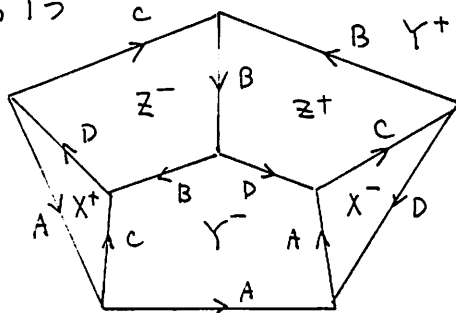


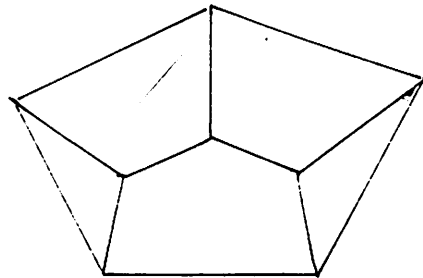
3-regular graph と 3次元多様体 について

小室 秀 雄
(埼玉県立川越南高)

この研究の動機は、池田・井上 [1] にある 3次元多様体の DS-diagram の一つ



に対して、同一視を無視すると、



3-regular graph (頂点の degree = 3 の graph) が対応するわけです。

このような 3-regular graph と 3次元多様体との関係は、どのようにになっているのだろうか考えた事です。今回の発表では、

命題 ある 3-regular graph に対するある操作が、
3次元多様体の Dehn surgery に対応する。

を示します。

(48)

§1 3-regular graph のある定理

§2 3-regular graph と 3次元多面体との関係.

DS-diagram については. [1] を参照して下さい.

§1

3-regular graph に対して. 次のような式が成り立ちます.

G ; planar, simple (11-70: 多重辺なし)
connected, 3-regular graph

P_k ; G の k 角形の領域の個数
(ただし. 外側の領域も数える)

$$\sum_{k=3}^n (6-k)P_k = 12 \quad \dots \dots \dots * \quad (n = \text{最多多角形の辺の数})$$

この式は. オイラーの公式から簡単に求まる.

よして. 次のような定理が成り立ちます.

Schlegel's Th [2]

* をみたす 非負整数 $P_3, P_4, P_5, P_7, \dots, P_m$ に対して.

\exists a simple polyhedron P s.t. $f_k(P)$ (= P の k 角形の側面の個数) = P_k ($k \geq 3, k \neq 6$)

(a simple polyhedron とは. 各頂点の degree (各頂点にあつまる辺の数) = 3 である polyhedron)

Schlegel's Th の証明は. ある適当な数の 6 角形を使って. P を作っています.

どのような P_6 の値に対しても. polyhedron P が存在するのかわりについては. Schlegel's Th は何の情報も与えていない.

P の1つの側面を応用して、平面に埋め込めば、3-regular graph G が得られるから、与えられた P_6 の値に対して 3-regular graph G が存在するかどうかという問題が考えられる。

この問題に対して、私は、まず、問題を簡単にするために、

$P_k = 0 (k \geq 7)$ の場合について考えました。

$$\sum_{k=3}^m (6-k) P_k = 12 \text{ は、 } \sum_{k=3}^5 (6-k) P_k = 12$$

$$\text{すなわち、 } 3P_3 + 2P_4 + P_5 = 12 \dots\dots\dots *$$

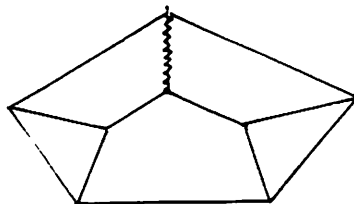
*をみたす (P_3, P_4, P_5) は 次の19通りです。

	P_3, P_4, P_5		P_3, P_4, P_5		P_3, P_4, P_5
①	4 0 0	⑧	1 4 1	⑮	0 4 4
②	3 1 1	⑨	1 3 3	⑯	0 3 6
③	3 0 3	⑩	1 2 5	⑰	0 2 8
④	2 3 0	⑪	1 1 7	⑱	0 1 10
⑤	2 2 2	⑫	1 0 9	⑲	0 0 12
⑥	2 1 4	⑬	0 6 0		
⑦	2 0 6	⑭	0 5 2		

