

# Stable maps and branched shadows of 3-manifolds

古宇田悠哉\* (広島大学 理学研究科)

## 導入

安定写像とは, Morse 関数の一般化にあたる概念である. 2 つの可微分多様体の次元の対がし  
かるべき範囲にあるとき, その多様体間には安定写像がジェネリックに存在する (Golubitsky-  
Guillemin [11, Chapter VI]などを参照). 例えばターゲットの多様体の次元が 2 のとき, 安定写  
像はジェネリックに存在する. 本報告では, 3 次元多様体から実平面への安定写像の特異ファイ  
バーの数により, 3 次元多様体の特徴づけを行う. 任意の 3 次元可微分多様体は, shadow とよば  
れる 2 次元の polyhedron により組み合わせ的に表示することができる. ここで, 3 次元多様体  
は, その polyhedron 上の「円盤束」の境界として構成される. Shadow はもともと 1990 年代に  
Turaev [30, 31] により定義され, 量子不変量の研究に用いられているが, Costantino と D. Thurston  
は, 2008 年に出版された論文 [8] において, 3 次元多様体の shadow と, その多様体が許容する  
安定写像の Stein 分解との間の関係を見出した. 彼らは安定写像の Stein 分解を一部変形して  
shadow とみなすことにより, 安定写像の特異ファイバーの (重み付き) 総数を使って 3 次元多  
様体の Gromov ノルムの上からの評価を与えた. 本報告書では, Costantino と Thurston による  
Stein 分解からの shadow の構成とは逆に, shadow によって表される 3 次元多様体に対し, その  
shadow を Stein 分解の一部とみなすことで, 多様体の安定写像を構成する. 帰結として, 3 次元多  
様体が許容する安定写像の特異ファイバーの (重み付き) 総数の最小数と, shadow の頂点の最小  
数が一致することが分かり, これによってこの数と多様体の Gromov ノルムが関連付けられること  
を説明する. 本報告を通じ, 多様体はすべて可微分カテゴリーで考える.

本報告の内容は石川昌治氏 (東北大学) との共同研究 [15] に基づく.

---

\* 本報告書の内容は JSPS 科研費 25400078 (石川) 20525167 (古宇田), 26800028 (古宇田), 海外特別研究員制度 (古宇田) の助成を受けた研究に基づきます.

# 1 準備

## 1.1 3次元多様体の shadows と branched shadows.

コンパクトな位相空間  $P$  が **almost-special polyhedron** であるとは,  $P$  上の各点が図 1 のいずれかと同相な正則近傍を持つときをいう: 図 1 (iii) と同相な正則近傍を持つ点を  $P$  の真頂点

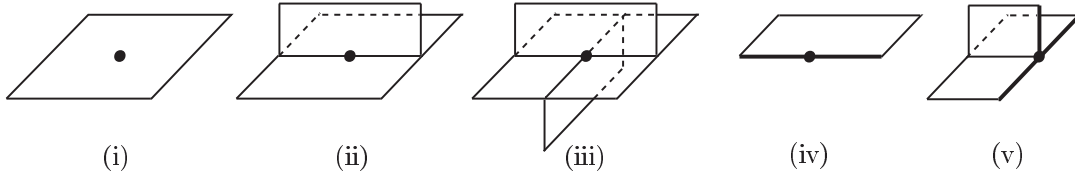


図 1 Almost-special polyhedron の局所モデル.

(true vertex) と呼び,  $P$  の真頂点全体の集合を  $V(P)$  と書く. 図 1 (ii), (iii), (v) のいずれかと同相な正則近傍を持つ点の集合を  $P$  の特異集合 (singular set) と呼び  $S(P)$  と書く. 図 1 (iv), (v) のいずれかと同相な正則近傍を持つ点からなる集合を  $P$  の境界 (boundary) と呼び,  $\partial P$  と書く. 図 1 (v) と同相な正則近傍を持つ点を  $P$  の境界頂点 (boundary-vertex) と呼び,  $P$  の境界頂点全体の集合を  $BV(P)$  と書く. 以下,  $c(P) = |V(P)| + |BV(P)|$  とおく.

$\partial P = \emptyset$  であるとき, polyhedron  $P$  は閉であるという.  $P \setminus S(P)$  の各連結成分を領域 (region) と呼ぶ.  $P$  の境界に接触しない領域  $R$  を内部領域 (internal region) という. そうでないとき,  $R$  を外部領域 (external region) という.

$P$  を almost-special polyhedron とする.  $\partial P$  の連結成分の集合から 3 元集合  $\{i, e, f\}$  への写像を  $\partial P$  の coloring と呼ぶ. (下の shadow の定義で明らかになるように,  $i, e, f$  はそれぞれ internal, external, false の頭文字からきている).  $\partial P$  の coloring が指定されると, これに関して  $\partial P$  は 3 つのピース  $\partial_i P, \partial_e P, \partial_f P$  に分けられる.  $\partial P$  の coloring が指定された almost-special polyhedron のことを **boundary-decorated almost-special polyhedron** と呼ぶ.  $\partial_f(P)$  が空のとき,  $P$  は *proper* であるという.

定義.  $M$  をコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする. コンパクトで向き付けられた可微分 4 次元多様体  $W$  に適切 (*proper*) に埋め込まれた *boundary-decorated almost-special polyhedron*  $P$  が次の条件を満たすとき, 対  $(M, L)$  の **shadow** と呼ぶ:

- $W$  に自然な  $PL$  構造を入れると,  $W$  は  $P$  に *collapse* する;
- $P$  は局所平坦, すなわち  $P$  の各点の近傍は  $\mathbb{R}^3 \subset W$  に含まれる;
- $(M, L) = (\partial W \setminus \text{IntNbd}(\partial_e P; \partial W), \partial_i P)$ .

$L = \emptyset$  のときは,  $P$  を単に  $M$  の *shadow* と呼ぶ.

[30, 31] において Turaev は (境界成分に  $S^2$  を持たない) コンパクトで向き付け可能な任意の 3 次元多様体  $M$  とその中の絡み目  $L$  (空でもよい) は shadow を持つことを示した.  $(M, L)$  の shadow の真頂点および境界頂点の数の最小数を  $(M, L)$  の shadow complexity とよび  $sc(M, L)$  と表す ([5, 8]).

Almost-special polyhedron  $P$  の各領域に, 次の条件を満たす向き (branching) が与えられたものを branched polyhedron という.

- $P$  の各辺において, 辺を共有している 3 枚の領域の向きが誘導する辺の向きのうち, 互いに逆向きのものが存在する.

Branching が与えられた polyhedron  $P$  は図 2 のような分岐構造が入った局所モデルをで表すことができる (Branched polyhedron に関する一般的な事項は石井 [14], Benedetti-Petronio [3],

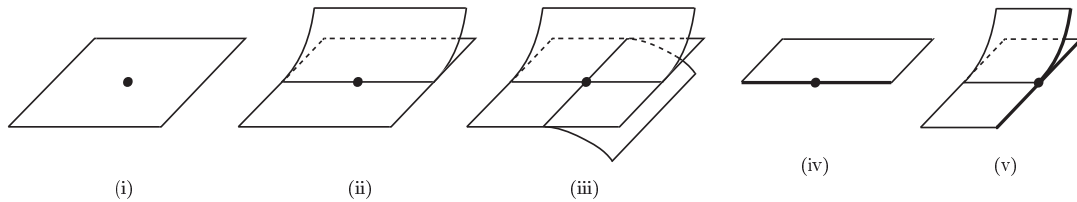


図 2 Branched polyhedron の局所モデル.

Petronio [26] などを参照).

定義.  $M$  をコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする.  $(M, L)$  の shadow  $P$  で branching が与えられたものを  $(M, L)$  の branched shadow と呼ぶ.

[5, Theorem 3.1.7] と [6, Proposition 3.4] において, Costantino は与えられた shadow にある  $\mu$ -ブープを有限回施すことにより branched shadow を得るアルゴリズムを与えた. 結果として, 任意の  $(M, L)$  は branched shadow を持つことが分かる.

定義.  $M$  をコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  をその中の絡み目 (空でもよい) とする.  $(M, L)$  の branched shadow の真頂点および境界頂点の数の最小数を  $(M, L)$  の branched shadow complexity とよび  $bsc(M, L)$  と表す.  $(M, L)$  の branched shadow  $P$  が  $c(P) = bsc(M, L)$  であるとき,  $P$  は極小であるという.

Almost-special polyhedron  $P$  の内部領域の半整数  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  による coloring でしかるべき条件を満たすものを gleam と呼ぶ. Gleam が与えられた almost-special polyhedron を shadowed polyhedron と呼ぶ. 論文 [30, 31] において, Turaev は次を示した:

1. コンパクトで向き付け可能な可微分 4 次元多様体に適切に埋め込まれた almost-special polyhedron  $P$  が  $\partial W$  の shadow であるとき,  $P$  の gleam が自然な方法で一意的に定まる.

2. (Turaev's reconstruction) Shadowed polyhedron  $P$  が与えられると, コンパクトで向き付られた 4 次元可微分多様体  $W$  と  $P$  の  $W$  への shadow としての埋め込みで, その埋め込みに関する上記 gleam が  $P$  に元々与えられていた gleam と一致するようなものが一意に存在する.

上の主張の後者, すなわち与えられた shadowed polyhedron  $P$  から 4 次元可微分多様体  $W$  を構成する方法を  $\partial P = \emptyset, S(P) \neq \emptyset$  かつ  $S(P)$  が連結な場合に限って簡潔に説明する (一般的な構成の詳細については Costantino [5], Thurston [29], Costantino-Thurston [8]などを参照). まず, 与えられた shadowed polyhedron  $P$  の特異集合の近傍  $\text{Nbd}(S(P); P)$  を図 1 の (ii) または (iii) と同相なピースの集合に分解する. これら各ピースの 3 次元 thickening を用意し, それらを  $P$  の組み合わせ構造に従って自然に張り合わせてえられる 3 次元多様体を  $X$  とおく. ここで  $X$  は向き付け可能とは限らないことに注意する.  $X$  上の行列式直線束 (determinant line bundle) の各ファイバーを (Euclid 計量を適当に与えた後に)  $[-1, 1]$  に制限して得られる部分束を  $W_0$  とおく. 言い方を変えると,  $W_0$  は  $X$  上の唯一の向き付け可能な  $[-1, 1]$  束である. 次に,  $P \setminus \text{Int Nbd}(S(P); P)$  の各連結成分  $R$  に対し,  $R \times [-1, 1]$  上の行列式直線束の各ファイバーを  $[-1, 1]$  に制限して得られる部分束を  $W_R$  とおく. 再び  $P$  の組み合わせ構造により,  $\partial W_R$  のどのソリッドトーラスが  $\partial W_0$  のどのソリッドトーラスに貼り合わされるか指定されている. これらを張り合わせて求める 4 次元多様体  $W$  を構成するのであるが, 貼り合わせ写像には, ソリッドトーラスのメリディアンに沿った Dehn ツイストの分の自由度がある. この自由度を解消するために指定されているのが gleam である.

