

3-正則グラフの集合の距離づけ

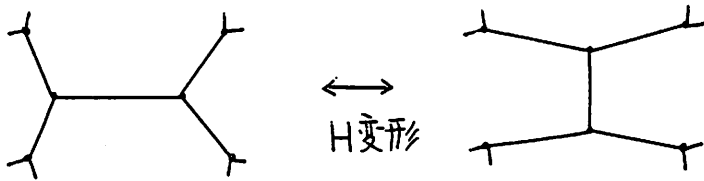
小室 秀 雄
(埼玉県立川越南高)

$\mathcal{G}_n = \{ \text{頂点数 } 2n, \text{ planar, 3-regular, connected, loop \& multiple edge \& graph } G \} (n \geq 3)$

について考える。

性質; planar, connected, loop \& multiple edge \& を性質 E という。

$\mathcal{G}_n \ni G$ に対して, "H-変形" という変形を定義する。
 G の 6 点に注目して。



次の Proposition を証明することか; この論文の目的です。

Proposition

$\forall n (n \geq 3), \forall G, G' \in \mathcal{G}_n$ に対して。

$d(G, G') \equiv G$ を G' に変形するのに必要な H 変形の最小回数か。
 \mathcal{G}_n に距離を定義する。

証明

距離になるための条件

$$2) d(G, G') = d(G', G)$$

$$3) d(G, G'') \leq d(G, G') + d(G', G'')$$

$d(G, G')$ の定義より, 明らかに成り立つ。

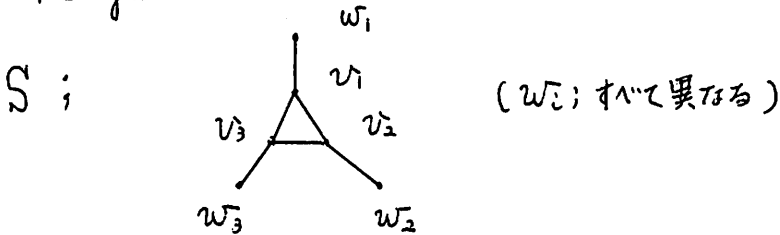
従って, Proposition を証明するには。

1) $\forall G, G' \in \mathcal{G}_m$ に対して, $d(G, G')$ が定義される。
 を示せばよい。

証明には, 次の lemma を使う。

lemma

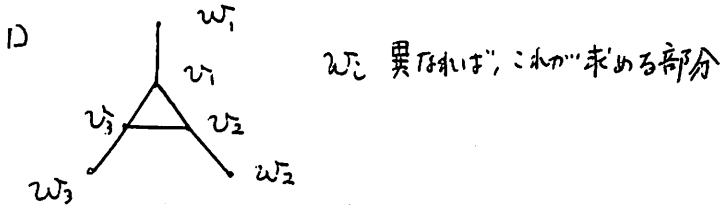
$\forall G \in \mathcal{G}_m$ は, 何回かの H 変形で,



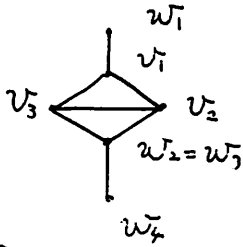
を含む 1 本の $\tilde{G} \in \mathcal{G}_m$ に変形できる。

証明

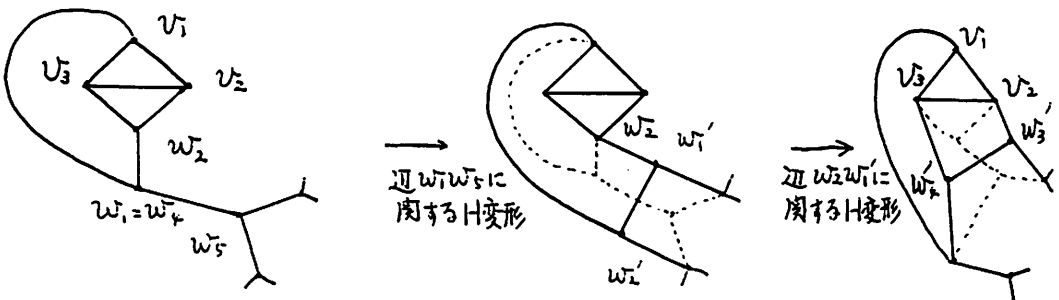
I. 三角形を領域として持つ場合



2) w_i のうち 2 つが一致する場合
 たとえば, $w_2 = w_3$ の時.

