コンパニオンを持つknotについて（２）

河野正晴（神戸大教養）
渋谷哲夫（大阪工大）

箱根の話はＬｅｍｍａ３にgapがあり以下の様に修正しました。同様の方法で、Ｌｅｍｍａ４も証明でき、その結果、話した時はR^3のなかのknotについてでしたが、S^3のknotについても証明できました。

Ｖをoriented solid torusとし、ｋをＶのなかのknotとします。ｏ(ｋ，Ｖ)＝min｛＃Ｄ∩ｋ｜ＤはＶのmeridian disk｝とします。ｏ(ｋ，Ｖ)≧１の時、ｋはＶでgeomrtrically essentialであるといいます。ｃをS^3のなかのknotとし、ｆをＶからＵ(c)への向きを保つ同相写像とします。ただし、ここでＵ(c)はｃのregular neiborhood。この時ｆ(ｃ)をｃ(ｋ)と書くことにします。　ただし、ｃ(ｋ)はｃとｋから一意に決まるわけでなくmeridian方向の回転の自由度があります。　　又、１次元homology群上でidentityとなるＶからＶへの同相写像ｆをfaithfulと呼ぶことにします。ｆが誘導する１次元homology群上の写像をf_*と書きます。V_1，V_2をS^3のなかのsolid-torusとする時V_1からV_2への同相写像ｆがlongitudeをlongitudeに写す時やはりfaithfulといいます。

さて、このノートでは次の定理を示します。

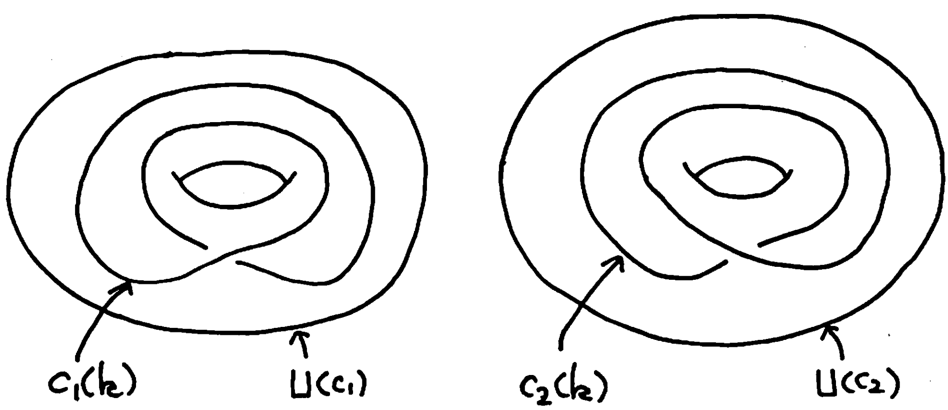
Theorem1

c_1 と c_2 を S^3 のなかのtrivialでないknotとし、kをsolid-torusVのなかの $o(k, V) \geqq 2$ となるknotとします。f_i をVから $U(c_i)$ への向きを保つ同相写像とします(i=1,2)。$c_1(k) \approx c_2(k)$ となる時、$f_2 f_1^{-1}$ はfaithful。ここで≈はsame knot typeを表します。

Teorem2

c_1 と c_2 を S^3 のなかのtrivialでないknotとし、kをsolid torusVのなかのgeometrically essentialなknotとします。$c_1(k) \approx c_2(k)$ となる時 S^3 の向きを保つ同相写像 ψ で $\psi(U(c_1)) = U(c_2)$、$\psi(c_1(k)) = c_2(k)$ となるものがが存在します。

Remark c_1 と c_2 がtrivialなら次の様な反例があります。



定理を証明するためにいくつかのLemmaを用意します。

Lemma 1

V_1、V_2 を S^3 のなかのknotしたsolid torusとします。Kを $V_1 \cap V_2$ にふくまれるknotとします。 いま、$o(K, V_i) \geq 1$ $(i=1, 2)$ とすると、Kをとめた S^3 のisotopyで次のいずれかにできる。