② P_3, P_4, P_5 2, 2, 2 の場合

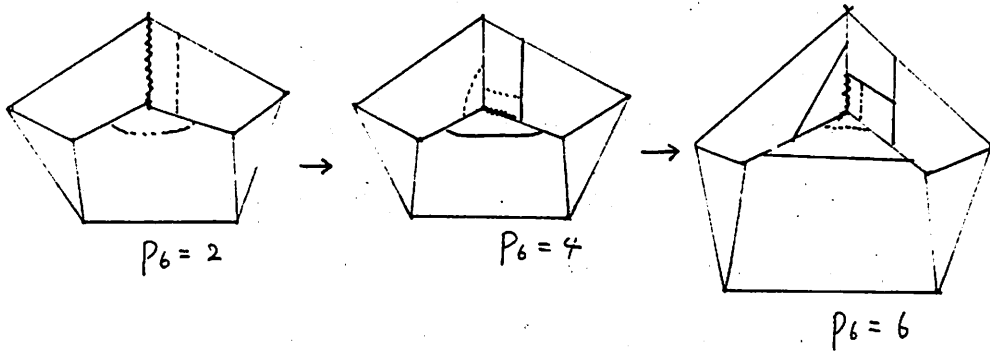
まず、 P_3, P_4, P_5, P_6 をみたす 3-regular graph G を

みつける。



この graph に、4角形同志がとまり合う辺“ $\{$ ”に注目して、次のような操作をくり返します。

(50)



→

すなわち、 $P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6$ (m 0以上の整数)
 $2 \quad 2 \quad 2 \quad 2m$

に対して、3-regular graph G は存在する。

このような事を研究している時、横浜国大、教. 根上氏から、[3]を知せていただいた。同じような事を研究しているようにとのことでした。調べてみると、実は、次のような定理が証明されていました。

定理 (B. Grünbaum , T.S. Motzkin , J. Malkevitch)

a simple polyhedron かつ、19の各場合に、次のような P_6 の値に対して存在する。

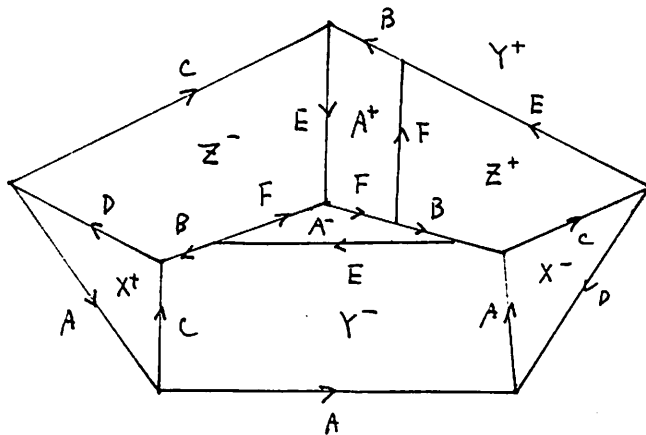
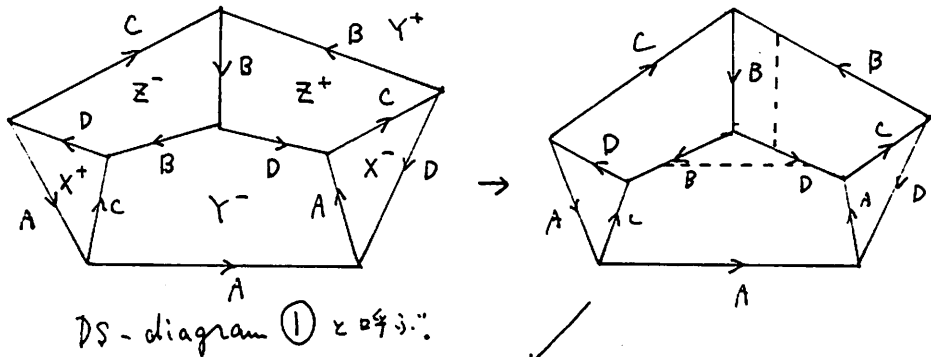
	P_3	P_4	P_5	P_6 の可能値		P_3	P_4	P_5	P_6 の可能値
1	4	0	0	0, 4以上の偶数	14	0	5	2	0, 2, 3以上の自然数
2	3	1	1	3以上の奇数	15	0	4	4	0以上の整数
3	3	0	3	1, 3, 5以上の自然数	16	0	3	6	"
4	2	3	0	0, 2, 4, 5, 6, 8, ...	17	0	2	8	"
5	2	2	2	0以上の整数	18	0	1	10	2, 3, 4以上の自然数
6	2	1	4	自然数	19	0	0	12	0, 2, 3以上の自然数
7	2	0	6	0, 2, 3以上の自然数					
8	1	4	1	2, 3, 4以上の自然数					
9	1	3	3	0以上の整数					
10	1	2	5	自然数					
11	1	1	7	2, 3以上の自然数					
12	1	0	9	3, 5, 6以上の自然数					
13	0	6	0	0, 2, 3以上の自然数					