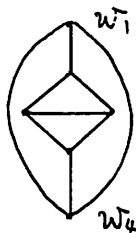


① $w_1 = w_4$ の時

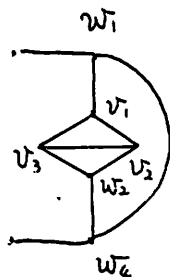


三角形 $v_1 v_2 v_3$ が求める部分に存在している。

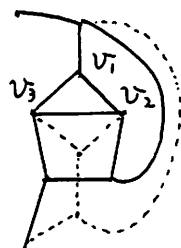
② $w_1 \neq w_4$ の時



この場合は, multiple edge だしに反する。



辺 $w_2 w_4$ に関する H変形

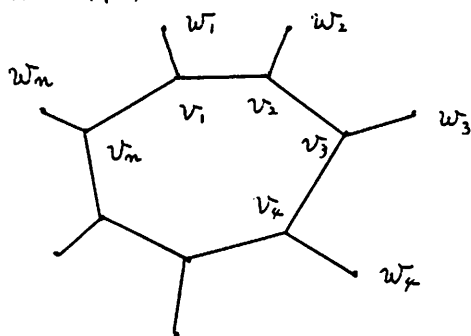


$\Delta v_1 v_2 v_3$ が求める部分に存在している。

点 w_1, w_4 が結ばれている場合も同様にする。

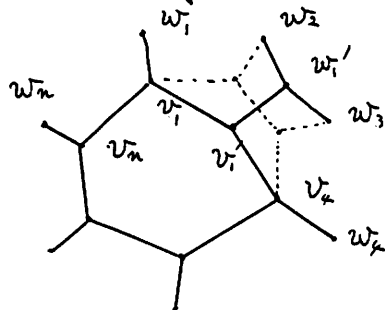
II 三角形を領域としてもたない場合

ある n 角形に注目する。



1) w_i が互いに異なる場合

辺 $v_2 v_3$ に関する H変形を行なう。



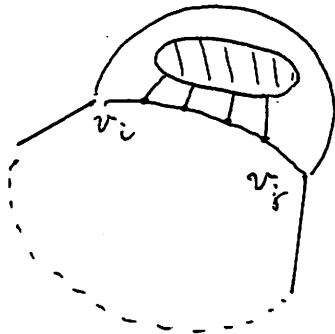
点 w_1' , 点 w_2 が互いに異なる。次に, 辺 $v_1' v_2$ に関する H変形を行なう。

このような操作をくり返すと, 注目していた n 角形は, どんどん辺の数を減らして行く。最後に, 求める部分が出てくる。

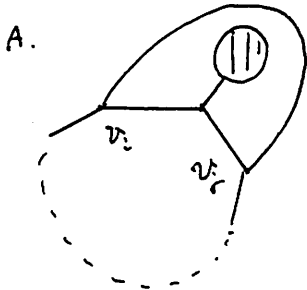
(24)

2) v_i, v_j が 辺で結ばれた
 又は

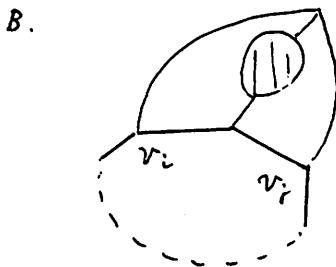
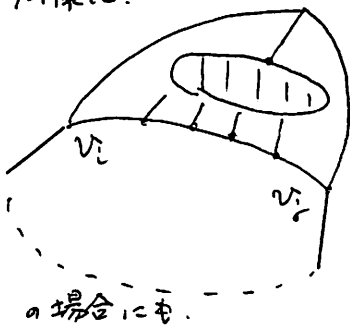
w_i, w_j が一致する場合
 (w_i, w_j と同じ向きでない。同じ向きだと三角形になる。)