$\partial \text{Nbd}(S(P); P) \cap R$  の成分 (単純閉曲線) の集合を  $l_1, l_2, \dots, l_k$  とおく. 各  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  について,  $\text{Nbd}(S(P); P)$  の 3 次元 thickening  $X$  の  $[-1, 1]$  束を  $l_i$  上に制限することにより, コアが  $l_i$  であるアニュラスもしくは Möbius バンド  $B_i$  が得られる. 同様に, 各  $R$  の 3 次元 thickening  $R \times [-1, 1]$  により, コアが  $l_i$  であるアニュラス  $A_i$  が得られる.  $l_i$  の 2 つの「枠」 $A_i$  と  $B_i$  は同じソリッドトーラスの中にあるので, そのソリッドトーラスにおいて  $A_i$  を適当にある回数 ( $n_i$  回, ただし  $n_i \in (1/2)\mathbb{Z}$ ) ツイストすることで  $B_i$  が得られる (図 3). このとき,  $R$  に対応する領域の

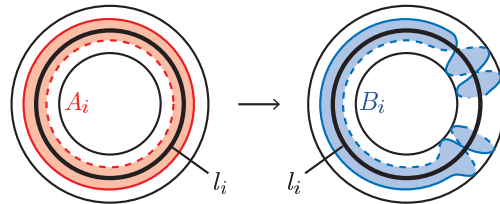


図 3  $l_i$  に対応するソリッドトーラス内の 2 つの「枠」 $A_i, B_i$ .

gleam は和  $\sum_{i=1}^k n_i$  で与えられる.

## 1.2 安定写像とその Stein 分解

$M$  を向き付け可能な 3 次元閉多様体とする.  $f$  を  $M$  から向き付け可能な 2 次元多様体  $\Sigma$  への可微分写像とする.  $f$  の特異点の集合を  $S(f)$  とおく. すなわち  $S(f) = \{p \in M \mid \text{rank } df_p < 2\}$  である.  $f$  が安定写像であるとは,  $f$  の  $C^\infty(M, \Sigma)$  における開近傍  $U_f$  が存在して, 次が成り立つときをいう:

1. 任意の写像  $g \in U_f$  に対し, 微分同相写像  $\Phi : M \rightarrow M$  と  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  が存在して,  $g = \varphi \circ f \circ \Phi^{-1}$  が成り立つ.

ここで,  $C^\infty(M, \Sigma)$  は  $M$  から  $\Sigma$  への可微分写像全体の集合に Whitney  $C^\infty$  位相を入れたものである.  $f$  が安定写像であるとき,  $M$  の各点  $p$  とその像  $f(p)$  の近傍で,  $f$  は局所的に次のいずれかで与えられる:

1.  $(u, x, y) \mapsto (u, x)$ ;
2.  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$ ;
3.  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$ ;
4.  $(u, x, y) \mapsto (u, y^2 + ux - x^3)$ .

((1), (2), (3), (4) のとき,  $p$  をそれぞれ正則点 (regular point), 定値折り目特異点 (definite fold point), 不定値折り目特異点 (indefinite fold point), カスプ特異点 (cusp point) と呼ぶ.) 本報告書では, さらに次を要請する:

5. 各 カスプ特異点  $p$  において  $f^{-1} \circ f(p) \cap S(f) = \{p\}$ ;
6.  $f$  の  $S(f) \setminus \{\text{cusp points}\}$  への制限は, 2 重点のみをもつはめ込みである.

逆に (1) ~ (6) を満たす任意の可微分写像は安定写像である. 安定写像の集合は  $C^\infty(M, \Sigma)$  において開かつ稠密である.

$M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体とする.  $M$  から向き付け可能な 2 次元多様体  $\Sigma$  への可微分写像が次を満たすとき S-写像 であるという.

1.  $f$  の  $\text{Int } M$  への制限は安定写像である (ここで,  $\text{Int } M$  上の安定写像は,  $C^\infty(\text{Int } M, \Sigma)$  を用いて閉多様体上の安定写像と同様に定義される);
2. 各  $p \in \partial M$  において,  $p$  を中心とし,  $\partial M$  が  $\{x = 0\}$  に対応する局所座標  $(u, x, y)$  と  $f(p)$  の周りの局所座標が存在し,  $f$  が局所的に  $(u, x, y) \mapsto (u, x)$  と書ける.

佐伯 [27] に従って,  $S_0(f)$ ,  $S_1(f)$ ,  $C(f)$  でそれぞれ  $f$  の  $\text{Int } M$  への制限の定値折り目特異点の集合, 不定値折り目特異点の集合, カスプ特異点の集合を表す.

$M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体とし、 $f$  を  $M$  から向き付け可能な 2 次元多様体  $\Sigma$  への  $S$ -写像とする。  $M$  上の 2 点  $p_1, p_2$  が  $f$  のファイバーの同じ連結成分に含まれているとき同値であると定義し、この同値関係による商空間を  $W_f$ 、商写像  $M \rightarrow W_f$  を  $q_f$  と表す。このとき  $f = \bar{f} \circ q_f$  なる写像  $\bar{f}: W_f \rightarrow \Sigma$  が唯一つ存在する。商空間  $W_f$ 、もしくは写像の合成  $\bar{f} \circ q_f$  のことを  $f$  の Stein 分解と呼ぶ。Stein 分解  $W_f$  は (2 次元の有限単体複体) 多面体である。Kushner-Levine-Porto [18] と Levine [21] により、Stein 分解  $W_f$  の局所モデルは次のように記述できる。

$p \in S_0(f)$  または  $p \in C(f)$  のとき、Stein 分解の射影  $q_f(p) \mapsto f(p)$  はそれぞれ図 4 (i)、図 4 (ii) のようになる。このとき、 $q_f^{-1} \circ q_f(p)$  をそれぞれ  $I^0$ -型の特異ファイバー、 $II^\alpha$ -型の特異ファイ

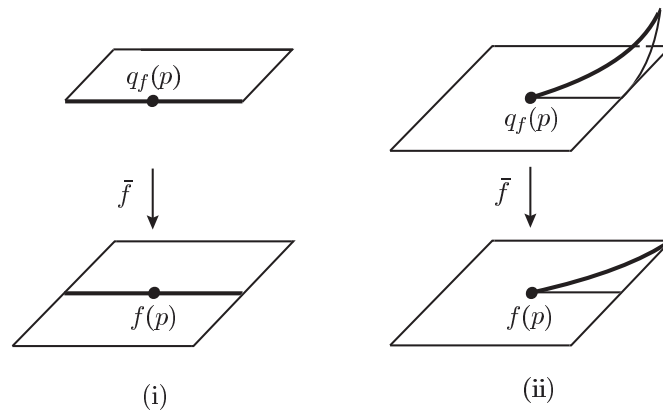


図 4 (i) 定値折り目特異点 (ii) カスプ特異点 に対応する写像  $\bar{f}: W_f \rightarrow \Sigma$  の局所モデル。

バーと呼ぶ (ファイバーの名前は佐伯 [28, Figure 3.4] に従っている。以下の議論においても同様)。  $p \in S_1(f)$  のとき、射影  $q_f(p) \mapsto f(p)$  は図 5 のいずれかのようにになる。図 5 の (i), (ii), (iii) のよ

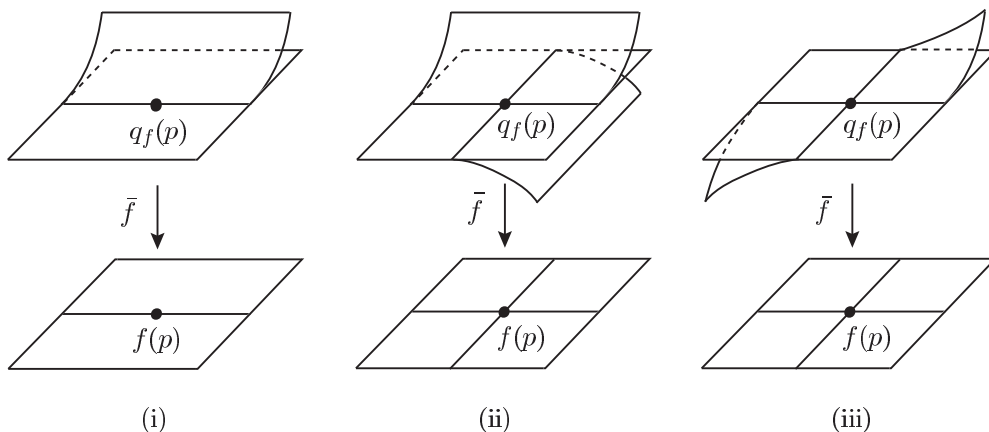


図 5 不定値折り目特異点に対応する写像  $\bar{f}: W_f \rightarrow \Sigma$  の局所モデル。

うな  $q_f(p)$  の近傍をそれぞれ  $U_1, U_2, U_3$  とおく。

このとき逆像  $q_f^{-1}(U_1) \subset M$  は  $R \times [0, 1]$  ( $R$  は 3 つ穴あき球面) と微分同相になり

$f$  の  $q_f^{-1}(U_1)$  への制限は図 6 のようになっている. このとき  $q_f^{-1} \circ q_f(p)$  を  $I^1$ -型の特異ファイバーと呼ぶ. 同様に, 逆像  $f^{-1}(U_2), f^{-1}(U_3)$  はそれぞれ  $S \times [0, 1]$  ( $S$  は 4 つ穴あき球面) と微分

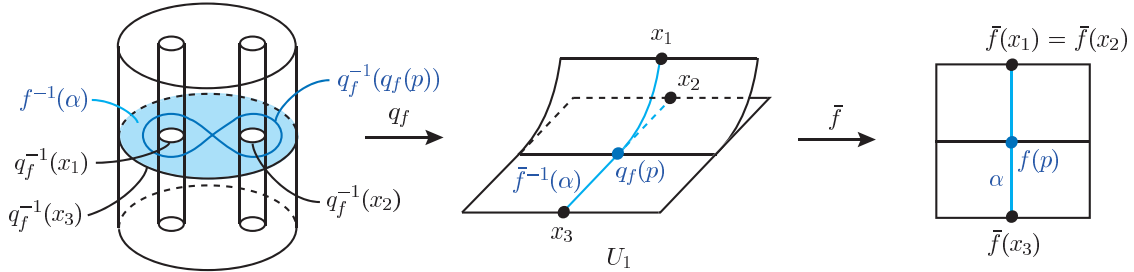


図 6  $f$  の  $f^{-1}(U_1)$  への制限の Stein 分解.

