箱根セミナ記録 9 2 (1992) 41-54.

3-正則，3-連結，平面グラフのH-変形

小室秀雄

埼玉県立
（川越南高校）

$\mathcal{G}_n = \{ G \mid G$ は，頂点数 $2n$，連結，3-正則，ループなし，多重辺なしの平面グラフ$\}$ $(n \geqq 3)$

に対して，私は［1］において，"H-変形"という平面グラフの局所的変形を定義し，$\mathcal{G}_n$ に"H-距離"という距離を定義した。

本講演では，

$\mathcal{G}_n^{(3)} = \{ G \mid G$ は：頂点数 $2n$，3-正則，3-連結，ループなし，多重辺なしの平面グラフ$\}$ $(n \geqq 3)$

に対して，同様の事を行なう。

G をグラフとするとき，その頂点集合，辺集合を，それぞれ $V(G)$，$E(G)$ で表す。頂点 $x \in V(G)$ の次数を $\deg_G x$ であらわし，任意の頂点 x について，$\deg_G x = r$ となるグラフを r-正則グラフと呼ぶ。

定義 1. $(N_G(v), N_G(uv))$

$v \in V(G)$ に対して，

$$N_G(v) := \{ w \in V(G) \mid vw \in E(G) \}$$

$e = uv \in E(G)$ に対して，

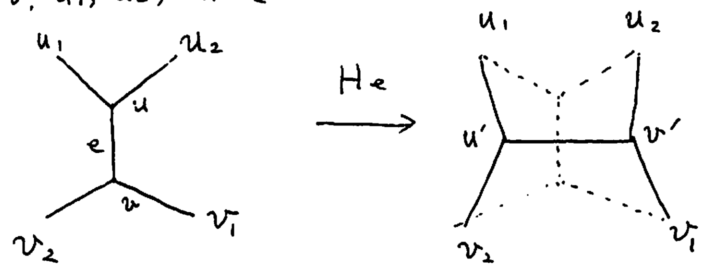
$$N_G(e) = N_G(uv) := N_G(u) \cup N_G(v) - \{u, v\}$$

定義 2 （H-変形）

$G \in \mathcal{G}_n^{(3)}$，$e = uv \in E(G)$ に対して

辺 e に関する H−変形 $H_e : G \longrightarrow G'$ を次のように定義する。

$u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(G)$ に対して。



G の部分グラフ　　　　　G′ の部分グラフ

定義 3 (Good, Bad な辺)

$\mathcal{G}_n^{(3)} \ni G$

$E_H(G) := \{e \mid e$ に関して H−変形可能$\} \ni e$ に対して.

e が Good な辺

$\Longleftrightarrow$ e に関する H−変形で得られるグラフ $G' \in \mathcal{G}_n^{(3)}$

Good でない辺を、Bad な辺 と呼ぶ。すなわち、Bad な辺は、H−変形不可能か、あるいは、H−変形の結果、3−連結でないグラフを生ずる辺のことである。

1. 標準化定理.

次の補題は、基本的事実である。

補題 1.

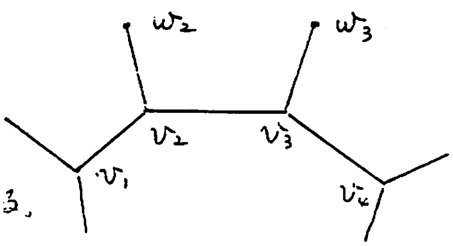
$\mathcal{G}_n^{(3)} \ni G$

G の 1 つの面の周上の連続する 4 頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 において、辺 v_2v_3 が Bad ならば、辺 v_1v_2、辺 v_3v_4 はともに Good である。