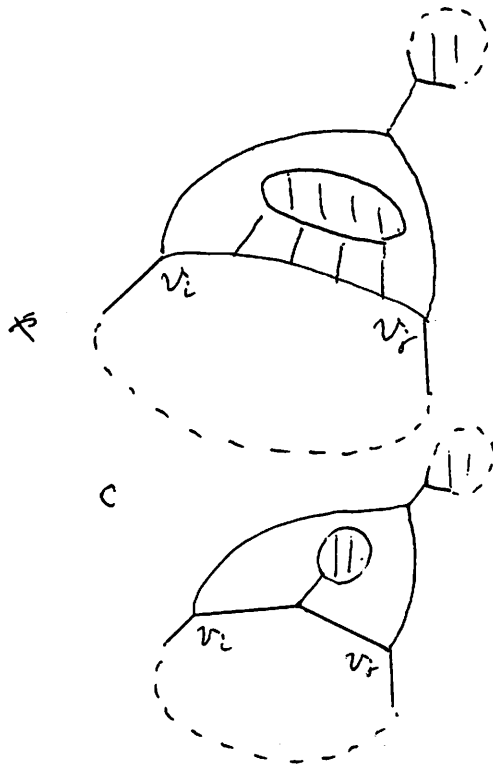
左図のように n 角形の境界にある
 path $v_i - v_j$ にある辺に関して
 H変形を繰り返すことにより、
 A に変形できる。



同様に

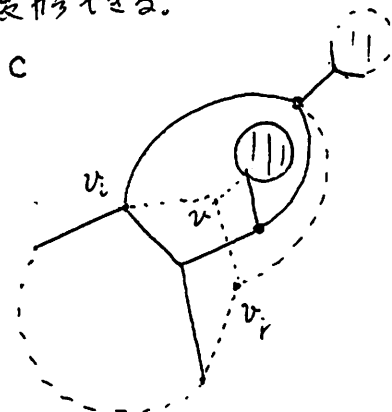
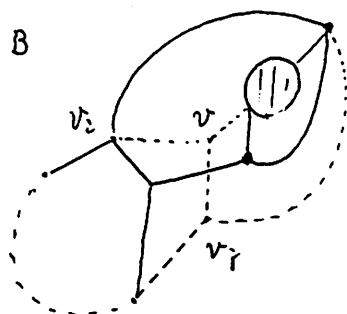


に変形できる。



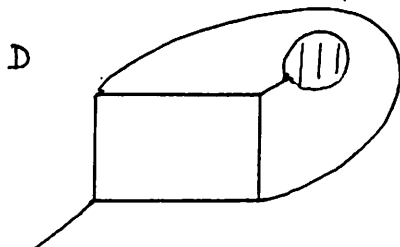
B, C はそれぞれ、図のように辺 v_i (または辺 v_j) に属する H 変形におこ、

1) w_i すべて互いに異なる場合に変形させる。





A について考えればよい。

A の m 角形に対応する部分の辺の数を減らすように H 変形を行なう。



左図のような状態になる。

 の部分に、三角形の領域
 があれば、I の場合だから懸念は
 成り立つ。

 に対して、同様の操作を行なう。すなわち、innermost な m 角形に注目し、上で行なってきた操作を行なう。 m 角形のある頂点か辺で結ばれていれば、また、D のような状態が出てくる。考えているグラフは、有限グラフであるから、このような操作無限にくり返されない。