同相になり,  $f$  の  $f^{-1}(U_2), f^{-1}(U_3)$  への制限はそれぞれ図 7, 図 8 のようになっている. このと

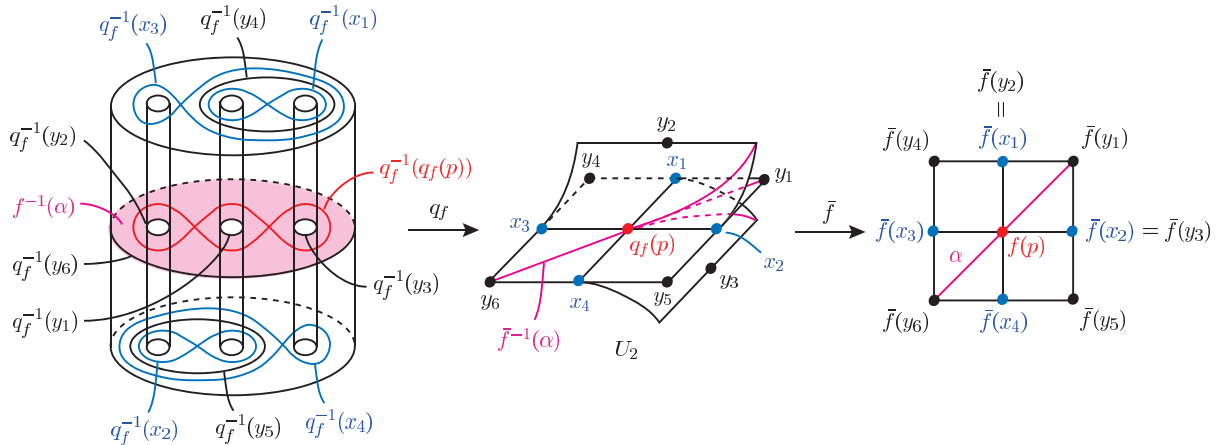


図 7  $f$  の  $f^{-1}(U_2)$  への制限の Stein 分解.

き  $q_f^{-1} \circ q_f(p)$  をそれぞれ  $\text{II}^2$ -型の特異ファイバー,  $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーと呼ぶ.  $\text{II}^2$ -型および  $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーの  $f$  による像を  $f$  の non-simple crossing と呼ぶ.  $f$  の  $\text{II}^2$ -型および  $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーの集合をそれぞれ  $\text{II}^2(f), \text{II}^3(f)$  と書く.

安定写像は, 一般には上で見てきた 3 次元から 2 次元への写像という次元設定がなくても自然に定義される. そして, 安定写像はその特異点・特異ファイバーの情報により, 定義多様体のトポロジカルな情報を引き出すために利用されてきた. 顕著な例は, Morse 理論 (Morse 関数によるハンドル分解の理論) である. 実際 Morse 関数は多様体から実直線への安定写像に他ならない. 以下, 3 次元多様体から実平面の場合について知られている重要な結果を列挙する.

1. (Levine [20]) 閉 3 次元多様体から  $\mathbb{R}^2$  への任意の安定写像  $f$  のカスプ特異点はホモトピッ

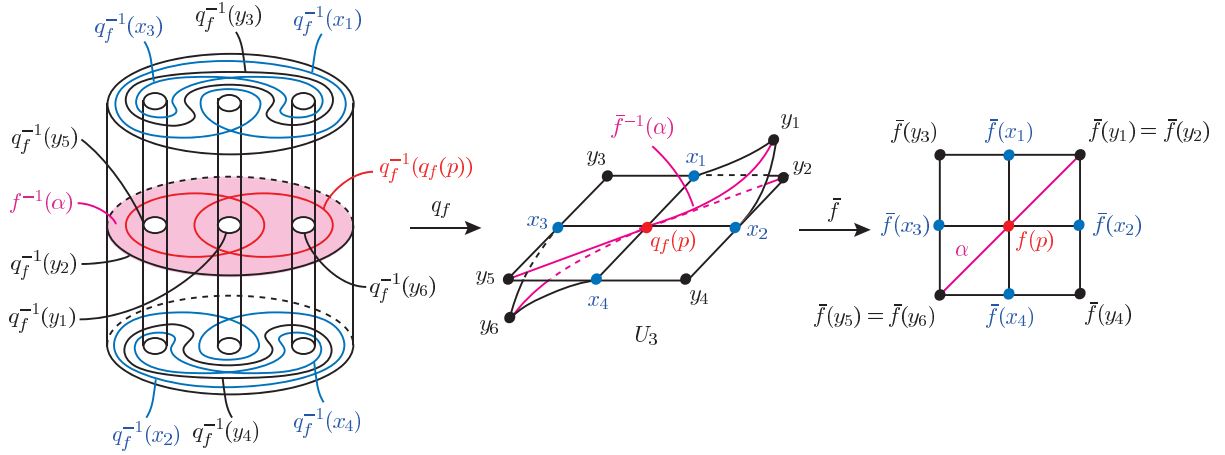


図 8  $f$  の  $f^{-1}(U_3)$  への制限の Stein 分解.

くな変形で除去可能である。すなわち、任意の閉 3 次元多様体はカスプ特異点を持たない  $\mathbb{R}^2$  への安定写像を許容する。

2. (Burlet-de Rham [4]) 閉 3 次元多様体  $M$  から  $\mathbb{R}^2$  への任意の安定写像  $f$  の特異点が定値折り目特異点のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ 。ここで、 $k = 0$  のときは  $M \cong S^3$  と理解する。
3. (佐伯 [27]) 閉 3 次元多様体  $M$  から  $\mathbb{R}^2$  への任意の安定写像  $f$  が、 $\text{II}^2$ -型、 $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーおよびカスプ特異点のいずれも持たない必要十分条件は、 $M$  がグラフ多様体であることである。ここで、一般にコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体がグラフ多様体であるとは、その多様体ををいくつかのトーラスで切り開くことにより各ピースがすべて曲面上の  $S^1$  束になるときをいう。(この結果は、上記 Burlet-de Rham [4] の一般化である。)
4. (Costantino-Thurston [8], Gromov [27]) 閉 3 次元多様体  $M$  から  $\mathbb{R}^2$  への安定写像  $f$  に対し、次が成り立つ。

$$\|M\| \leq 10 (\#\text{II}^2(f) + \#\text{II}^3(f)).$$

ここで、 $\|M\|$  は  $M$  の Gromov ノルムを表す。(この結果は、上記佐伯 [27] の十分性の一般化とみなせる。)

定義.  $M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体、 $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする。  $f$  を  $M$  から  $\Sigma$  への  $S$ -写像が  $S_0(f) \supset L$  を満たすとき、 $f$  を  $(M, L)$  の  $S$ -写像 (または単に  $L$  の  $S$ -写像) と呼ぶ。特に  $S_0(f) = L$  となっているとき、 $f$  を  $(M, L)$  の proper な  $S$ -写像と呼ぶ。また、 $M$  が閉 3 次元多様体であるとき、 $f$  を  $(M, L)$  の安定写像と呼ぶ。

以下、 $S$ -写像の例をいくつか挙げる。これらの例はすべて本質的に佐伯 [27] に記述されている。

例 1.  $S^2$  を  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視する。  $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1/2| \leq 1/4\}$ ,  $D_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid$



$|z - 1/2| \leq 1/4\}$ ,  $D_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$ ,  $\alpha = \partial D_\alpha$ ,  $\beta = \partial D_\beta$ ,  $\gamma = \partial D_\gamma$ .

$h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を次を満たす height function とする.

- 任意の  $z \in \mathbb{C}$  について  $h(z) = h(-z)$ ;
- $h(\pm 1/2) = -1$ ,  $h(\infty) = 1$ ;
- $h(\alpha) = h(\beta) = -1/2$ ,  $h(\gamma) = 1/2$ ;
- $0 \in P$  はただ一つの臨界点であり, 指数は 1.

各整数  $n$  に対し, 写像  $\rho_n : S^2 \times S^1 \rightarrow [-1, 1] \times S^1$  を次で定義する:

$$\rho_n(z, \theta) = (h(z \exp(\sqrt{-1}(-n\theta/2))), \theta).$$

ここで  $S^1$  を  $\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$  と同一視している.  $\psi : [-1, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を任意のはめ込みとする.

1.  $f_n(p) = \psi \circ \rho_n(p)$  で定義される写像  $f_n : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  はカスプ特異点を持たない安定写像である. この安定写像において, 不定値折り目特異点の集合  $S_1(f_n)$  は 1 つの円周からなり, 定値折り目特異点の集合  $S_0(f_n)$  は,  $n$  が偶か奇かによって 3 つまたは 2 つの円周からなる.
2.  $f_n : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を (1) で定義した安定写像とする. 各整数  $n$  に対し

$$V_n = (S^2 \times S^1) \setminus (\text{Int}(D_\gamma \times S^1) \cup \text{Int}\{(z \exp(\sqrt{-1}(n\theta/2)), \theta) \mid z \in D_\alpha \cup D_\beta\})$$

とおく.

$V_n$  は  $(S^2 \times S^1) \setminus \text{Int Nbd}(S_0(f_n))$  と同一視できることに注意する. 特に  $n$  が偶数のとき,  $V_n$  は  $R \times S^1$  ( $R$  は 3 つ穴あき球面) と微分同相である.  $\rho_n$  の  $V_n$  への制限は  $V_n$  から  $[-1/2, 1/2] \times S^1$  への写像になる. このとき  $f_n|_{V_n} : V_n \rightarrow \mathbb{R}^2$  はカスプ特異点, 定値折り目特異点を持たない  $S$ -写像であり, 不定値折り目特異点の集合  $S_1(f_n|_{V_n})$  は 1 つの円周からなる.

3.  $A = \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{Int}(D_\alpha \cup D_\beta)$ ,  $\rho_A = \rho_0|_{A \times S^1}$  とおく. このとき写像  $\psi \circ \rho_A : A \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  はカスプ特異点を持たない  $S$ -写像である.  $S_0(\psi \circ \rho_A)$ ,  $S_1(\psi \circ \rho_A)$  はそれぞれ 1 つの円周からなる.
4.  $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{Int} D_\gamma$  とおく.  $\rho_n$  の  $D \times S^1$  への制限は  $D \times S^1$  から  $[-1, 1/2] \times S^1$  への写像になる.  $S^3$  を  $(D \times S^1) \cup_\varphi (D^2 \times S^1)$  (ここで  $\varphi : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial D \times S^1$  は  $\varphi(\theta, \tau) = (\tau, \theta)$  で定義される) と同一視する. 写像  $g_n : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を次で定義する:

$$g_n(p) = \begin{cases} \psi_1 \circ \rho_n(p) & \text{for } p \in D \times S^1 \\ x & \text{for } p = (x, \theta) \in D^2 \times S^1 \end{cases} .$$

ここで  $\psi_1 : [-1, 1/2] \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  は  $\psi_1(r, \theta) = (3/2 - r) \exp(\sqrt{-1}\theta)$  で定義され, また  $D^2$  は  $\mathbb{R}^2$  内で  $(0, 0)$  を中心とする単位円と同一視されている.  $g_n$  はカスプ特異点を持たない安定写像である.  $S_0(g_n)$  は  $(2, n)$ -トーラス絡み目である. 別の言い方をすると,  $g_n$  は  $(2, n)$ -トーラス絡み目の proper な安定写像である. この写像の Stein 分解  $W_{g_n}$  は

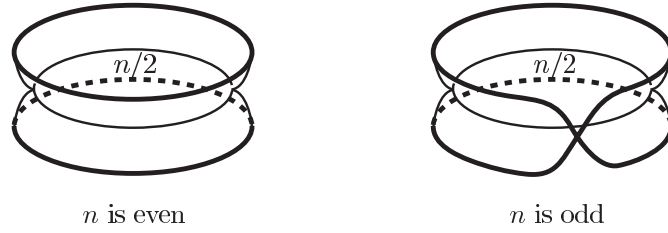


図9 Stein 分解  $W_{g_n}$ .