この定理は、数名の人の仕事をまとめるという存在だけ。[3]に書いてあり、証明については確認していません。

私が考えた p_0 を増す操作は、DS-diagram において、どのような現象をおこしているのか考えてみました。

§ 2 .

[1]における DS-diagram (2-9)



DS-diagram ① の 3次元多様体 M_1 と、DS-diagram ② の 3次元多様体 M_2 との関係を探っている。 M_1 は 3-ball D^3 を、表面に描かれた DS-diagram ① に指定された同一視によって、同一視することによって得られる。
 M_2 は、3-ball B^3 を、表面に描かれた DS-diagram ② に指定された同一視によって、同一視することによって得られる。

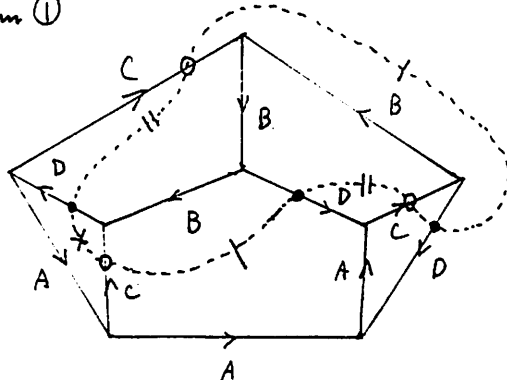
(52)

それぞれ99様体について.

2-disk $D^2 \subset B^3$ s.t $D^2 \cap \partial B^3 = \partial D^2$

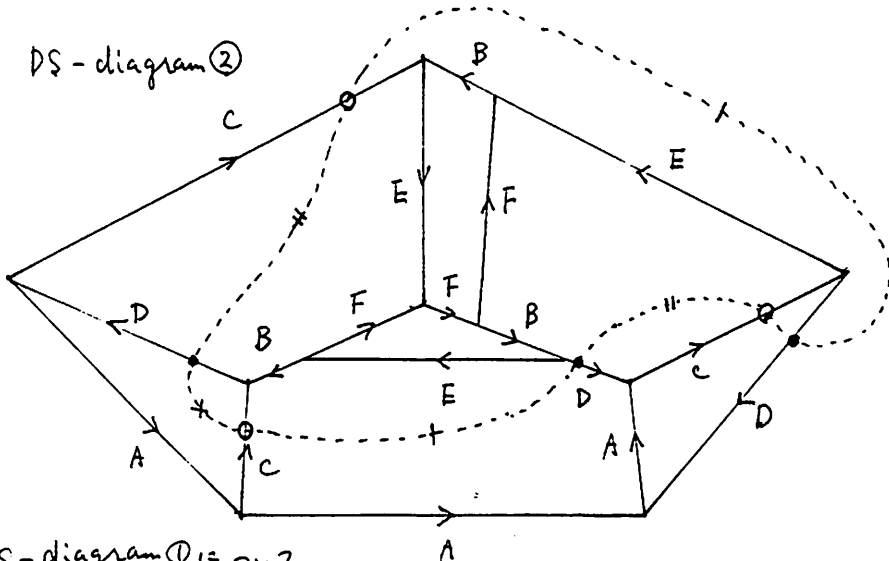
これ. ∂D^2 がF図の
のようになる.

DS-diagram ①



isotopyで. を動かすことにより. 辺 $---||---$, $---+---$, $---x---$
頂点 \circ, \bullet が同一視されるようにすると. D^2 は. 同一視により. closed
surface になる. 各行-数を計算することにより. genus 1 の Torus
となること分る.

DS-diagram ②



DS-diagram ①により.

B^3 を D^2 で分割した \xrightarrow{A} を含む部分を B_-^3 , \xrightarrow{B} を含む
部分を B_+^3 と表す. B_-^3 を DS-diagram ①で同一視したものを
 B_-^3 / \sim , B_+^3 を DS-diagram ①で同一視したものを
 B_+^3 / \sim と表す. それぞれ genus 1 の solid torus である.