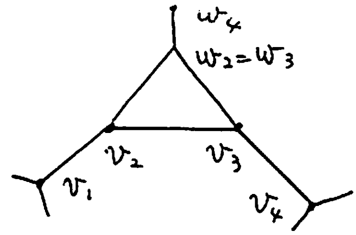
証明

I) $v_2v_3 \notin E_H(G)$。

すなわち、辺 v_2v_3 に関して H−変形可能でないとする。



すなわち、$w_2=w_3$

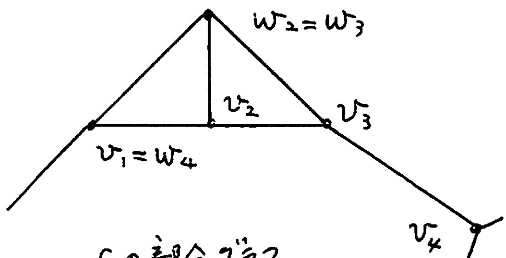


Gの部分グラフ

① 辺v_1v_2が、H-変形可能でない。

$v_1=w_4$。

Gは、3-連結でない。矛盾。



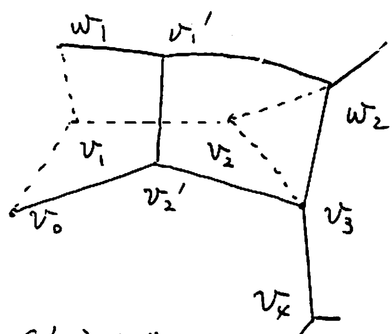
Gの部分グラフ

② 辺v_3v_4が、H-変形可能でない。

①と同様に、Gは、3-連結でない。矛盾。

③ 辺v_1v_2, 辺v_3v_4とも、それに関してH-変形可能である。

1) 辺v_1v_2が、goodでない。すなわち、H-変形してできるgraph G'が3-連結でないとする。



G'の部分グラフ

G'に対して、2-cut Cが存在する。

Cは、v_1'かv_2'どちらか少なくとも1方を含む。

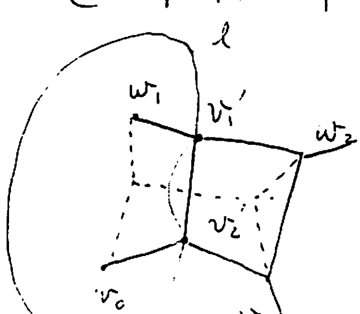
なぜならば、もし、$C \not\ni v_1', v_2'$ ならば、Gがすでに2-cut Cを持ち、3-連結でなくなる。

$C\ni v_1'$ ($C\ni v_2'$も同様)の場合を考える。

$C=\{v_1', v'\}$とおく。

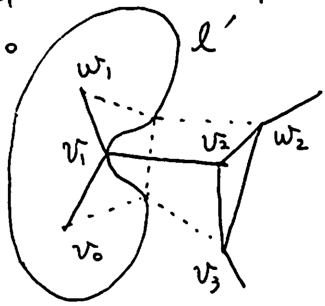
i) $v'=v_2'$のとき

$C=\{v_1', v_2'\}$



G'と、点v_1', v_2'のみと交わりG'の部分グラフを、各領域に含む平面上の単純閉曲線 ℓが存在する。

Gに対して、この閉曲線 l を isotopy で変形した閉曲線 l' を考える。

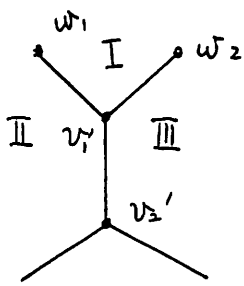


この閉曲線 l' は、G と点 v_1 のみと交わる。Gの連結度 $\leqq 1$ となり、G が 3-連結 ということに矛盾。

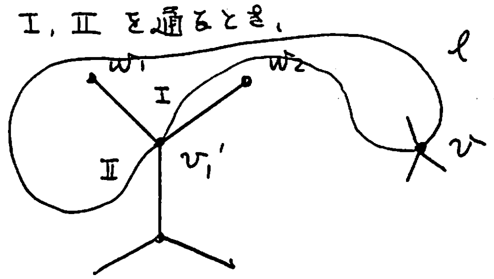
ii) $v' \neq v_2'$ のとき。

$\ell = \{v_1', v'\}$。G' とは、点 v_1', v' 以外と交わらず それぞれの領域に G' の部分グラフを含む平面上の単純閉曲線 l が存在する。点 v_1' の近傍に注目して、点 v_1' を1つの頂点とする面を下図のように