すなわち、頂点か辺で結ばれていないような innermost な m 角形が存在する。または、注目して辺数を減らしてきた図形が三角形になっている。

それぞれ、II 1), I にさらやくされます。

Propositionの証明

□ $\forall G, G' \in \mathcal{G}_m$ に対して、何回かのH変形により、

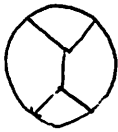
G から $G' \wedge$ 移り合う点 $\dots \ast_m$

を示せばよい。

数学的帰納法で証明する。

$m=3$ の時

$\mathcal{G}_3 = \{ \text{図} \}$ 対称的。 \mathcal{G}_3 は ただ1つのグラフ



だけから成る。従って、 \ast_3 が成り立つ。

$m=k-1$ ($k \geq 4$) の時

\ast_m が成り立つと仮定する。

$m=k$ の時

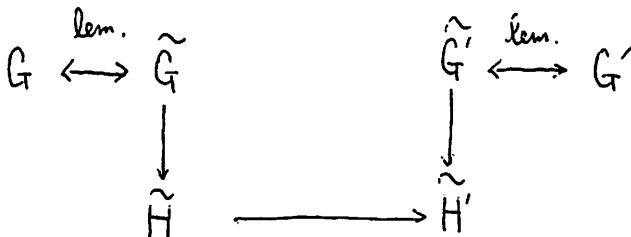
\tilde{G}, \tilde{G}' ; lemmaで保証される G, G' からH変形によって得られる部分 S を含むグラフ。

\tilde{G}/Δ は、 \tilde{G} の lemmaで保証される三角形を一点に縮約した

グラフを表す。

$\hat{H} = \tilde{G}/\Delta$, $\hat{H}' = \tilde{G}'/\Delta$ とおく。

$\hat{H}, \hat{H}' \in \mathcal{G}_{k-1}$ (対称的, 三角形を一点に縮約する事は、 \mathcal{G}_m の条件をくすくす、頂点数が2だけ減る。)



\tilde{H} から \tilde{H}' への H 変形による変形から, \tilde{G} から \tilde{G}' への H 変形による変形を構成する.

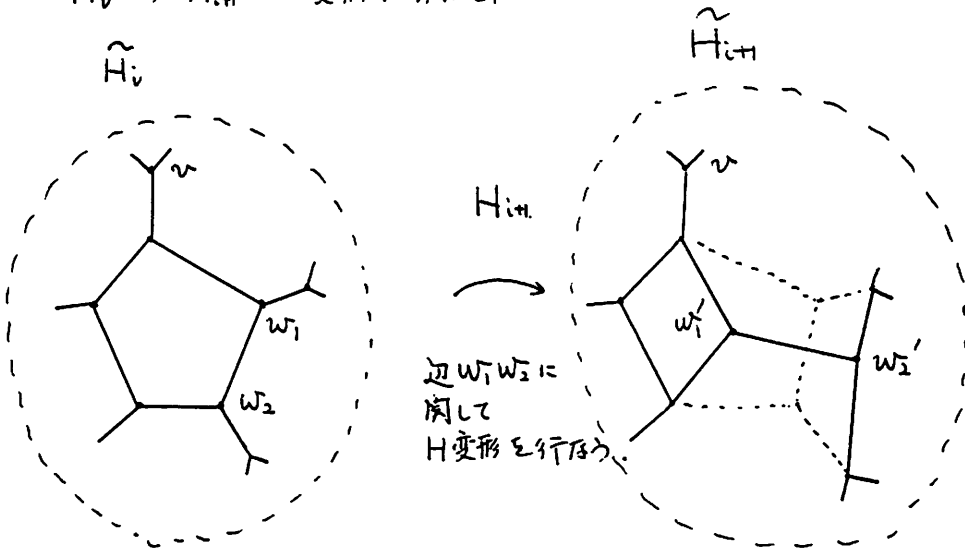
仮定より, $*$ R_1 が成り立つから,

$$\tilde{H} \xrightarrow{H_1} \tilde{H}_1 \xrightarrow{H_2} \tilde{H}_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{H_m} \tilde{H}_m = \tilde{H}' \quad \text{のように}$$

\tilde{H} から \tilde{H}' へ変形させる H 変形の列 $\{H_i\}$ が存在する.