M_1^3 は、2つの solid torus を表面で貼り合せた形である。

DS-diagram ② について。

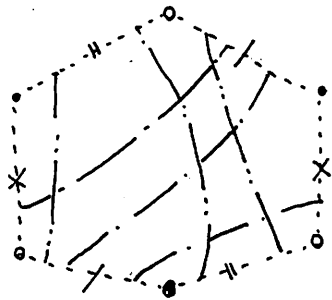
B_-^3 を DS-diagram ② の同視したものを $B_-^3/\sim_{\text{②}}$ 、 B_+^3 を DS-diagram ② の同視したものを $B_+^3/\sim_{\text{②}}$ で表す。

それぞれ genus 1 の solid torus である。

$B_-^3/\sim_{\text{①}}$ 、 $B_+^3/\sim_{\text{①}}$ のそれぞれ meridians の boundary かつ $D^2/\sim_{\text{①}}$ 上でのようになっているかを考える。同様に、 $B_-^3/\sim_{\text{②}}$ 、 $B_+^3/\sim_{\text{②}}$ のそれぞれ meridians の boundary かつ $D^2/\sim_{\text{②}}$ 上でのようになっているかを考える。

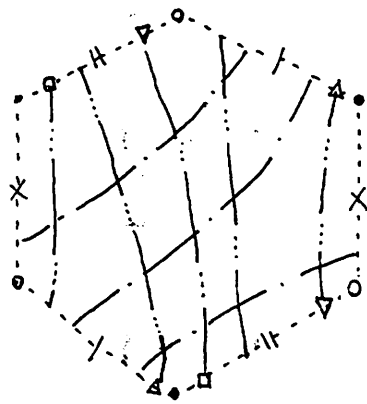
$B_-^3/\sim_{\text{①}}$ の meridian curve —

$B_+^3/\sim_{\text{①}}$ の meridian curve —



$B_-^3/\sim_{\text{②}}$ の meridian curve —

$B_+^3/\sim_{\text{②}}$ の meridian curve —



(54)

torus 上の simple closed curve $\dots\dots\dots$ を.

simple closed curve $\dots\dots\dots$ にはるようには.

B^3/\sim と B^3/\sim の見合せを、 $B^3/\textcircled{\sim}$ と $B^3/\textcircled{\sim}$ の見合せに変えたわけでは。 Dehn surgery に行っています。

命題 ある 3-regular graph に対するある操作から、
 }次元多様体の Dehn surgery に対応する

を示すわけでは。

DS-diagram の "枠" とする 3-regular graph は、面の数は、
 偶数でなければならぬ。 $P_k = 0 (k \geq 7)$, $3P_3 + 2P_4 + P_5 = 12$
 を満たす 19 の場合のうち。

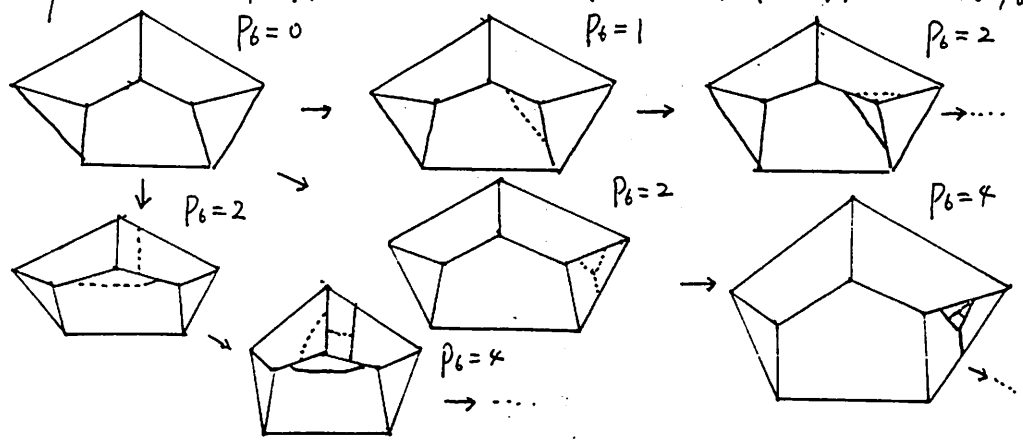
①	P_3	P_4	P_5		P_3	P_4	P_5
	4	0	0	⑤	0	4	4
②	2	2	2	⑥	0	2	8
③	2	0	6	⑦	0	0	12
④	0	6	0				