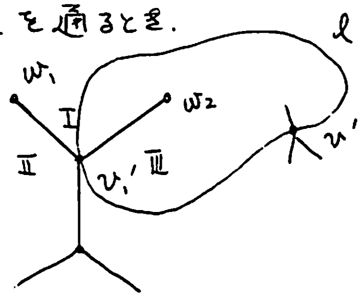
I, II, III とおく。



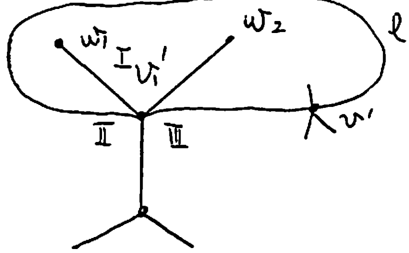
a) l が、面 I, II を通るとき。



b) l が、面 I, III を通るとき。

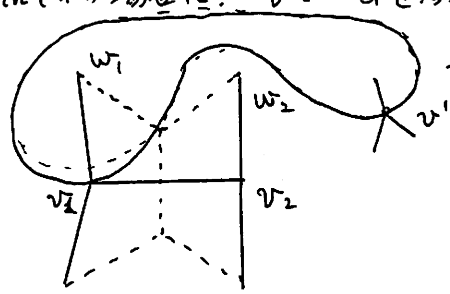


c) l が面 II, III を通るとき。



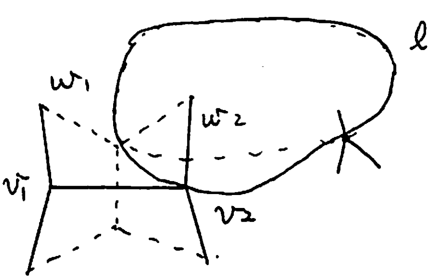
a), b), c) それぞれの場合に、もとの G を考える。

a)



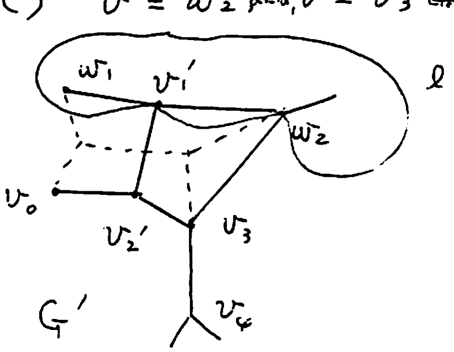
閉曲線 l を isotopy で変形した閉曲線 l' を考え、
この閉曲線 l' は、G と点 v_1, v' のみと交わる。連結度 ≤ 2
となり、G が 3-連結ということに矛盾。

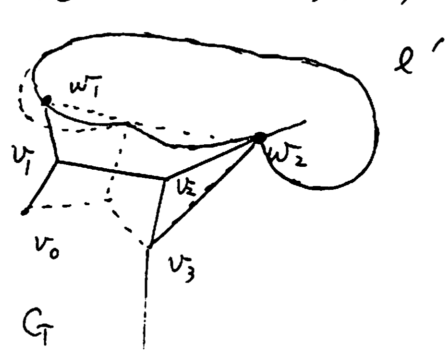
b)

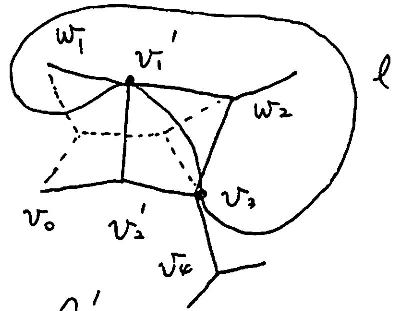


上と同様に、閉曲線 l' が考えられ、G と点 v_2, v' のみと
交わる。連結度 ≤ 2 となり、G が 3-連結ということに矛盾。

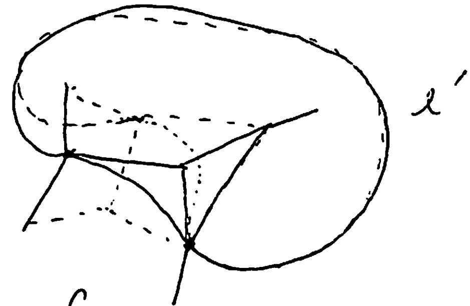
c) $v' = w_2$ 又は $v' = v_3$ を考える。($v' = v_2'$ のときはすでに考えた。)