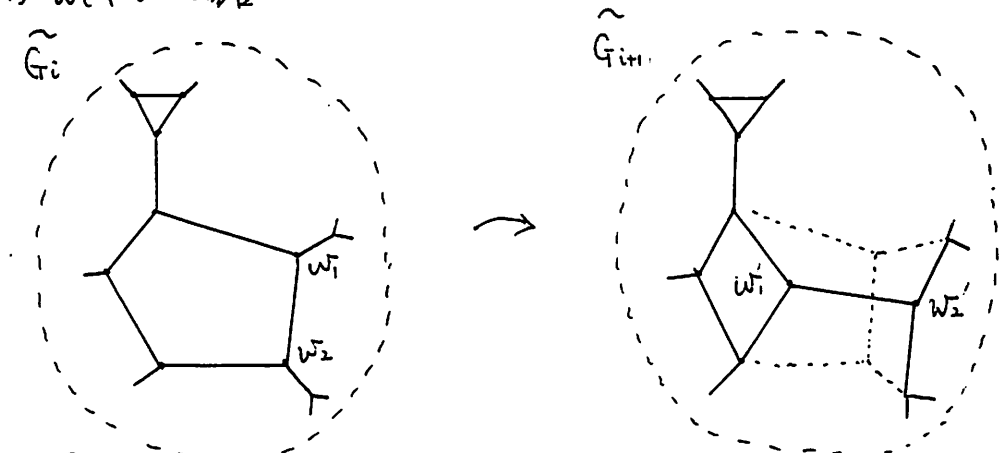
\tilde{H} で三角形が縮約された頂点, または, その頂点から H 変形で移された先の頂点を v とする.

\tilde{H}_i から \tilde{H}_{i+1} への変形において,



\tilde{H}_i の v を三角形にもとじたグラフを \tilde{G}_i とする.

1) w_i が v の場合



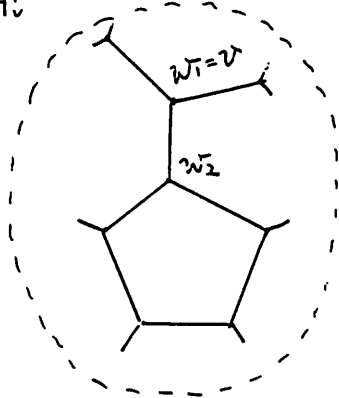
\tilde{G}_i は, \tilde{G}_{i+1} へ 辺 w_1, w_2 に関して H 変形で行なわれる.

(28)

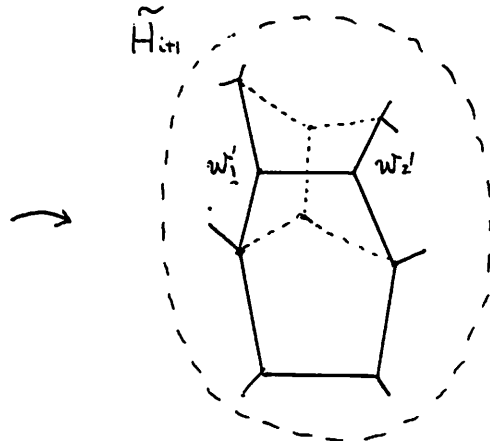
2) $w_1 = v_1$ または $w_2 = v_2$ の場合
 たとえば