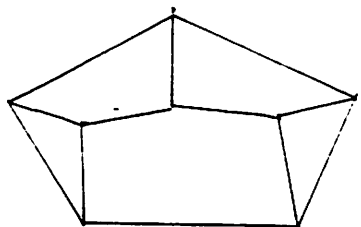
以上 7 の場合を考えるとよい。

次の 2 つの場合について考察してみました。

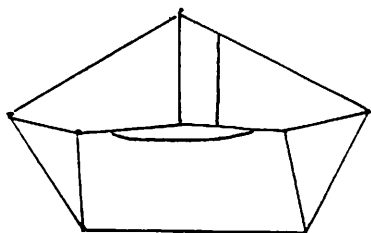
② P_3 P_4 P_5
 2 2 2 (今まで考察して来た場合です。)

P_6 の値を増やす操作は、今までに考察した操作以外にもあります。





左の7'は [1] の DS-diagram (2-9) からの。この9'の様子は $L(7, 2)$

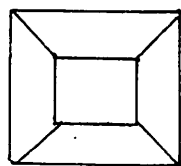
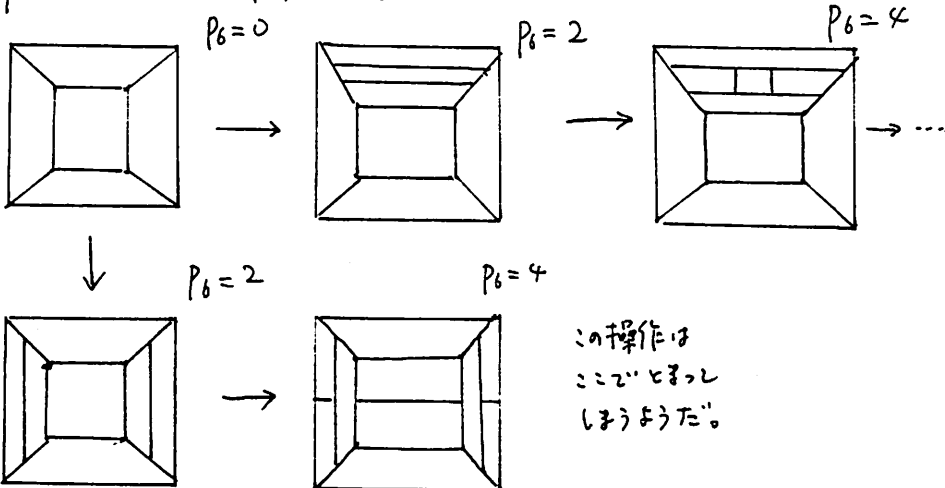


左の7'は、三河野氏のコンピュータによるデータにある DS-diagram (3-35) からの。この9'の様子は $L(11, 3)$

P_3, P_6, P_5

④ 0.6.0

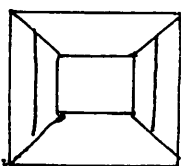
P_6 の値を増やす操作は、(他にもある?)



左の7'は、
[1] の DS-diagram (2-10)

基本群 $= \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1 g_2^{-1}, g_2 g_1 g_2 g_1^{-1} \rangle$

左の操作により、下の DS-diagram に対応する



三河野氏のデータにある DS-diagram (3-62)

基本群 $= \langle S, T \mid S^3 = T^2 = (ST)^2 \rangle$

DS-diagram (2-11)

基本群 $= \mathbb{Z}_8$

左に同じ

三河野氏のデータ (3-36)

基本群 $= \mathbb{Z}_{12}$
 $L(12, 5)$

(56)

② P_3, P_4, P_5 の場合, 7通りの操作に対応する DS-diagram の変形が, Dehn surgery であることを示すのは, ほとんど横岡大教授の根上氏に教示してもらいました。

これから,

- ・ 制限された 3-regular graph に対応する DS-diagram を持つ 3次元多面体はどのような性質を持つか。
 - ・ DS-diagram からの, のらぬ 3-regular graph は, どのような性質を満たすか。
- などの問題を考えたいと思います。

参考文献

- [1] Ikeda, H. and Inoue, Y., Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math. 2 (1985) 169-186
- [2] V. Eberhard, zur Morphologie der Polyeder. Leipzig 1891
- [3] B. Grünbaum, Some Analogues of Eberhard's Theorem on convex polytopes, Israel J. Math. 6 (1968) 398-411