(i) $\partial V_1 \cap \partial V_2 = \phi$

(ii) V_1 と V_2 の両方のmeridian disk D_1, D_2 が存在して、$cl(V_1 - D_1 \cup D_2)$ のある連結成分が $cl(V_2 - D_1 \cup D_2)$ のある成分のなかでknotした3次元のballになっている。

証明は［4］を参照。

Lemma 2 (Haken's finiteness theorem)

Mをコンパクトな3次元多様体とするとき、次の性質をもつ負でない整数h(M)が存在する。

(i) Mのなかのdisjointで2-sidedなincompressibleなsurface $F_1 \cdots F_n$ にたいして、$n > h(M)$ とすると、あるiとjが存在して F_i と F_j は平行になる。

(ii) h(M)は(i)の性質を持つもののなかで最小。

証明は［1］などを参照。

Lemma 3

Vをsolid torusとし、kをそのなかの $o(k, V) \geq 2$ を満たすknotとする。fをVからVへの向きを保つ同相写像で、$f(k) = k$ を満たすと、fはfaithfulである。

証明は $h(V - \mathrm{Int}\,U(k))$ についてのinductionで行われます。

Fact 1　Tをtorusとし、α_1、α_2 をその上のsimpleなloopで、$\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \phi$ となるもの、fをT上の同相写像で、$f_*([\alpha_i]) = [\alpha_i]$ となるものとすると(i=1,2)、f_* はidentity。ただし、$[\alpha_i]$ は α_i のhomology classを表します。

Fact 2　f^n がfaithfulなら、fもfaithful($n \neq 0$)。

Fact 1、2は容易なので、証明は省略します。

V-IntU(k)のtorus decomposition $T_1 \ldots T_s$ を考えます。　つまり、V-IntU(k)を $T_1 \ldots T_s$ でcutして出来る3次元多様体の各成分を $P_0 \ldots P_u$ とすると、各 P_i はhyperbolicか又はSeifertになっています。　ただし、$\partial P_0 \supset \partial V$ としておきます。各 T_i に対し、meridian element m_i、つまり、T_i 上のloopでV－IntU(k)でdiskを張るものが存在します。又 T_i が $\partial U(k)$ と ∂V をseparateしない時longitude element l_i、つまりmeridian diskの反対側でsurfaceを張るループが存在します。fをLemma 3で与えられた写像とします。Fact 2より、必要なら f^n とfを置き換える事により $f(T_i) = T_i$、$f(P_j) = P_j$ と仮定してよい。この時meridian element m_i に対し $f(m_i) = m_i$、又longitude element l_i が存在すれば、$f(l_i) = l_i$ となる。

Fact 3　V-IntU(k)のpieceは S^3 のknotのexteriorのpieceになる。この時 P_i がSeifert pieceなら

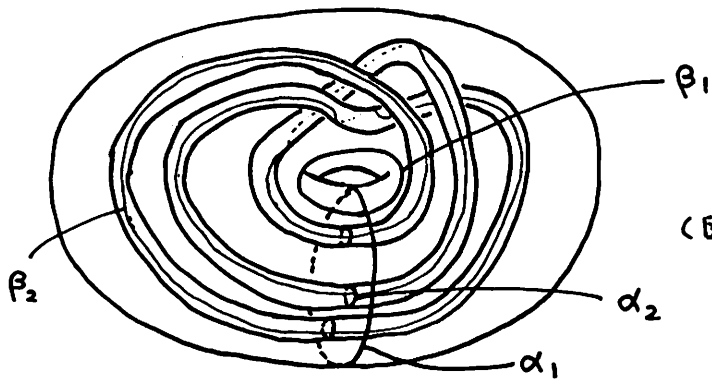
(i)　cable space

(ii)　composing space のいずれか。

ここで、cable spaceとは、solide torus Vから(p, q)-torus knotの開近傍を除いた空間で、composing spaceとはWを穴あきdiskとした時 $W \times S^1$ となるもの。詳しい定義なども含め [2] 参照。