G'

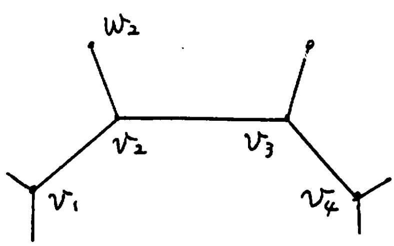


G

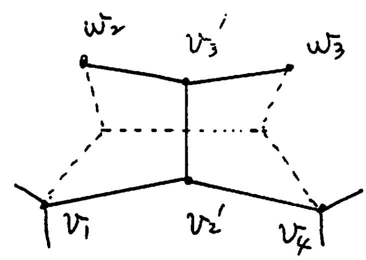
閉曲線 l を、isotopy で変形した閉曲線 l' を考え、
この閉曲線 l' は、G と 2点のみと交わる。連結度 $\leqq 2$ となり、
G が 3-連結ということに矛盾。

2) 辺 v_3v_4 が good でないとしても、1) と同様に矛盾が導かれる。

II) $v_2v_3 \in E_H(G)$ で bad であるとき。すなわち、辺 v_2v_3 に関する H-変形でできる G' は、$G \notin \mathcal{G}_n^{(3)}$、すなわち、3-連結でないとする。



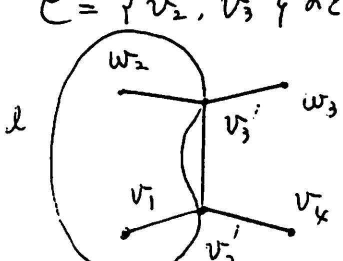
G



G'

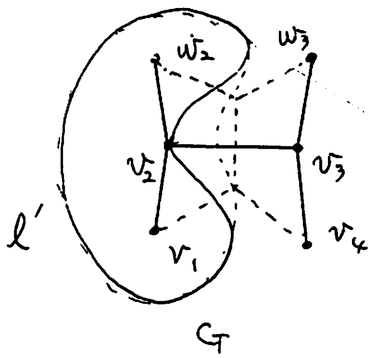
G' は、2-cut C をもつ。$C \ni v_2'$ or v_3'。さもなければ、G に、2-cut が存在し、3-連結であるということに矛盾。

$C = \{v_2', v_3'\}$ のとき、



G'

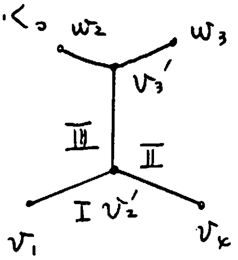
G' と点 v_2', v_3' のみと交わり G' の部分グラフを、各領域に含む平面上の単純閉曲線 l が存在する。



Gに対して、この閉曲線 l を isotopy で変形した閉曲線 l' を考える。この閉曲線 l' は、G と点 v_2 のみと交わる。
連結度 $\leqq 1$ となり、G が 3-連結ということに矛盾。

$e=\{v_2', v'\}$ $(v' \neq v_3')$ ($e=\{v_3', v'\}$ $(v' \neq v_2')$ のときも同様に)

点 v_2' の近傍を考えて、点 v_2' を頂点とする面を、下図のように
I, II, III とおく。



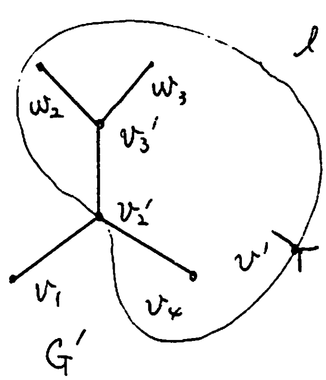
点 v_2' を通り、G′ と2点のみと交わり、G′ の部分グラフを、各領域に含む平面上の単純閉曲線 l が存在する。

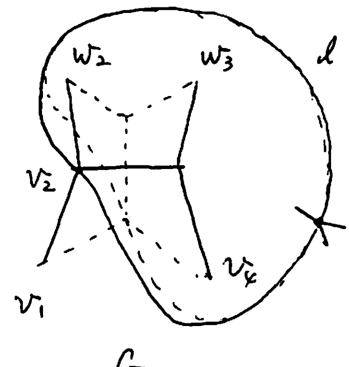
1) l が、I, III を通る場合.