図9のようになる. ここで, Stein 分解  $W_{g_n}$  を almost-special polyhedron とみなし, 円盤領域に gleam  $n/2$  を与えたものは,  $(2, n)$ -トーラス絡み目の (branched) shadow である (Costantino-Thurston [8, Example 3.16] を参照).

定義.  $M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする.  $S$ -写像  $f : (M, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  の complexity を  $c(f) = |\text{II}^2(f)| + 2|\text{II}^3(f)|$  で定義する.  $(M, L)$  の stable map complexity  $\text{smc}(M, L)$  を  $\text{smc}(M, L) = \min_f \{c(f)\}$  で定義する. ここで  $f$  は  $(M, L)$  から  $\mathbb{R}^2$  へのカスプ特異点を持たないすべての  $S$ -写像を動く.

例 2. 例 1 (4) により,  $(2, n)$ -トーラス絡み目の stable map complexity は 0 であることが分かる.

## 2 Branched shadow complexity と stable map complexity

定理 2.1.  $M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする. このとき  $\text{bsc}(M, L) = \text{smc}(M, L)$  が成り立つ.

$\text{bsc}(M, L) \leq \text{smc}(M, L)$  であることは, 本質的に Costantino-Thurston [8, Theorem 4.2] の議論から従う. 実際, 与えられた  $S$ -写像の Stein 分解は, 「ほとんど」 branched shadow とみなせる. ただし, 図 5 (iii) は, branched polyhedron の局所モデルになっていない. この局所モデルは  $\text{II}^3$ -型の特異ファイバーに対応している. このような点をそれぞれ図 10 のような局所モデルに置き換えることにより,  $(M, L)$  の branched shadow が得られることがわかる.

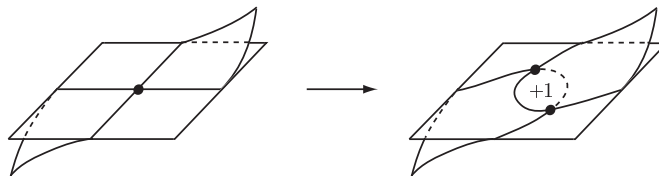


図10 Stein factorization の局所的な置き換え.

$\text{bsc}(M, L) \geq \text{smc}(M, L)$  であることの証明は, 与えられた極小な branched shadow から実際に

S-写像を作ることにより得られる. ここで, branched shadow の各頂点は  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーに対応し, これ以外の non-simple crossing は生じない (詳しくは 石川-古宇田 [15] を参照).

- 注意 2.2. 1.  $(M, L)$  を定理 2.1 の対とし,  $f : (M, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を S-写像とする. もし  $\Pi^3(f) = \emptyset$  であれば, Stein 分解  $W_f$  は  $(M, L)$  の branched shadow に他ならない.  $\Pi^3(f) \neq \emptyset$  とし,  $\Pi^3$ -型の特異ファイバーの閉近傍を  $N_1, N_2, \dots, N_n$  とおく. 図 8 で見たように, 各  $N_i$  は種数 3 のハンドル体である. このとき, 定理の証明の議論を使うことにより図 10 にある Stein 分解を持つ写像  $g_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  を構成することができる. Stein 分解を持つ写像  $g_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  を構成することができる. 各  $N_i$  において  $f$  を  $g_i$  に取り換えることにより, 新たな S-写像  $(M, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  で  $\Pi^3$ -型の特異ファイバーを持たないものを構成することができる.
2.  $(M, L)$  を定理 2.1 の対とし,  $P$  を  $(M, L)$  の境界頂点を持たない branched shadow とする. このとき, 上で述べたように  $|\Pi^2(f)| = c(P)$ ,  $\Pi^3(f) = \emptyset$  なる S-写像  $f : E(L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を作ることができ, 構成よりこの Stein 分解  $W_f$  もまた almost-special polyhedron 自然な包含写像  $S(P) \subset S(W_f)$  が存在する. Stein 分解の定義により,  $W_f$  の各領域は平面的である. 一方で,  $P$  の領域は一般に平面的であるとは限らない. さらに, たとえ  $P$  の各領域が平面的であったとしても,  $W_f$  は  $P$  と同相であるとは限らない.
3. [17] において, 筆者は向き付け可能な閉 3 次元多様体の Heegaard 種数と  $M$  のブロック数 ( $M$  の分岐スパインを用いて定義される不変量) が一致することを示した (遠藤-石井 [9] も参照のこと.) 別の言い方をすると,  $M$  の許容する Morse 関数の臨界点の個数は,  $M$  の分岐スパインにより決定される. 定理 2.1 はこの事実と比較される.

定理 2.1 (とその証明), および比較的簡単な組み合わせ的考察により, smc の連結和, トーラス和に関する劣加法性が得られる. また, トーラス和に関する劣加法性より, 次も容易に得られる.

系 2.3.  $M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする. このとき  $\text{smc}(M) \leq \text{smc}(M, L) = \text{smc}(E(L))$  が成り立つ. ただし,  $E(L)$  は絡み目  $L$  の外部空間を表す.

外部空間がグラフ多様体である絡み目をグラフ絡み目と呼ぶ. 次の命題は佐伯 [27], Costantino-Thurston [8, Proposition 3.31] および定理 2.1 から従う.

命題 2.4.  $M$  を境界が空またはいくつかのトーラスであるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体,  $L$  を  $M$  内の絡み目 (空でもよい) とする. このとき, 次の条件はそれぞれ同値である.

1.  $\text{sc}(M, L) = 0$
2.  $\text{bsc}(M, L) = 0$
3.  $L$  はグラフ絡み目.

### 3 絡み目の安定写像

この章では常に  $S^1$  を  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  と同一視する.

$D$  を標準的な 4 次元球体  $B^4$  内に適切かつ平坦に埋め込まれた向き付き円盤とする.  $D \setminus \text{Nbd}(\partial D; D)$  の閉包を  $D'$  とおく. Collapsing  $B^4 \setminus D$  から誘導される射影を  $\pi : S^3 \rightarrow D$  とおく. 一般性を失うことなく逆像  $V_h = \pi^{-1}(D')$  はソリッドトラス  $D' \times S^1$  であり,  $\pi|_{V_h}$  は特異点を持たない S-写像としてよい.  $V_v = S^3 \setminus \text{Int } V_h$  とおく.  $L = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_n$  を  $S^3$  内の  $n$  成分絡み目とする. アイストピーで  $L$  を動かすことにより,  $L$  は  $D' \times [[-\varepsilon], +\varepsilon]$  ( $\varepsilon$  は十分小さな正数) に含まれ,  $\pi|_{V_h}$  は  $L$  に関してジェネリックであるとしてよい. 像  $\pi(L)$  と交差点での上下の情報により,  $D'$  上に  $L$  の図式  $D_L$  が描ける. ここで写像柱

$$P_{D_L}^* = ((L \times [0, 1]) \sqcup D') / (x, 0) \sim \pi(x)$$

を考える.  $P_{D_L}^*$  において, 各  $L_j \times \{1\} \subset \partial P_{D_L}^*$  に color “ $i$ ” を, また残された 1 つの境界成分に color “ $f$ ” を与えたものは,  $(S^3, L)$  の shadow である. (Costantino-Thurston [8, Examples 3.15-17] を参照.)  $L$  の各成分に向きを入れる.  $P_{D_L}^*$  の領域の集合は,  $D'$  の部分曲面とアニュラス  $A_j = (L_j \times [0, 1]) / \sim, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  からなる.  $D'$  の部分曲面には,  $D'$  にあらかじめ指定されていた向きから誘導される向きを入れる. 各  $A_j$  には,  $L_j \times \{1\}$  に誘導される向きが  $L_j$  にあらかじめ入れられている向きと一致するような向きを入れる (図 11 参照). これらの向きを指定したこ

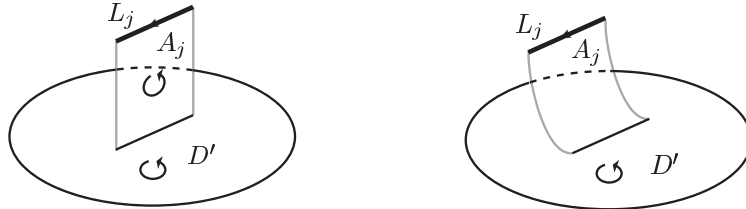


図 11  $A_j$  上の branching.

とにより  $P_{D_L}^*$  は  $(S^3, L)$  の branched shadow になる.  $\partial D'$  に接触している  $P_{D_L}^*$  の領域を  $R$  とおく.

向き付けられた絡み目図式  $D_L$  が *admissible* であるとは,  $R$  が次を満たすときをいう:

- $R$  の閉包はアニュラスと微分同相である;
- $R$  と  $A_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) が接触する  $S(P_{D_L}^*) \setminus V(P_{D_L}^*)$  の各連結成分において, これら 2 つの領域が誘導する向きは一致する.

例えば,  $D_L$  として  $L$  の閉ブレイド表示をとり, 向きを適当に入れると,  $R$  は上記条件を満たす.  $D_L$  が *admissible* であるときは,  $P_{D_L} = P_{D_L}^* \setminus R$  もまた  $(S^3, L)$  の branched shadow になる. 以下では, この branched shadow について議論する.

$f : (S^3, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $P_L$  から定理 2.1 の議論に従って作られる安定写像とする. この写像は射影  $\pi$  を少し perturb することで得られ, この場合特に  $W_f = P_L$  となる.  $P_{D_L}$  の各点の商写像  $q_f$  による逆像は次のように記述できる.

1.  $x_1$  を  $D' \setminus P_{D_L}$  内の点とする. このとき, 逆像  $q_f^{-1}(x_1)$  (これは  $f$  の正則ファイバーである) は  $\{x_1\} \times S^1 \subset V_h$  である (図 12 参照).

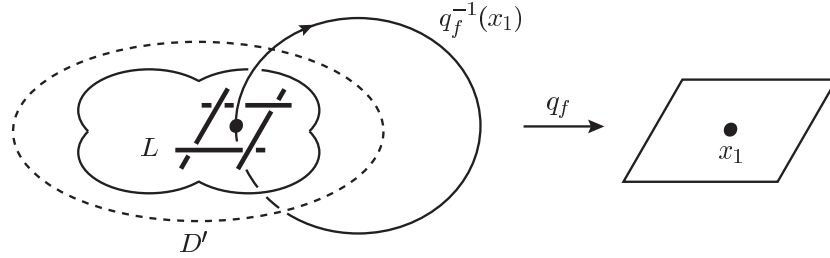


図 12 正則ファイバー  $q_f^{-1}(x_1)$  の位置.