Ｆａｃｔ４　P_j をcable spaceとし、$g = f|_{P_j}$ とおくと、

g_* は境界上ではidentity。



（図は P=3，q=2）

図の様に外側の境界T_1 上にループα_1 、β_1 を、内側T_2 上にα_2 、β_2 をとります。この時、Seifert fiber spaceの regular fiber tに対し

$[t]=[\beta_2]$ 、$[\beta_2]=p[\beta_1]+q[\alpha_1]$

が成立する様に、α_i β_i を選びます。この時、fiberingの一意性より、

$g_*([t])=[t]$ 。又、T_i のmeridianをm_i とすると、$g_*([m_i])=[m_i]$ が成立する。今、$[t]\neq[m_i]$ とすると、Ｆａｃｔ１よりg_* は境界上でidentity、よってＦａｃｔ４が成立するので、$[t]=[m_i]$ とする。

T_1 又はT_2 でS^3 をcutした時U(k)を含む成分Wはsolid torus。

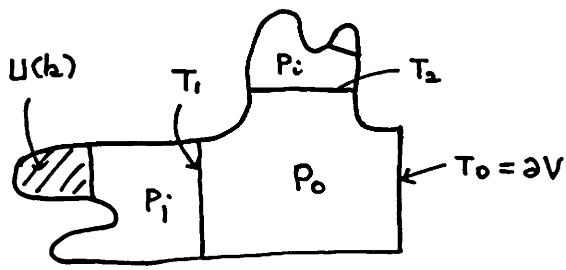
この時solid torusWはP_j にm_i に沿って(i=1or2)diskを張り付け、それに3-ballを張り付けたものなので、homologyを計算すると、$H_1(V)=Z+Z_p$ となるので矛盾。

ｌｅｍｍａの証明を始めます。

（Ａ）h(V-Int(U(k)))＝１の時：この時はV-Int(U(k))は一つのpieceP_0 から出来ている。この時P_0 はhyperbolic又はSeifertで∂P_0 の成分の数は２なので、P_0 がcomposing spaceならｋはＶのcoreになりｏ(ｋ，Ｖ)≧２に矛盾。P_0 がCable spaceの時はＦａｃｔ４よりｏ．ｋ．。P_0 がhyperbolicの時は

Out$(\Pi_1(M))$ = Isom(M)は有限群より、ある自然数Nが存在して f^N = identityとしてよい。この時もやはりFact 2よりo. k. .

（B）$h(V-\mathrm{Int}(U(k)))\geqq 2$ の時：P_0 がhyperbolicやcable spaceの時は（A）と同様にo. k. . よってP_0はcomposing space、つまり$P_0 = W\times S^1$ とします。ただし、Wはn個穴のあいたdiskとします($n\geqq 2$)。 $\partial W = a_0 \cup a_1 \cup ...$ a_n、$T_i = a_i \times S$ とおく($i=0,...n$)。ただし、T_1 は∂Vと$\partial U(k)$を分離するものとし、 $T_0 = \partial V$とします。



regular-fiber $t = * \times S^1$ がmeridianでなければ、Fact 1より $f_* |_{\partial V}$ = identityなのでtはVのmeridianとします。

$i = 2, 3, ... n$に対しlongitudeが存在するので $f_* |_{T_i}$ = identity ($i=2,...,n$)。$\partial U(k) = T_1$ の時は$o(k, V) = 1$なので、$\partial U(k) \neq T_1$。

T_1 でVをcutした時∂Vを含まない成分をWとすると、Wはsolid torus。$o(k, W) = o(k, V)\geqq 2$かつ、$h(W-\mathrm{Int}(U(k))) < h(V-\mathrm{Int}(U(k)))$なので帰納法の仮定がつかえて、$f_* |_{T_1}$ = identity.