$w_1 = v_1$ の時

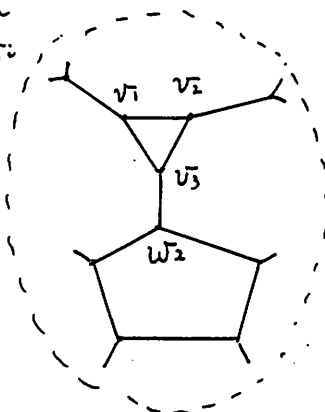
\tilde{H}_i



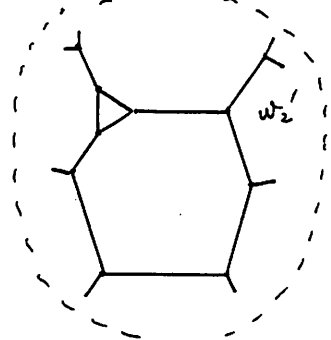
\tilde{H}_{i+1}



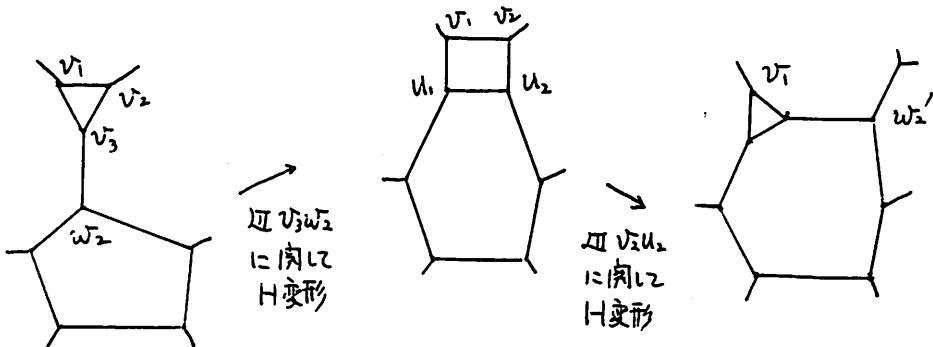
\tilde{G}_i



\tilde{G}_{i+1} は $w_1' = v_1$ ($w_2' = v_2$ も同様に
 証明できる) とすると



\tilde{G}_i から \tilde{G}_{i+1} へ H 変形 でどのように変形 できるか。



辺 v_3w_2 に沿って H 変形, 辺 v_2u_2 に沿って H 変形 を続けると

\tilde{G}_i から \tilde{G}_{i+1} へ 変形 できる。

従って、 \tilde{G}_i から \tilde{G}_{i+1} へ、H変形によって変形できることが示された。

$$\tilde{H} \xrightarrow{H_1} \tilde{H}_1 \xrightarrow{H_2} \tilde{H}_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{H_m} \tilde{H}_m = \tilde{H}'$$

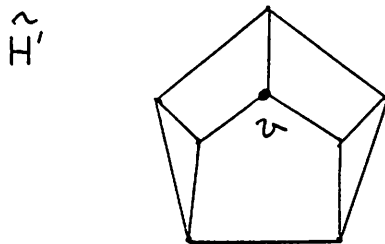
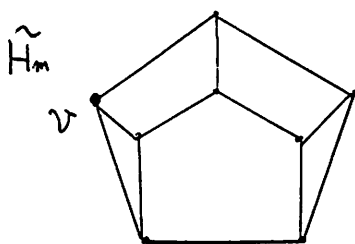
に対し、

$$\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{G}_m \quad \text{存在 H変形による変形列}$$

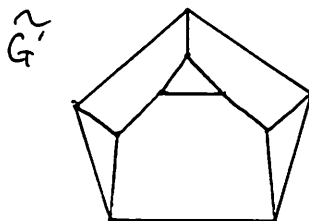
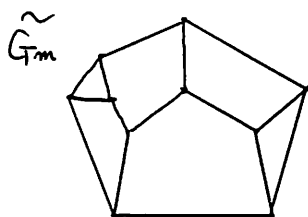
構成された。

\tilde{H}_m と \tilde{H}' とはグラフとしては同じでも、三角形が縮約されて得られる頂点の位置がずれている可能性がある。

たとえば、



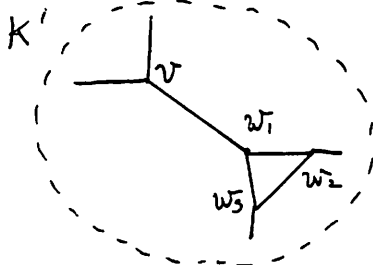
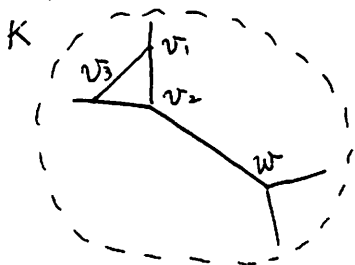
\tilde{H}_m, \tilde{H}' に対して、 \tilde{G}_m, \tilde{G}' は、



すなわち、 \tilde{G}_m と \tilde{G}' とは、ある Δ を縮約すると同じグラフだから、三角形の位置が異なる可能性がある。 \tilde{G}_m から H変形で \tilde{G}' に変形できることを示せば、Proposition が証明されたことになる。

