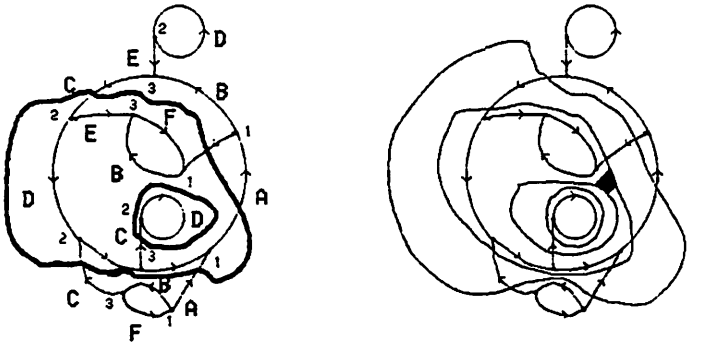
１つのサポートＳｕにたいし，それにサポートされるincompressible surfaceは有限個とは限らないが，次はわかる．

（１）Ｆ＝Ｆ（Ｓｕ，$\boldsymbol{\alpha}$）にたいし，Ｔ＝Ｆ（Ｓｕ，$(2k+e)\boldsymbol{\alpha}$）（ｅ＝０，１）とすると，ＴはＦと平行な2k+e個の曲面の集りか，k個のＦのtwisted doubleとｅ個のＦからなる．

（２）１つのサポートＳｕにたいし，それにサポートされるincompressible surfaceが無限個あれば，Ｍ＝Ｍ（S^2，Ｇ）はincompressible torusを含む．

（４）実験

このセクションでは（１）～（３）をもちい幾つかの実験を行なう．



上左図は石井氏の（Z_2－１）（in箱根セミナー記録８５）です．この上にincompressible surface（または必要なsupportが）どれくらいあるか調べてみます．まず，１辺形Ｄとの交わりはないとしてよい．次に（２）の（２）の変形（足の移動）によって，Ｅとの交わりもないとしてよい．Ｆ，Ｂで囲まれる２辺形は（２）－（３）の変形でなくなる．以上により，必要なsupportは上左図の太線のものだけということがわかる．indexは$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$でなければならない．$\alpha=1$のときはone-sidedな$P^2$になる．$\alpha=2$のときは$S^2$になるが上右図の黒い４角形で（Ｖ）－変形を行なうことにより3-ballを張ることがわかる．以上により，多様体がP^3であることもわかる．

このセクションの最初に「幾つかの」と書いたが絵を入力するのに疲れたので，今思っている問題を書いて終りにしたい．

（１）１つのサポートにたいしそれにサポートされるincompressible surfaceが有限この場合と無限個の場合があるが，それをＤＳ－diagramで特徴付けられるのか．

（２）サポートがそれ以上reduce出来ない時，既約なindexでサポートされる曲面はincompressibleか．