よって、
$$
\begin{aligned}
0 &= f_*(0) = f_*([a_0 + a_1 + ... + a_n])\\
&= f_*([a_0]) + f_*([a_1]) + ... + f_*([a_n])\\
&= f_*([a_0]) + [a_1] + ... \ [a_n]\\
&= f_*([a_0]) - [a_0]
\end{aligned}
$$

$f_*([a_0]) = [a_0]$ より $f_* |_{\partial V}$ = identityとなりLemmaが成立します。

Lemma 4

V_1 と V_2 を S^3 のなかのsolid torusで、$V_1 \cup V_2 = S^3$ となるものとします。ただし、$\partial V_i = T_i$ とすると(i=1,2)、$T_1 \cap T_2 = \phi$ とします。k を V_1 のなかの $o(k, V_1) \geq 2$ をみたすknotとします。f を $f(T_2) = T_1$、$f(k) = k$ をみたす、V_1 から V_2 への同相写像とすると、f はfaithful。

証明はやはり $h(V_1 - \mathrm{Int}(U(k)))$ についての帰納法です。
m_i、l_i を V_i のmeridian、longitudeとすると(i=1,2)、

$f_*([m_1]) = [m_2]$、
$f_*([m_2]) = [m_1]$、
$f_*([l_2]) = [l_1]$

が成立します。

$f_*([l_1]) = [l_2] + \alpha [m_2]$ とおくと、
$f_*^2([l_1]) = [l_1] + \alpha [m_1]$。
faithfulを示すためには $\alpha = 0$ を示せばよい。

$V_1 \cap V_2 - \mathrm{Int}(U(k))$ のtorus-decompositionを考える。T_3 T_4 . . . T_s をcutするtorus(T_i は ∂V_i でcutするtorusにははいっていない(i=1,2))、各pieceを P_0 P_1 . . . P_u とする。ただし、P_0 は ∂V_1 を含む成分としておきます。

Fact 5　各piece P_0、P_1、. . . P_u は S のknotのexteriorのpiece。

これもFact 3と同様に証明できます。

（A）$h(V\text{-}\mathrm{Int}(U(k)))=1$の時：この時$V_1\cap V_2-\mathrm{Int}(U(k))$は一つのpiece P_0から出来ています。この時P_0はhyperbolic又はSeifertで∂P_0の成分の数は３なので、Cable spaceにはなれない。P_0がcomposing spaceの時は、meridian m_1がregular fiberでなければ、fiberingの一意性とＦａｃｔ１よりＬｅｍｍａは成立します。m_1がregular fiberの時$o(k, V_1)=1$となり、$o(k, V_1)\geqq 2$に矛盾します。P_0がhyperbolicの時は$\mathrm{Out}(\Pi_1(M))=\mathrm{Isom}(M)$は有限群より、ある自然数Nが存在して$f^N=\mathrm{identity}$となります。この時もやはりＦａｃｔ２よりｏ．ｋ．．