2) l が、II, III を通る場合

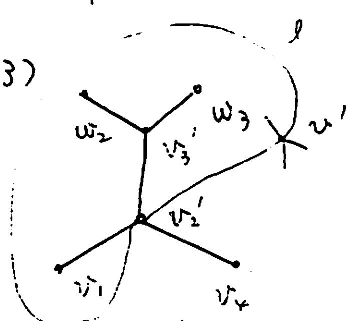
3) l が、I, II を通る場合.　それぞれ場合分けして考える。

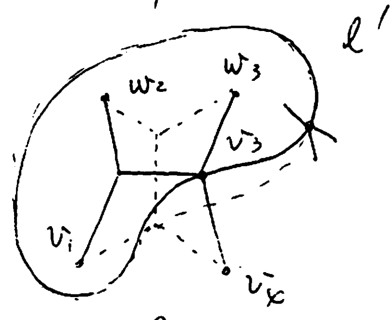
1)





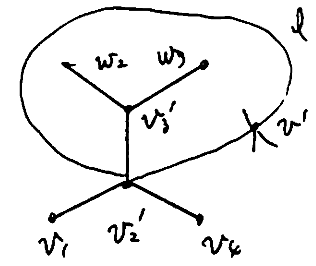
3)



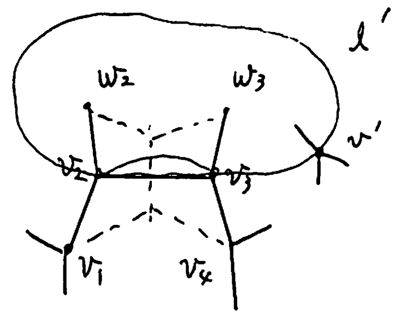


閉曲線lを、isotopyで変形した閉曲線l'を考え、
この閉曲線l'は、Gと2点のみと交わる。連結度$\leqq 2$となり、
Gが、3-連結ということに矛盾。

2).



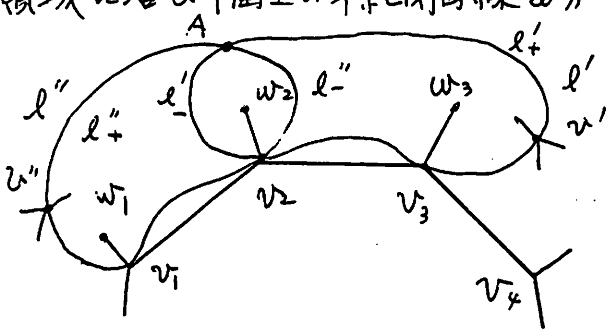
G'



G

この場合、辺v_1v_2、辺v_3v_4のどちらかがbad。たとえば、
辺v_1v_2がbadだとして(辺v_3v_4がbadだとしても同様)
矛盾を導く。

今までの議論により、Gと3点のみで交わり、Gの部分グラフを各領域に含む平面上の単純閉曲線l''が存在する。



l', l''との交点を、点Aとおく。

a) 点v', v''ともに点Aと一致しない時、

(l', l''ともに点A, v_2を除いてできる連結成分を上図のように l'_+, l'_-, l''_+, l''_- とおく)