2.  $x_2$  を  $L_i \times (0, 1)$  内の点とする. このとき, 逆像  $q_f^{-1}(x_2)$  (これも  $f$  の正則ファイバーである) は  $L_i$  のメリディアンである (図 13 参照).

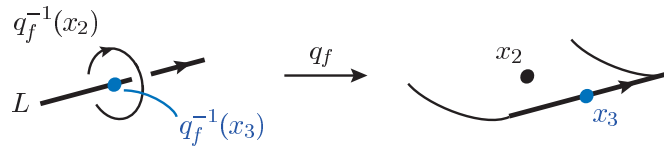


図 13 正則ファイバー  $q_f^{-1}(x_2)$  と  $I^0$ -型の特異ファイバー  $q_f^{-1}(x_3)$  の位置.

3.  $x_3$  を  $L_i \times \{1\}$  内の点とする. このとき, 逆像  $q_f^{-1}(x_3)$  (これは  $I^0$ -型の特異ファイバーである) は  $L_i$  内の 1 点になる (図 13 参照).
4.  $x_4$  を  $S(P_{D_L}) \setminus V(P_{D_L})$  内の点とする.  $\alpha$  を  $\bar{f}(x_4)$  における  $f$  の transverse arc とすると, 逆像  $Y = \bar{f}^{-1}(\alpha)$  は Y-字グラフになる.  $Y$  の 1 つの端点  $y_1$  は  $\bar{f}$  により  $\alpha$  の 1 つの端点に写り,  $Y$  の残りの 2 つの端点  $y_2, y_3$  は  $\alpha$  のもう一方の端点に写る. 逆像  $q_f^{-1}(Y)$  は 3 つの円周  $q_f^{-1}(y_1), q_f^{-1}(y_2), q_f^{-1}(y_3)$  により張られる 3 つ穴あき球面である. これらの円周の位置は上記 1, 2 により既に記述されていることに注意する. このとき, 逆像  $q_f^{-1}(x_4)$  (これは  $I^1$ -型の特異ファイバーである) は図 14 に描かれているような  $q_f^{-1}(Y)$  のスパインになる.
5. 最後に  $x_5$  を  $P_{D_L}$  の真頂点とする.  $\alpha$  を  $\bar{f}(x_5)$  における  $f$  の transverse arc とすると, 逆像  $X = \bar{f}^{-1}(\alpha)$  は X-字グラフになる.  $X$  の 1 つの端点  $y_1$  は  $\bar{f}$  により  $\alpha$  の 1 つの端点に写り,  $X$  の残りの 3 つの端点  $y_2, y_3, y_4$  は  $\alpha$  のもう一方の端点に写る. 逆像  $q_f^{-1}(X)$  は 4 つの円周  $q_f^{-1}(y_1), q_f^{-1}(y_2), q_f^{-1}(y_3), q_f^{-1}(y_4)$  により張られる 4 つ穴あき球面である. これらの円周の位置は上記 1, 2 により既に記述されていることに再度注意する. このとき, 逆像

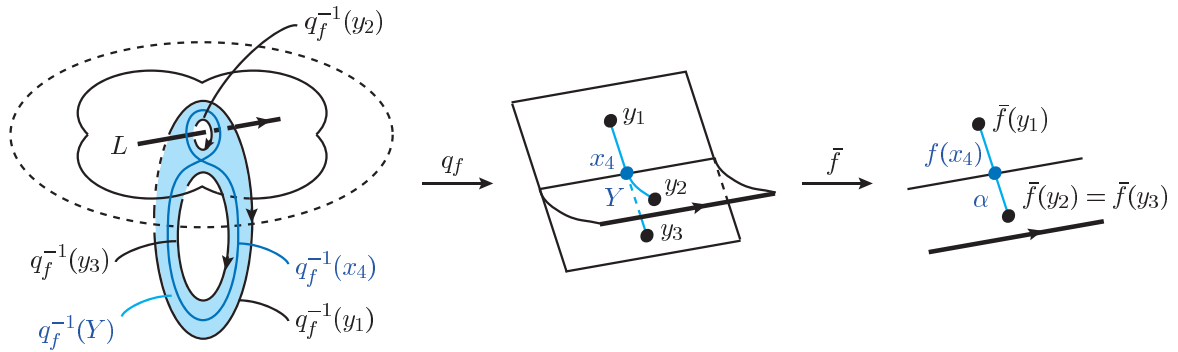


図 14  $I^1$ -型の特異ファイバー  $q_f^{-1}(x_4)$  の位置.

$q_f^{-1}(x_5)$  (これは  $II^2$ -型の特異ファイバーである) は図 15 に描かれているような  $q_f^{-1}(X)$  のスパインになる.

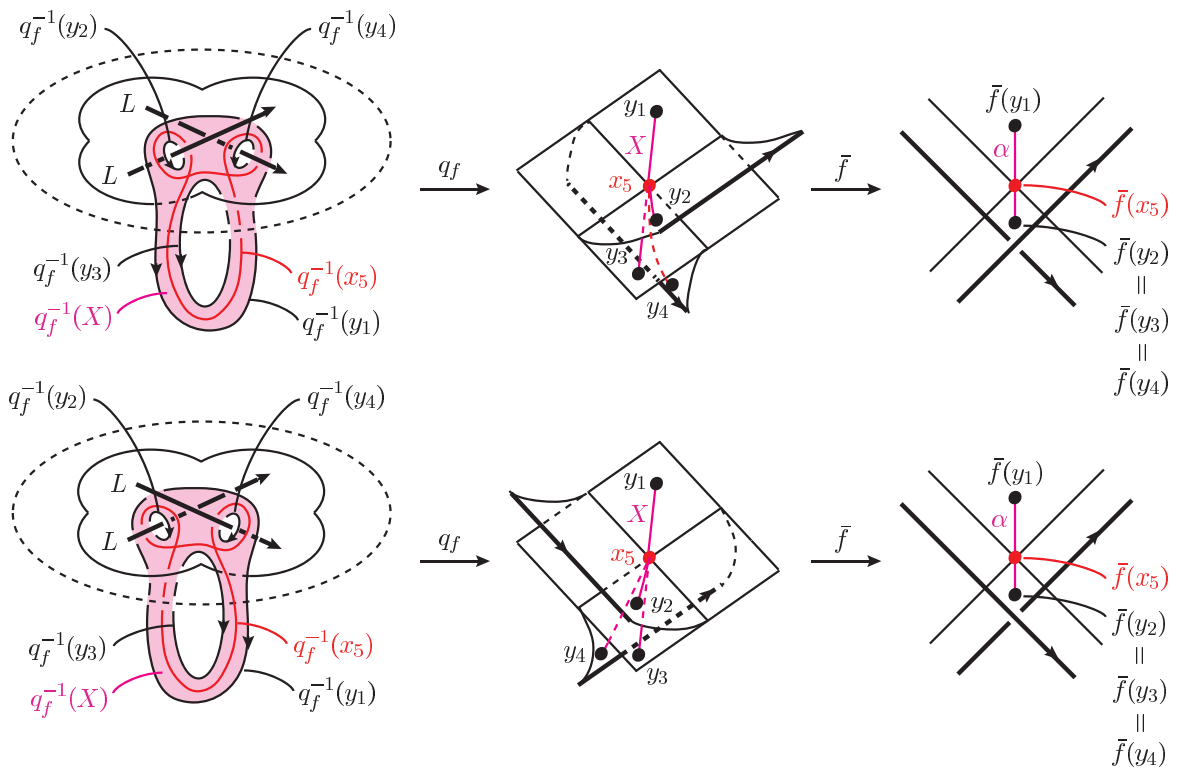


図 15  $II^2$ -型の特異ファイバー  $q_f^{-1}(x_5)$  の位置.

$L$  を  $S^3$  内の絡み目とする.  $L$  の  $\mathbb{R}^2$  上の図式の交点の最小数を  $L$  の交点数 と呼び、 $cr(L)$  と表す.

定理 3.1.  $S^3$  内の非自明な絡み目  $L$  に対し、カスプ特異点を持たない *proper* な安定写像

$f : (S^3, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  で次を満たすものが存在する.

1. Stein 分解  $W_f$  は可縮である;
2.  $|\Pi^2(f)| \leq \text{cr}(L) - 2$  かつ  $\Pi^3(f) = \emptyset$  である.

さらに,  $f$  の正則・特異ファイバーの位置は, すべて  $L$  の図式から決定できる.

証明は次のステップにより得られる.

ステップ 1  $S^3$  内の非自明な絡み目  $L$  に任意の向きを指定し, 交点数がちょうど  $\text{cr}(L)$  である図式を円盤上に用意する (このとき, 図式は連結になることに注意).

ステップ 2 ステップ 1 の図式の Seifert 円周のうち innermost なものを選び, これに対応する領域が外部領域に来るように図式を描き直し,  $D_L$  とおく (この変形で交点数は変化しない.)

ステップ 3 ステップ 2 で得られた図式  $D_L$  は (必要ならば  $L$  の各成分の向きを一斉に逆にするにより), admissible になるので,  $(S^3, L)$  の proper な branched shadow  $P_{D_L}$  が得られる ( $P_{D_L}^*$  から外部領域を取り除いて  $P_{D_L}$  を得る際に頂点が少なくとも 2 つ減る.)

ステップ 4  $P_{D_L}$  から作られる安定写像  $f$  は,  $(S^3, L)$  の求める proper な安定写像になる.

例 3. 図 16 の左側は, 8 の字結び目  $K$  の admissible な図式  $D_K$  である. 図 16 の右側は  $D_K$  から構成される可縮な branched polyhedron  $P_{D_K}$  である. 上で述べた議論により, Stein 分解  $(S^3, K) \xrightarrow{q_f} P_{D_K} \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^2$  を持つ proper な安定写像  $f : (S^3, K) \rightarrow \mathbb{R}^2$  で,  $|\Pi^2(f)| = 2$ ,  $\Pi^3(f) = \emptyset$ ,  $C(f) = \emptyset$  なるものが構成出来る. このとき,  $P_{D_K}$  内の点  $x_1, x_2, \dots, x_6$  の  $q_f$  による逆像の位置は図のようになる.

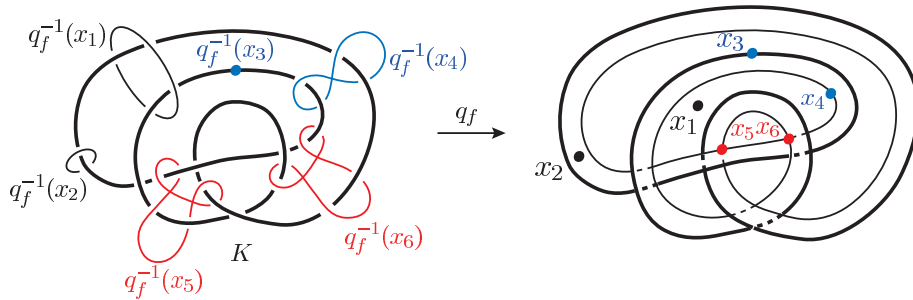


図 16 8 の字結び目の安定写像  $f$  のファイバーの位置.  $q_f^{-1}(x_1)$  と  $q_f^{-1}(x_2)$  は正則ファイバー,  $q_f^{-1}(x_3)$  は  $I^0$ -型の特異ファイバー,  $q_f^{-1}(x_4)$  は  $I^1$ -型の特異ファイバー,  $q_f^{-1}(x_5)$  と  $q_f^{-1}(x_6)$  は  $I^2$ -型の特異ファイバー.