（B）$h(V\text{-}\mathrm{Int}(U(k)))\geqq 2$の時： P_0がhyperbolicの時は（A）と同様にｏ．ｋ．．

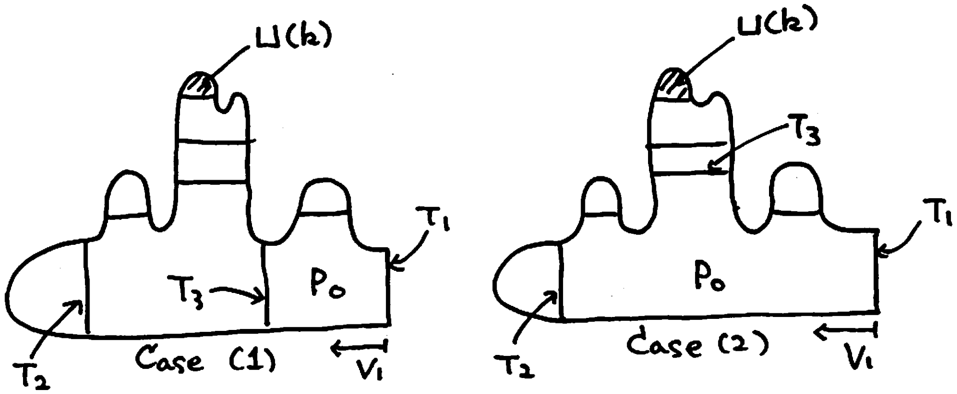
次にP_0はcableとします。$\partial P_0=T_1\cup T_3$とおきます。meridian m_1がregular fiberでなければ$f^2|_{T_1}=\mathrm{identity}$なので、$m_1$はregular fiberとします。 この時$T_3=\partial U(k)$は起こりません。$S^3$を$T_3$でcutした時$P_0$を含まない成分をWと置くと、Wはsolid torusで$o(k, W)=o(k, V_1)\geqq 2$。$h(W\text{-}\mathrm{Int}(U(k)))<h(V1\text{-}\mathrm{Int}(U(k)))$と帰納法の仮定より$f^2|_{\partial W}=\mathrm{identity}$。Ｌｅｍｍａ４のＦａｃｔ４より$f^2|_{\partial V_1}=\mathrm{identity}$なので$\alpha=0$が成立します。よって$P_0$はcomposing-space、つまり$P_0=W\times S^1$とします。
ただし、Wはｎ個穴のあいたdiskとする($n\geqq 2$)。 $\partial W=a_1\cup a_2\cup\ldots\cup a_{n+1}$、$T_i=a_i\times S^1$とおきます($i=1,\ldots n+1$)。

前と同様にm_1はregular fiberとしてよい。 $\partial P_0\supset\partial U(k)$とすると、$o(k, V_1)=1$で矛盾。次の２つの場合を考えます。

（１） $\partial P_0\not\supset T_2$

（２） $\partial P_0\supset T_2$

Case (1) ∂P_0 のなかで P_0 と $\partial U(k)$ を分離するものを T_3 とします。
T_3 で S^3 をcutした時 P_0 を含まない成分をWとすると、$o(k, W)$
$= o(k, V_1) \geqq 2$。∂P_0 の中で T_1 と T_3 以外のものに対してはlongitudeが存在するので、ある自然数Nが存在して、$f^{2N}|_{\partial P_0 - T_1 - T_3} = \mathrm{identity}$.
又、$h(W-\mathrm{Int}(U(k))) < h(V1-\mathrm{Int}(U(k)))$ と帰納法の仮定より、$f|_W$ はfaithful、
よって $f^2|T_3 = \mathrm{identity}$。 他の成分上ではidentityなので、
$f^{2N}|_{T_1} = \mathrm{identity}$、つまり $\alpha = 0$。



Case (2) (1)と同じく ∂P_0 のなかで P_0 と $\partial U(k)$ を分離するものを T_3 とします。この時 $f(T_3) = T_3$ となります。T_3 で S^3 をcutした時 P_0 を含まない成分をWとすると、$o(k, W) = o(k, V_1) \geqq 2$。
今、$f_*|_{T_3} \neq \mathrm{identity}$ とすると、$f|_W$ はsolid torusWからWへの同相写像で $f|_W(k) = k$ となるので、lemma 3に矛盾、
よって $f_*|_{T_3} = \mathrm{identity}$.