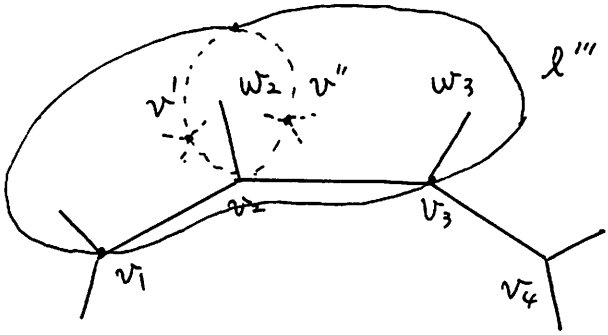
$l'_+ \ni v'$, $l''_+ \ni v''$ のとき、 $l'_- \cup l''_- \cup \{A, v_2\}$

$l'_+ \ni v'$, $l''_- \ni v''$ のとき、 $l'_- \cup l''_+ \cup \{A, v_2\}$

$l'_- \ni v'$, $l''_+ \ni v''$ のとき、 $l'_+ \cup l''_- \cup \{A, v_2\}$

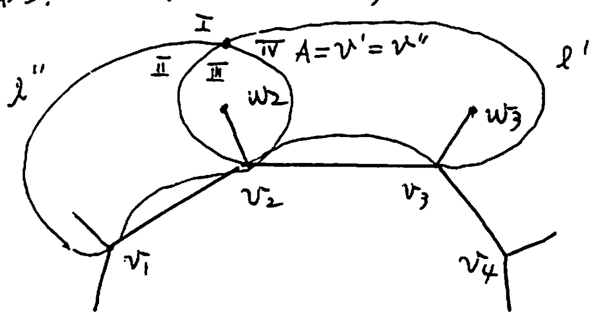
$l'_- \ni v'$, $l''_- \ni v''$ のとき、 $l'_+ \cup l''_+ \cup \{A, v_2\}$

これをisotopyで動かし、点v_2を通らないような閉曲線l'''を考える。

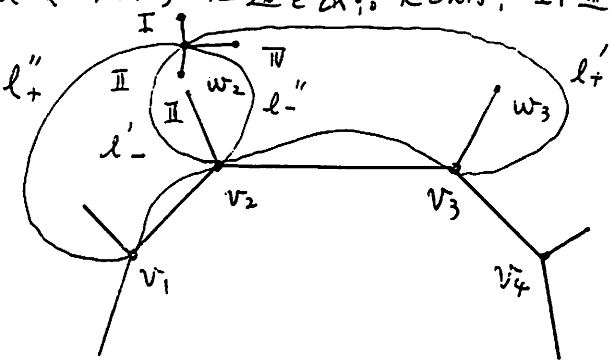


どの閉曲線も、Gとは、2点以下で交わり、Gの部分グラフを各領域に含む平面上の単純閉曲線である。
Gが3-連結であることに矛盾する。

b). v'またはv''がAと一致するとき、(この時他方もAと一致する。すなわち、$v'=v''=A$のとき)



点Aの近傍において、点Aを頂点とする領域を上図のように、
I、II、III、IVとおく。Gは、3-正則グラフだから、4つのI、II、III、IVの領域のうち、3つに辺を出す。たとえば、I、III、IV



$l'_- \cup l''_+ \cup \{A, v_2\}$を考えて、isotopyで少し動かすと、
Gとは1点のみで交わり、Gを2つの部分に分ける単純閉曲線が得られる。Gが3-連結であることに矛盾する。

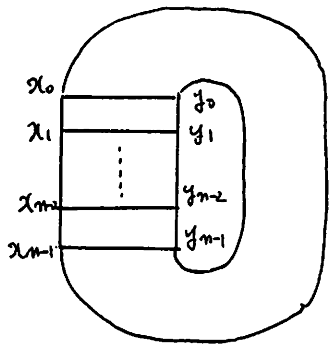
定義4.