系 2.3 と定理 3.1 の帰結として, 次が成り立つ.

系 3.2.  $M$  を  $S^3$  内の非自明な絡み目  $L$  に沿った Dehn 手術により得られる 3 次元多様体とする. このとき, カusp特異点を持たない安定写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  で  $|\Pi^2(f)| \leq \text{cr}(L) - 2$ ,  $\Pi^3(f) = \emptyset$  を満たすものが存在する.

注意 3.3. 系 3.2 と類似の結果が Kalmár-Stipsicz [16, Theorem 1.2] により示されている.  $\Pi^2$ -型,  $\Pi^3$ -型の特異ファイバーおよびカスプ特異点の数については系 3.2 で得られたものの方が真に小さい.

## 4 Branched shadow complexity が 1 の絡み目

前章までで得られたテクニックを発展させることで,  $\text{smc}(S^3, L)$  なる双曲的絡み目  $L$  の完全なリストを与えることができる.

定理 4.1.  $L$  を  $S^3$  内の双曲的絡み目とする. このとき  $\text{bsc}(S^3, L) = 1$  である必要十分条件は  $L$  の補空間が図 17 にある絡み目  $L_1, L_2, \dots, L_6$  もしくはそれらの *Dehn filling* と同相であることである.

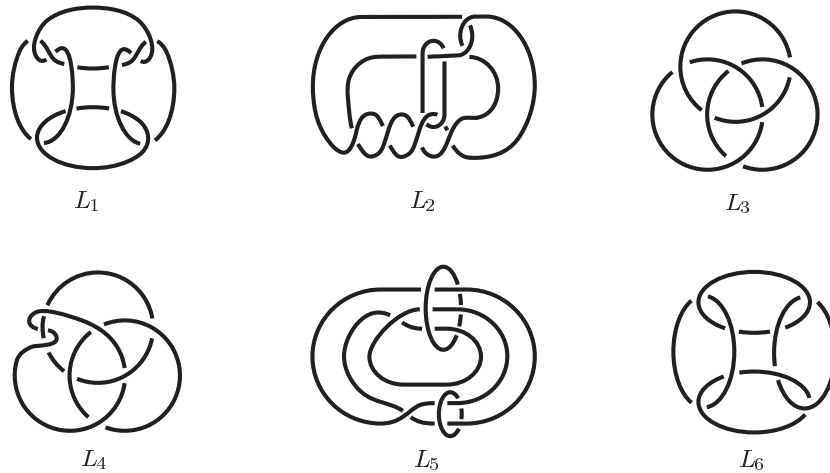


図 17 The links  $L_1, L_2, \dots, L_6$  in  $S^3$ .

これら 6 個の絡み目  $L_1, L_2, \dots, L_6$  の補空間の双曲体積は  $2V_{\text{oct}}$  (ただし  $V_{\text{oct}} = 3.66\dots$  は標準的理想双曲正 8 面体の体積) である (次章を参照). これらの絡み目は, 結び目理論の他の観点からみても非常に基本的なものである. Agol-Storm-Thurston [2, Theorem 9.1] により, 絡み目  $L_1$  は meridional incompressible planar surface を含む絡み目のうち, 体積が最小のものである.  $L_3$  は Borromean 絡み目と呼ばれる. また吉田 [32] により,  $L_6$  の補空間は 4 つのカスプを持つ向き付け可能な双曲的 3 次元多様体のうち, 体積が最小のものである.

定理 4.1 の証明は, まず, 頂点をちょうど 1 つだけ持つ branched polyhedron の特異集合の近傍の取りうる形をリストアップすることから始まる. 求める  $L$  の branched shadow は, これらに, 頂点を増やさないように領域を加えていくことにより得られるが,  $L$  の双曲性 (特に  $L$  の補空間に本質的トーラスが存在しないこと) により, これは本質的に図 18 に示されているタワーと呼ばれるピース を貼ることにより得られ, 多様体の方ではこれは Dehn filling を施すことに対応する. こ



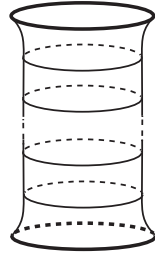


図 18 タワー.

れら特異集合の近傍のうち, 3 つは  $S^3$  内の自明な結び目の図 19 に挙げる図式  $U_1, U_2, U_3$  に対応する branched polyhedron  $P_{U_1}^*, P_{U_2}, P_{U_3}$  の特異集合の近傍と一致する. したがって, これら

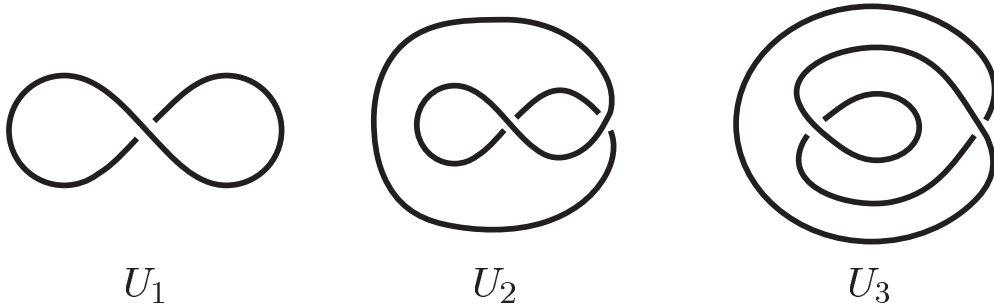


図 19 自明な結び目の図式  $U_1, U_2, U_3$ .

自明な結び目と各領域に対応する正則ファイバー, さらに  $P_{U_1}^*$  については  $f$  で色づけられた境界円周を合わせることでそれぞれ絡み目  $L_6, L_4, L_5$  が得られる. その他の場合も含めた branched shadow と絡み目との対応は図 20 のとおりである. ここで, 図 20 の左端下の branched shadow に対応する  $S^3$  内の絡み目が存在しないのは, この branched polyhedron にタワーをどのように貼っても, 得られる branched polyhedron が単連結にならないことから従う ( $(S^3, L)$  の shadow は boundary-decoration を忘れると単に  $S^3$  の shadow になるが, 一般に閉 3 次元多様体からその shadow への射影は, 基本群の間の全射準同型を誘導する). 他の絡み目は,  $S^3$  のスパインの考察から得られる. 一般に閉 3 次元多様体  $M$  のスパインのすべての領域に gleam 0 を与えたものは,  $M \# \bar{M}$  の shadow になる. したがって特に  $S^3$  の場合は, そのスパインのすべての領域に gleam 0 を与えたものは,  $S^3$  自身の shadow になる. 例えば 図 20 の左端上の絡み目の成分がそれぞれ 3 葉結び目とその鏡像との連結和, 自明な結び目であることは, 対応する branched polyhedron が abalone と呼ばれる  $S^3$  のスパインに対応していることからきている. (Abalone は 2 つの領域をもつスパインであり, その双対円周の一つは 3 葉結び目, もう一つは自明な結び目である. Abalone については池田 [13], Matveev [22] 等を参照.)

定理 2.1 と 4.1 より次が分かる.

系 4.2.  $L$  を  $S^3$  内の双曲的絡み目とする. カスプ特異点を持たない安定写像  $f : (S^3, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$

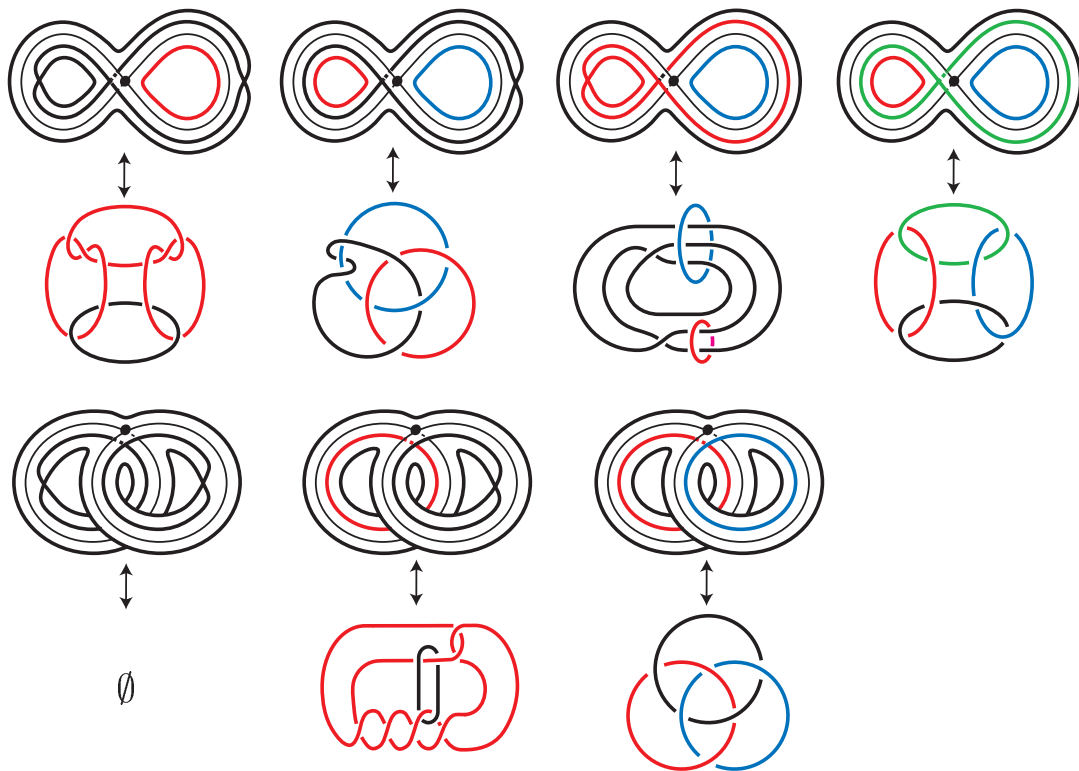


図 20 Branched shadow の形と対応する絡み目.

で  $|\Pi^2(f)| = 1$ ,  $\Pi^3(f) = \emptyset$  を満たすものが存在する必要十分条件は,  $L$  の補空間が図 17 にある絡み目  $L_1, L_2, \dots, L_6$  もしくはそれらの *Dehn filling* と同相であることである.

前章で与えた安定写像と branched shadow の間の明示的な関係により, 特に絡み目  $L_3, L_4, L_5, L_6$  については, 安定写像の  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーの位置を具体的に描くことができる.