「 \tilde{G}_m から H変形で \tilde{G}' に変形できる」ことを示すには、

下の K から K' に H変形で変形できることを示せばよい。



辺 $v_2 w$ に関して、次に、辺 $v_1 v_3$ に関して H 変形を行なえば、
 K は、 K' の変形である。

これによつて、 \hat{G}_m から H 変形で \hat{G}' に変形できることが示されたことになる。

$$G \xrightarrow{\text{lem.}} \hat{G} \rightarrow \hat{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \hat{G}_m \xrightarrow{\text{lem.}} \hat{G}' \rightarrow G'$$

従つて、 G は H 変形で G' の変形である。すなわち、 $*$ が成り立つ。

以上より、 $M \ni$ なる自然数 m に対して、 $*$ m すなわち、

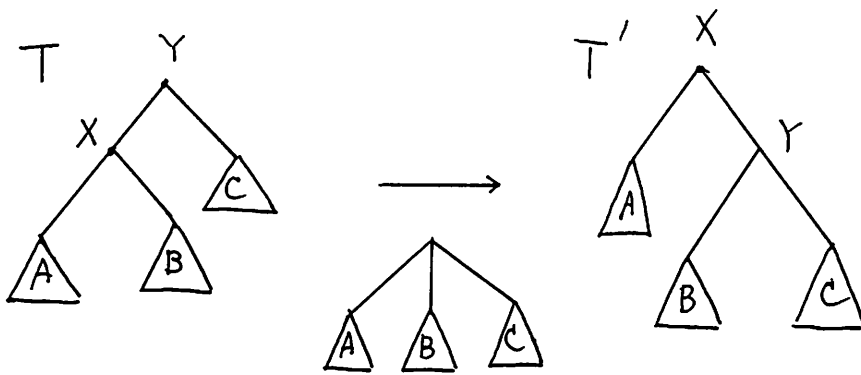
□ $\forall G, G' \in \mathcal{G}_m$ に対して、何回かの H 変形により、
 G から G' の変形が成り立つ。

以上で、Proposition は証明されました。次に、このような Proposition を考えたかという背景を説明します。

著者のこれまでの研究対象は、closed 3次元多様体でした。閉 3次元多様体の表現方法として、DS-diagram があります。DS-diagram は、 S^2 上の 3-正則グラフで、面、辺、頂点がある条件で同一視が指定されたものです。[1]

「DS-diagram の 3-正則グラフと閉 3次元多様体との関係を明らかにする」を、1つの研究目標としています。そこで、とりあえず 3-正則グラフの性質を調べたいという願望から、今回の仕事になりました。もう一つの動機として、D. D. Sleator, R. E. Tarjan, W. P. Thurston の論文 [2] があります。

この論文は、
 a binary tree に、"rotation" という変形を定義し、
 2つの binary trees 間に互いに変形するのに必要な rotation の最小回数として、"rotation distance" を定義します。



a binary tree T を a binary tree T' に変形する変形を,
 "rotation at X " と定義する。 (\triangle は部分 tree)

a binary tree の頂点を, a node と呼ぶ。 degree 2 の頂点を
 a inner node とし、その個数が n 個の a binary tree を考える。
 (n -node binary tree)
 彼らは、

問題

the maximum rotation distance between any pair of
 n -node binary tree は何か。

すなわち, $\mathcal{I}_n = \{ n\text{-node binary tree } \}$ の直径は何か。

を考えて、この問題を解決した。

定理

a diameter of $\mathcal{I}_n = 2n - 6$ ($n > 12$)

を証明した。

このように、ある性質をみたすグラフの集合を考え、その集合に距離
 を導入し、直径を求める事か、1つの研究方向がある。これを、
 \mathcal{I}_n について考えてみました。

[1] H. Ikeda and Y. Inoue, Invitation to DS-diagrams,
 Kobe J. Math., 2 (1985), 169~186

[2] D.D. Sleator, R.E. Tarjan and W. P. Thurston,
 Rotation distance, Triangulations, and
 hyperbolic geometry
 Journal of the American Math. Soc.,
 1 (1988) number 3, 647~681
 "