$L_n \in \mathcal{G}_n^{(3)}$ について,

L_n: 梯形グラフ

$\Leftrightarrow$ $V(L_n) = \{x_i, y_i \mid 0 \leqq i \leqq n-1\}$

$E(L_n) = \{x_i y_i, x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1} \mid 0 \leqq i \leqq n-1$, 添字は $\bmod n\}$



L_n

$\tilde{L}_n$; 梯形 $\Leftrightarrow$ $\tilde{L}_n$は, L_nから辺$x_0 x_{n-1}$, 辺$y_0 y_{n-1}$を除いたグラフ

この$\tilde{L}_n$を, $x_0 x_1 \cdots x_{n-1} y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_0$ と表現する。

定理1 (標準化定理)

$G \in \mathcal{G}_n^{(3)}$に対して, Gは, $\mathcal{G}_n^{(3)}$の中で, H-変形により, 梯形L_n ($\mathcal{G}_n^{(3)}$の標準形)に変形できる。

証明

v: Gの頂点数, e; Gの辺数, f; Gの面数とおく。

オイラーの公式 $v - e + f = 2$ が成り立つ。

この式を変形して.

p_i: Gのi角形の個数とおく。

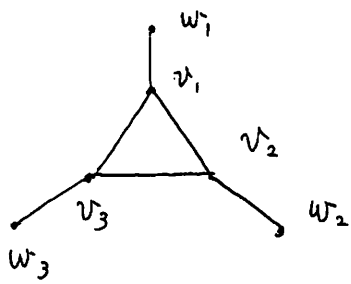
$$\sum_{i=3}^{n} (6-i) p_i = 12$$

すなわち.

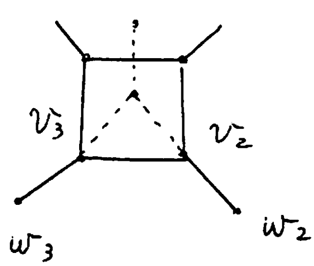
$$3p_3 + 2p_4 + p_5 - (p_7 + \cdots + (n-6)p_n) = 12 \cdots ①$$

①より、p_3, p_4, p_5 どれか少なくとも1つは正である。従って、
Gに4角形がなければ、3角形または5角形が、少なくとも1つある。
Gに4角形の面があれば、その4角形を $x_0x_1y_1y_0$ とする。
なければ、3角形または5角形の面 R_1 に注目する。

R_1＝3角形の場合

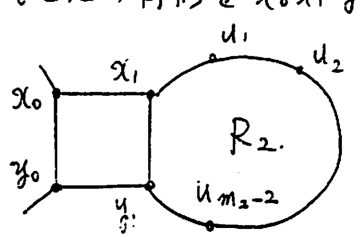


その3角形を $v_1v_2v_3$ として、各頂点 v_1, v_2, v_3 それぞれに隣接する点を w_1, w_2, w_3 とする。
辺 w_iv_i についてH－変形を行なえば、4角形ができる。
たとえば、辺 w_1v_1 について



R_1＝5角形の場合。補題1により、3－連結性をくずさずに R_1 の辺の数を、1つ減らせる。

R_1＝3角形、5角形ともに、Gからこの変形でできたグラフを G_1 とする。できた4角形を $x_0x_1y_1y_0$ とおく。

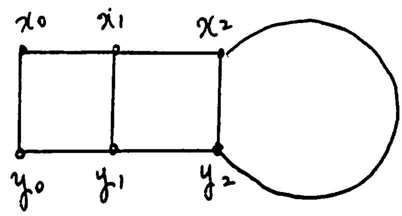


この4角形と辺 x_1y_1 を共有する面を R_2 とおく。$R_2 = x_1u_1u_2 \cdots u_{m_2-2}y_1$ とおく。R_2 は高々 $2n-2$ 角形である。すなわち、$m_2 \leq 2n-2$。

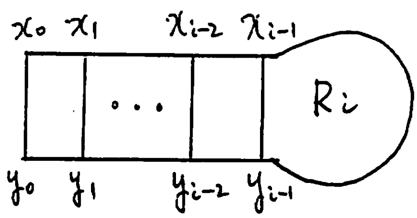
(52)

$m_2=4$の時、すなわち、R_2が4角形の時は，H-変形を行なわない。
$u_1=x_2$，$u_2=y_2$とおく。

$m_2\geq 5$の時，補題1より，R_2の周上に辺x_1y_1，x_1u_1，$u_{m_2-2}y_1$以外のGoodな辺eが存在する。その辺に関してH-変形を施す。1つ辺数の減った面もR_2と呼ぶ。R_2が4角形になるまで，この操作を繰り返す。4角形を$x_1x_2y_2y_1$とおく。