Fact6 $f_*(\sum_{i=4}^{n+1}[a_i]) = \sum_{i=4}^{n+1}[a_i]$

「証明」$i \geqq 4$ に対して、T_i にはlongitude l_i が存在する。f でlongitudeはlongitudeに写るので、ある $n+1$ −置換 σ があって

$f_*([l_i]) = [l_{\sigma(i)}]$となります。$l$は各$T_i$のmeridianなので、ある整数$q_i$が存在して、$[a_i] = [l_i] + q_i[t]$と書けます。よって、

$$
\begin{aligned}
f_*\left(\sum_{i=4}^{n+1}[a_i]\right) &= \sum_{i=4}^{n+1} f_*([l_i]) + \sum_{i=4}^{n+1} q_i\, f_*([t]) \\
&= \sum_{i=4}^{n+1}[l_{\sigma(i)}] + \sum_{i=4}^{n+1} q_i[t] \\
&= \sum_{i=4}^{n+1}[l_i] + \sum_{i=4}^{n+1} q_i[t] \\
&= \sum_{i=4}^{n+1}[a_i]
\end{aligned}
$$

$i=1, 2$の時も$[a_i] = [l_i] + q_i[t]$とおいて置きます。ここで
$f_*([a_3]) = [a_3]$なので、

$$
\begin{aligned}
0 = f_*(0) &= f_*([a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}]) \\
&= f_*([a_1]) + f_*([a_2]) + f_*\left(\sum_{i=3}^{n+1}[a_i]\right) \\
&= f_*([l_1] + q_1[t]) + f_*([l_2] + q_2[t]) \\
&\quad + \sum_{i=3}^{n+1}[a_i] \\
&= [l_2] + \alpha[t] + q_1[t] + [l_1] + q_2[t] \\
&\quad - [a_1] - [a_2] \\
&= [a_1] + [a_2] + \alpha[t] - [a_1] - [a_2] \\
&= \alpha[t]
\end{aligned}
$$

故に、$\alpha = 0$つまりfaithful。

定理1の証明に入ります。
$c_1(k) \approx c_2(k)$より、S^3上の向きを保つ同相写像gが存在して、
$g(c_2(k)) = c_1(k)$となります。ここで、$K = c_1(k)$、$V_1 = U(c_1)$、
$V_2 = g(U(c_2))$、$f = g f_2 f_1^{-1}$とおくと、fはV_1からV_2への同相写像

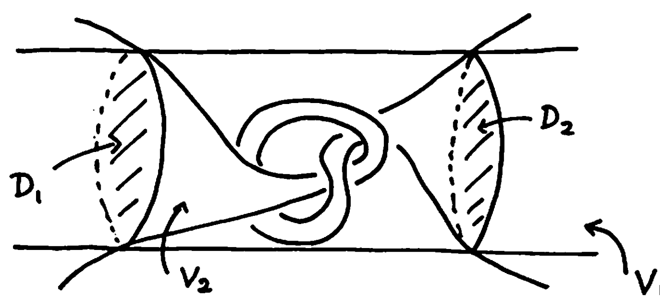
になり、fがfaithfulが言えれば、$f_2 f_1^{-1}$もfaithfulになります。証明はlemma3、4と同様に$h(V_1\text{-Int}(U(K)))=h(V\text{-Int}(U(k))$についての帰納法です。

（1）$h(V_1\text{-Int}(U(K)))=1$の時は$o(k, V)=1$なので考えなくて良い。

（2）$h(V_1\text{-Int}(U(K)))=m\geqq 2$とし、nより小さい時は定理は成立しているとします。Lemma1より次のCaseA、Bのいずれかが成立しています。

（A）$\partial V_1 \cap \partial V_2 = \phi$

（B）V_1とV_2の両方のmeridian diskD_1，D_2が存在して、$cl(V_1 - D_1 \cup D_2)$のある連結成分が$cl(V_2 - D_1 \cup D_2)$のある成分のなかでknotした3次元のballになっている。



Case（B）は次の様に一般化した形を証明します。

（B'）S^3のなかにKを含むknotしたsolid torusV'が存在してV_1とV'は（B）の様になっている、つまり、

V_1とV'の両方のmeridian diskD_1，D_2が存在して、$cl(V' - D_1 \cup D_2)$のある連結成分が(それをX'とする)は$cl(V_1 - D_1 \cup D_2)$のある成分(それをXとする)のなかでknotした3次元のballになっている。