系 4.3.  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$  について, *complexity* が 1 であり,  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーが図 21 の位置にある安定写像  $f : (S^3, L_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在する.

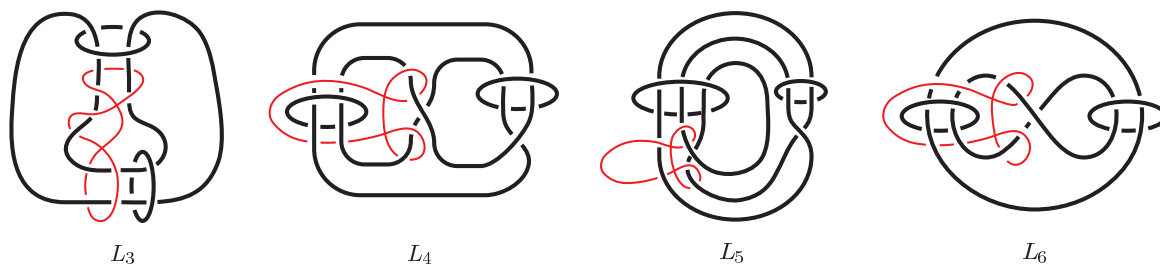


図 21  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーの位置.

例 4. 8 の字結び目  $K$  に対し, 図 22 に示されている位置に  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーをもち,  $\Pi^3$ -

型の特異ファイバーおよびカスプ特異点を持たない安定写像  $f$  が存在する. 命題 2.4 より stable map complexity が 0 となるのはグラフ絡み目のときだけなので  $\text{smc}(S^3, K) = 1$  が従う.

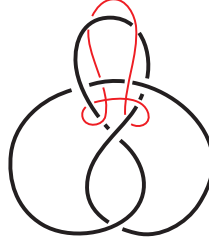


図 22 8 の字結び目の安定写像の  $\Pi^2$ -型の特異ファイバーの位置.

## 5 安定写像と双曲体積

本章では, shadow として special polyhedron を使う. ここで almost-special polyhedron  $P$  が special であるとは,  $V(P) \subset S(P) \subset P$  なる stratification が  $P$  の CW 構造を与えるときを言う. このとき特に  $S(P)$  は連結で  $\partial P = \emptyset$  である. 3 次元多様体の shadow が special polyhedron であるとき, special shadow と呼ぶ. 向き付け可能な任意の閉 3 次元多様体は special shadow を持つ (Turaev [31], Costantino [5] を参照).

$M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体,  $P$  を  $M$  の special shadow とし,  $\pi : M \rightarrow P$  を collapsing  $W \setminus P$  から誘導される射影とする (ただし  $M = \partial W$ ).  $M_{S(P)} = \pi^{-1}(\text{Nbd}(S(P); P))$  とおく. Costantino-Thurston [8] は  $M_{S(P)}$  を  $2c(P)$  個の標準的理想双曲正 8 面体に分割する方法を示した. これにより,  $M_{S(P)}$  には双曲構造が入ることがわかり, その体積は  $\text{vol}(M_{S(P)}) = 2c(P)V_{\text{oct}}$  となる.  $P$  の各領域は円盤であるので,  $M$  は  $M_{S(P)}$  から Dehn filling により得られることがわかる. 特に, Agol [1], [19] による 6-Theorem と Perelman [23, 24, 25] による幾何化定理により, 各境界での Dehn filling のスロープの長さがすべて 6 よりも長ければ,  $M$  は完備な有限体積の双曲構造を持つことが分かる.  $M_{S(P)}$  の双曲構造は標準的理想双曲正 8 面体の貼り合わせの (組み合わせの) 情報により明示的に与えられているから, Dehn filling のスロープの長さは special polyhedron  $P$  とその gleam の情報から与えられることになる.

$P$  を shadowed special polyhedron とする.  $P$  の各領域  $R$  に対し,  $\text{sl}(R) = \sqrt{(2g)^2 + k^2}$  とおく. ここで  $g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  は  $R$  の gleam,  $k$  は  $R$  の閉包の境界が  $P$  の頂点を通過する回数を表す. 後の補題 5.3 で示すとおり,  $\text{sl}(R)$  は  $M_{S(P)}$  の対応する境界トーラスに Dehn filling を施す際のスロープの長さに他ならない.  $P$  の領域  $R$  の  $\text{sl}(R)$  の最小値を  $\text{sl}(P) = \min_R \text{sl}(R)$  とおく.

命題 5.1.  $M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体,  $P$  を  $M$  の branched special shadow とする.

$\text{sl}(P) > 2\pi$  であるとき,  $M$  は双曲多様体であり次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 2 \text{smc}(M) V_{\text{oct}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\text{sl}(P)} \right)^2 \right)^{3/2} &\leq 2 c(P) V_{\text{oct}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\text{sl}(P)} \right)^2 \right)^{3/2} \\ &\leq \text{vol}(M) < 2 \text{smc}(M) V_{\text{oct}}. \end{aligned}$$

証明. 最初の不等式は定理 2.1 から直ちに従う. 2 つ目の不等式は定理 2.1 と下に挙げる命題 5.3 および Futer-Kalfagianni-Purcell [10, Theorem 1.1] からの帰結である. 最後の不等式は Costantino-Thurston [8, Theorem 3.37] と定理 2.1 から従う.  $\square$

命題 5.1 の不等式により, 次の shadow complexities, branched shadow complexities, stable map complexities に関する次の等式が得られる.

定理 5.2.  $M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体,  $P$  を  $M$  の branched special shadow とする.  $\text{sl}(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$  であるとき, 次の等式が成り立つ  $\text{sc}(M) = \text{bsc}(M) = \text{smc}(M) = c(P)$ .

証明. 仮定の不等式  $\text{sl}(P) > 2\pi\sqrt{2c(P)}$  より

$$1 - \frac{1}{c(P)} < 1 - 2 \left( \frac{2\pi}{\text{sl}(P)} \right)^2 < \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\text{sl}(P)} \right)^2 \right)^{3/2}$$

となるので, 不等式

$$0 < c(P) - c(P) \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\text{sl}(P)} \right)^2 \right)^{3/2} < 1$$

が得られる. 定義により  $\text{sc}(M)$ ,  $\text{bsc}(M)$ ,  $\text{smc}(M)$  はいずれも  $c(P)$  以下であるから, 上の不等式は  $c(P)$  を  $\text{sc}(M)$ ,  $\text{bsc}(M)$ ,  $\text{smc}(M)$  のどれに置き換えても成立する. そこで  $c(P)$  を  $\text{smc}(M)$  に置き換えて得られる不等式を補題 5.1 の不等式に適用すると

$$0 \leq \text{smc}(M) - \frac{\text{vol}(M)}{2V_{\text{oct}}} < 1$$

となる. 命題 5.1 の不等式は, stable map complexity についてのみならず, shadow complexity, branched shadow complexity polyhedron  $P$  の頂点の数についても成り立つので,  $\text{sc}(M)$ ,  $\text{bsc}(M)$ ,  $c(P)$  についても上と同様の不等式が成り立つ.  $\text{sc}(M)$ ,  $\text{bsc}(M)$ ,  $\text{smc}(M)$ ,  $c(P)$  はいずれも整数であるので, これらは一致する.  $\square$

$M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体,  $P$  を  $M$  の special shadow とする. Costantino-Thurston [8, Proposition 3.34] は  $M_{S(P)}$  のカスプの Euclid 構造を対応する領域  $R$  の  $\mathbb{Z}_2$ -gleam と  $R$  の閉包の境界が  $P$  の頂点を通過する回数を用いて記述した. 下記の補題の証明は彼らの論文に暗に書かれていたことを明示的に書き下したものであり, 本質的に新しい結果ではない. (Costantino-Frigerio-Martelli-Petronio [7] においても, 極大ホロカスプに関して調べられているが, そこでは gleam に関する記述は省略されている.)

補題 5.3.  $M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体,  $P$  を  $M$  の *special shadow* とする.  $P$  の領域を  $R_1, R_2, \dots, R_n$  とおく.  $l_i = R_i \cap \partial \text{Nbd}(S(P); P)$  とおき,  $l_i$  に対応する  $M_{S(P)}$  の境界トーラスを  $T_i$  とおく. このとき  $M_{S(P)}$  の内部の 極大なホロボール近傍  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  で, 次を満たすものが存在する.

- $M$  は  $M_{S(P)}$  からスローブ  $s_1 \subset T_1, s_2 \subset T_2, \dots, s_n \subset T_n$  に沿った *Dehn filling* により得られ,  $C$  に関するこれらスローブの長さはそれぞれ  $\text{sl}(R_1), \text{sl}(R_2), \dots, \text{sl}(R_n)$  になる.

証明.  $P$  の各頂点  $v_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, c(P)\}$ ) に対し,  $P_i = \text{Nbd}(v_i; P)$  とおき,  $\text{Nbd}(S(P); P)$  を和集合  $\bigcup_{i=1}^{c(P)} P_i$  とみなす.  $P_i$  の 3 次元 thickening  $X_i$  に対し, 次を満たす collapsing  $\rho_i : X_i \searrow P_i$  を指定する:

- $P_i \setminus S(P_i)$  内の点  $y$  に対し,  $\rho_i^{-1}(y) = \{y\} \times [-1, 1]$ ;
- $S(P_i) \setminus \{v_i\}$  内の点  $y$  に対し,  $\rho_i^{-1}(y)$  は Y-字グラフ;
- $\rho_i^{-1}(v_i)$  は X-字グラフ.

このとき,  $\partial X_i \setminus \text{Int}(\rho_i^{-1}(\partial P_i))$  は 4 つの円盤  $d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}, d_{i,4}$  からなり,  $\rho_i^{-1}(\partial P_i) \setminus \text{Nbd}(\rho_i^{-1}(S(P)))$  の閉包は 6 つの 4 角形  $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,6}$  からなる. これらの 4 角形に図 23 のように葉相構造を入れる.  $X = \bigcup_{i=1}^{c(P)} X_i$  を  $\text{Nbd}(S(P); P)$  の 3 次元 thickening とする.

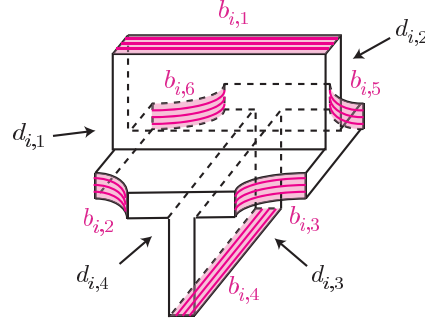


図 23  $P_i = \text{Nbd}(v_i; P)$ .