4角形にするまで必要なH-変形の回数は，m_2-4回である。
グラフG_2は，梯形$x_0x_1x_2y_2y_1y_0$を含む。
以下この操作をくり返す。
グラフG_{i-1}が$\tilde{L}_i = x_0x_1\cdots x_{i-1}y_{i-1}\cdots y_0$を含むまで変形が行なわれたとする。4角形$x_{i-2}x_{i-1}y_{i-1}y_{i-2}$と辺$x_{i-1}y_{i-1}$を共有する面を$R_i$とする。$R_i=x_{i-1}u_1^{(i)}\cdots u_{m_i-2}^{(i)}y_{i-1}$とおく。



R_iは高々$2n-2(i-1)$角形である。すなわち，$m_i\leq 2n-2i+2$。
$m_i=4$，すなわち，R_iが4角形の時は変形を行なわない。
$u_1^{(i)}=x_i$，$u_2^{(i)}=y_i$とおく。

$m_i\geq 5$の時，補題1より，R_iの周上に辺$x_{i-1}y_{i-1}$，$x_{i-1}u_1^{(i)}$，$u_{m_i-2}^{(i)}y_{i-1}$以外のGoodな辺eが存在する。その辺に関して，H-変形を施す。1つ辺数の減った面もR_iと呼ぶ。R_iが4角形になるまで，この操作を繰り返す。できた4角形を$x_{i-1}x_iy_iy_{i-1}$とおく。4角形にするまでに必要なH-変形の回数は，m_i-4回である。

G_{i-1} からこの変形でできるグラフを G_i とおく。グラフ G_i は梯形 $\tilde{L}_{i+1} = x_0 x_1 \cdots x_i y_i y_{i-1} \cdots y_0$ を含む。

この操作を繰り返し，$G_{n-1} \in \mathcal{G}_n^{(3)}$ が，$\tilde{L}_n$ を含むとする。G_{n-1} は，3-正則平面グラフだから，これが形めている梯形グラフ L_n である。G を $\mathcal{G}_n^{(3)}$ の中で，L_n に変形するのに必要なH-変形の回数は，

$$
\begin{aligned}
&1 + (m_2 - 4) + (m_3 - 4) + \cdots + (m_{n-1} - 4)\\
&\leqq 1 + (2n-2-4) + \cdots + \{2n - 2(i-1) - 4\} + \cdots + \{2n - 2(n-2) - 4\}\\
&= 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \{2n - 2(i-1) - 4\}\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n-2} (2n - 2i - 4)\\
&= 1 + 2n(n-2) - 2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 4(n-2)\\
&= n^2 - 5n + 7
\end{aligned}
$$

系 1.
$\mathcal{G}_n^{(3)} \ni G, G'$ に対して，
G は $\mathcal{G}_n^{(3)}$ の中で，G' に変形できる。

2. H-距離

定理1の系1により，次のような距離が定義できる。$\mathcal{G}_n^{(3)} \ni G, G'$ に対して，

$$d(G, G') := G \text{ を，} \mathcal{G}_n^{(3)} \text{ の中で } G' \text{ に変形するのに必要なH-変形の最小回数}$$

この距離をH-距離という。$\mathcal{G}_n^{(3)}$ の直径 $:= \max_{G, G' \in \mathcal{G}_n^{(3)}} d(G, G')$ を評価したい。

次の定理が成り立つ。

定理 2

$D(\mathcal{G}_n^{(3)})$: H-距離に関する直径

$D(\mathcal{G}_n^{(3)}) \leqq 2(n^2-5n+7) \quad (n \geqq 3)$

証明

$G, G' \in \mathcal{G}_n^{(3)}$ に対して，梯形グラフ L_n を考えると，

$$d(G, G') \leqq d(G, L_n) + d(G', L_n)$$
$$\leqq 2(n^2-5n+7) \quad (\text{定理1より})$$

Reference

[1] H. Komuro : 3-正則グラフの集合の距離づけ
箱根セミナ記録 '91. p21 ~ p31