（A）この時、更に、次の3つのCaseに分けます。

(a) $V_2 \subset Int(V_1)$

(b) $V_1 \subset Int(V_2)$

(c) $V_1 \cup V_2 = S^3$

(b)が起こった時はV_1とV_2、fとf^{-1}をいれかえる事により(a)としてよい。

$\partial V_i = T_i$ とします(i=1,2)。

(a) T_1 と T_2 が平行の時は $V_1 = V_2$ としてよい。この時はLemma 3より faithful。T_1 と T_2 が平行でない時、任意の自然数nに対して f^n が定義され、$T_n = f^{n-1}(T_1)$ が定義できるが、$T_1 \ldots T_n$ はdisjointな平行でないincompressibleなtorusの集まりになります。 nはいくらでも大きくとれるのでLemma 2に矛盾。

(c) $T_3 = f(T_2)$ とします。$T_1 \cap T_3 \neq \phi$ の時。S^3 を T_3 でcutした時、$U(K)$ を含む方を V' とします。この時はCase(B')なので後で示します。

$T_1 \cap T_3 = \phi$ の時は $V_1 \cap V_2 = B$ と置くと、$T_3 \subset B$ 又は $T_3 \cap B = \phi$。$T_3 \cap B = \phi$ の時は V_1 と V_2、f と f^{-1} を置き換えることにより $T_3 \subset B$ としてよい。T_1 と T_3 が平行の時は $T_1 = T_3$ としてよい。この時はLemma 4よりfaithful。T_1 と T_3 が平行でない時、任意の自然数nに対して f^n が定義され、$T_n = f^{n-1}(T_1)$ が定義されますが、$T_1 \ldots T_n$ はdisjointな平行でないincompressibleなtorusの集まりになります。nはいくらでも大きくとれるのでLemma 2に矛盾。

(B') $Y = V_1 - \mathrm{Int}(X)$、 $W' = Y \cup X'$、
$W = W' - \mathrm{Int}(\partial W', W')$ とおくと、$o(K, W) = o(K, W) \geq 2$、$h(W-\mathrm{Int}(U(K))) < h(V_1-\mathrm{Int}(U(K)))$ が成り立ちます。よって帰納法の仮定より $f|_W$ はfaithful。W、$f(W)$ のlongitudeを l_W、$l_{f(W)}$ とおくと、$f(l_W) = l_{f(W)}$。ここで、$V_1 - \mathrm{Int}(W)$ のなかでは $l_{V_1} \sim l_W$。ただし、$\sim$ はhomologousの意味。$f(V_1) - \mathrm{Int}(f(W))$ のなかでは、$f(l_1) \sim f(l_W) = l_{f(W)} \sim l_{f(V_1)} = l_2$。よって、fもfaithful。

次に定理2を示します。［3］の定理より $c_1 \approx c_2$、つまり $E(c_1) = S^3 - \mathrm{Int}(U(c_1))$ から $E(c_2) = S^3 - \mathrm{Int}(U(c_2))$ への向きを保つ同相写像 g でmeridianをmeridian、longitudeをlongitudeに写すものがあります。

$o(k, V) \geqq 2$の時は$f_2 f_1^{-1}$もmeridianをmeridian、longitudeをlongitudeに写すので、これらの写像を張り合わせれば良い。

$o(k, V) = 1$の時は，任意の整数nに対してVからVへの向きを保つ同相写像t_nで、$t_n(k) = k$をみたし、longitudeをmeridianの方向にn回ひねったように写すのもがあります。gと$f_2 t_n f_1^{-1}$をはりあわせれば、同様にできます。

References

[1]J.Hempel,3-manifolds,Ann. of Math. Stdies.

[2]W.Jaco,Lectures on three-manifold topology, Regional Conference Series in Math. No30,1980.

[3]M.Kouno,On knot with companion,Kobe J. of Math.,2(1985)143-148.

[4]H.Schubert, Knoten und Vollinge, Acta Math.,90(1953),131-286.