$W_i = X_i \times [-1, 1]$  とおく. ここで  $\text{Nbd}(S(P); P)$  の 4 次元 thickening  $W_0$  (これは  $X$  上の行列式直線束の各ファイバーを (Euclid 計量を適当に与えた後に)  $[-1, 1]$  に制限して得られるのであった) は, 各 4 次元 thickening  $W_1, W_2, \dots, W_{c(P)}$  を境界で貼り合わせることで得られることに注意する. このとき  $P$  自身の 4 次元 thickening  $W$  の境界  $\partial W$  は次のように分解される (図 24 参照):

$$W_i \cap \partial W = X_i \times \{-1\} \bigcup_{d_{i,j} \times \{-1\}} \left( \left( \bigcup_{i=1}^4 d_{i,j} \right) \times [-1, 1] \right) \bigcup_{d_{i,j} \times \{1\}} X_i \times \{1\}.$$

図 24 において,  $d_{i,j} \times \{\pm 1\}$  ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) を  $d_{i,j}^\pm$  と書き,  $b_{i,j} \times \{\pm 1\}$  ( $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) を  $b_{i,j}^\pm$  と書いている. さらに, 各 4 角形  $b_{i,j}^\pm$  は  $b_{i,j}$  上の葉相構造を引き継いでいる.

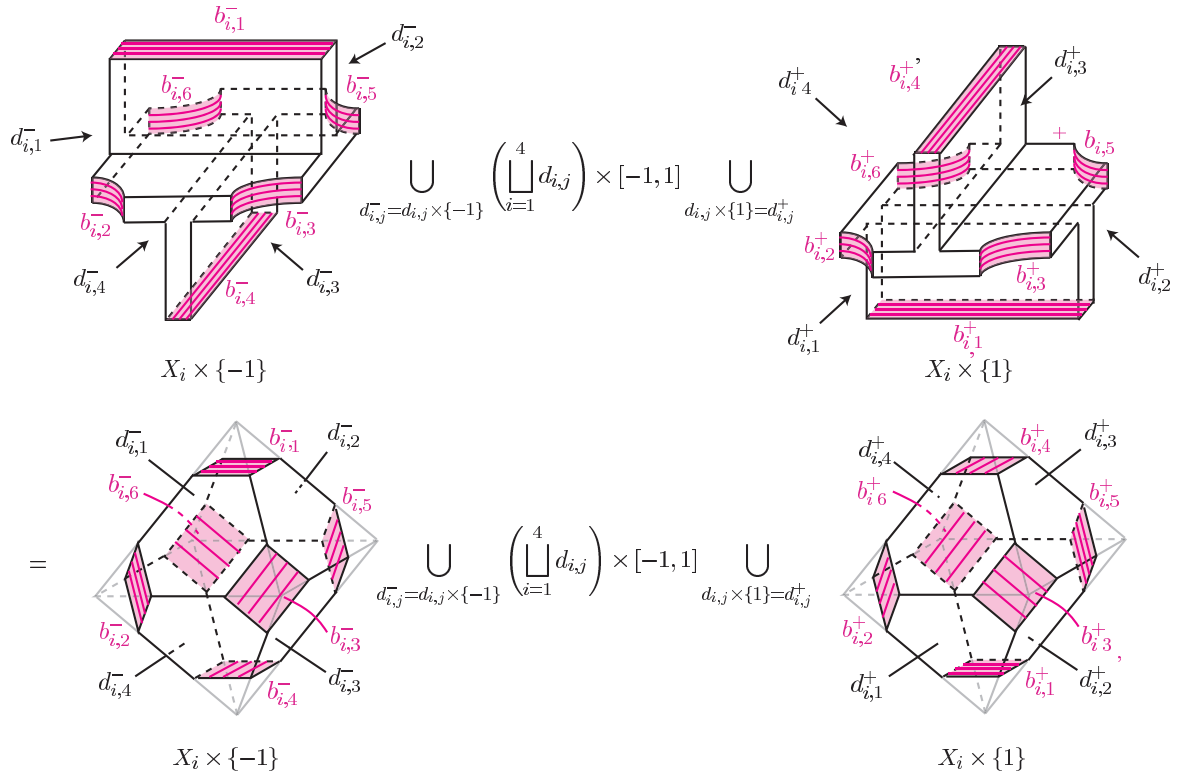


図 24  $W_i \cap \partial W$ . トポロジカルには  $(\prod_{i=1}^4 d_{i,j}) \times [-1, 1]$  の部分は無視できる. 従って  $W_i \cap \partial W$  は 2 つの切頂 8 面体  $X_i \times \{\pm 1\}$  を同一視  $d_{i,j}^- = d_{i,j}^+ (j \in \{1, 2, 3, 4\})$  によって貼り合わせたものとみなせる.

$\rho : X \setminus \text{Nbd}(S(P); P)$  を  $\rho_i (i \in \{1, 2, \dots, c(P)\})$  により得られる collapsing,  $\pi : W_0 \setminus \text{Nbd}(S(P); P)$  を  $\rho$  と射影  $[-1, 1] \rightarrow \{0\}$  により得られる collapsing とする.  $D_i = R_i \setminus \text{Int Nbd}(S(P), P) (i \in \{1, 2, \dots, c(P)\})$  とおく.  $P$  は各  $l_i$  に沿って  $\text{Nbd}(S(P); P)$  に円盤  $D_i$  を貼り合わせて得られることを思い出す.  $R$  の閉包の境界は  $P$  の頂点を  $k_i$  回通過するとする. このとき, 逆像  $\rho^{-1}(l_i)$  (これは アニュラスもしくは Möbius バンドである) は,  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i), \tau(i)}$  ( $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, c(P)\}, \tau(i) \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) の形で表せる.  $\rho^{-1}(l_i)$  がアニュラスのときは, ソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$  内でこのアニュラスは図 25 のようにかける. アニュラス  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i), \tau(i)}$  はソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$  において  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i), \tau(i)}^{\epsilon_i}$  と平行である. 従って gleam の定義から, 円盤  $D_i$  を  $l_i$  に沿って  $P'$  に貼り, これにより生じる領域  $R_i$  に gleam 0 を付すことは,  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i), \tau(i)}^{\epsilon_i}$  (これはトーラス  $T_i = \partial \pi^{-1}(l_i) \subset \partial X$  上にある) 上の葉相構造の葉に沿って  $X$  に Dehn filling を施すことに対応する. さらに, 領域  $R_i$  に gleam  $g_i \in \mathbb{Z}$  を付すことは, 上記の葉に  $\pi^{-1}(l_i)$  のメリディアンに沿った Dehn ツイストの  $g_i$  乗を施して得られるスロープ  $s_i$  に沿って  $X$  に Dehn filling を施すことに対応する. このスロープ  $s_i$  は  $g_i[\mu_i] + [\lambda_i] \in H_1(T_i; \mathbb{Z})$  (ただし,  $\mu_i$  はソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$  のメリディアン,  $\lambda_i$  は  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i), \tau(i)}^{\epsilon_i}$  上の葉相構造の葉) と表すことができることに注意する.

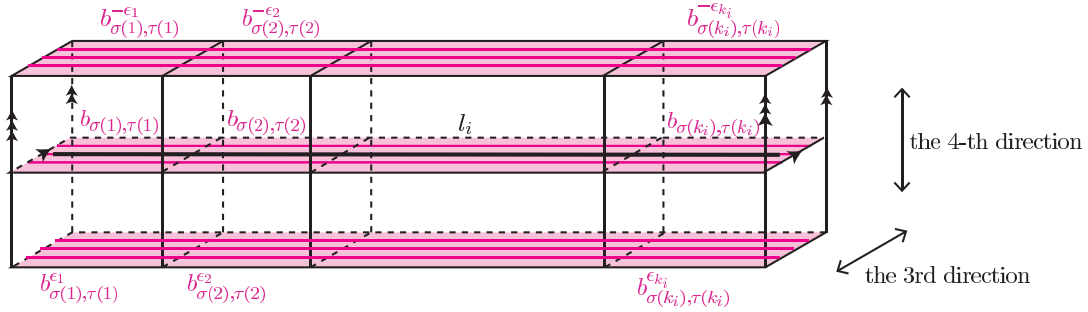


図 25  $\rho^{-1}(l_i)$  がアニュラスのときのソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$ . ただし, 図において  $\epsilon_i = \pm$ .

$\rho^{-1}(l_i)$  が Möbius バンドのときは, ソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$  内でこの Möbius バンドは図 25 のようにかかる. このときは, Möbius バンド  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)}$  はもはやソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$

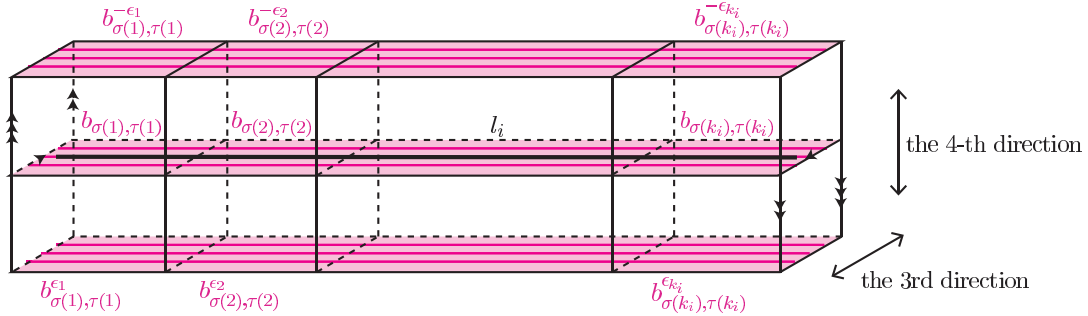


図 26  $\rho^{-1}(l_i)$  が Möbius バンドのときのソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$ .

において境界平行ではない.  $a_{\sigma(1),\tau(1)}^{\pm}$  を図 27 にあるような葉相構造付きの 4 角形とする. こ

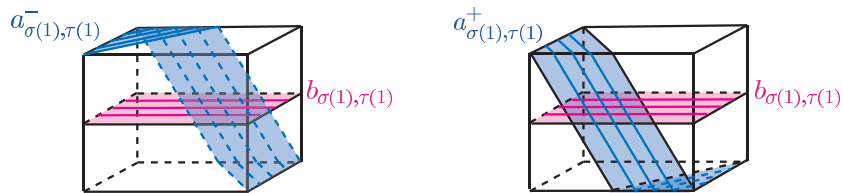


図 27 Gleam が半整数のときの葉相構造.

のとき, 和集合  $a_{\sigma(1),\tau(1)}^{\pm} \cup (\bigcup_{i=2}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)})$  は  $\pm 1/2$ -ツイストすると  $\bigcup_{i=1}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)}$  とイソトピックになる. 従って, この場合も gleam の定義により, 円盤  $D_i$  を  $l_i$  に沿って  $P'$  に貼り, これにより生じる領域  $R_i$  に gleam  $\pm 1/2$  を付すことは,  $a_{\sigma(1),\tau(1)}^{\pm} \cup (\bigcup_{i=2}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)})$  (これはトーラス  $T_i = \partial\pi^{-1}(l_i) \subset \partial X$  上にある) 上の葉相構造の葉に沿って  $X$  に Dehn filling を施すことに対応する. さらに, 領域  $R_i$  に gleam  $g_i \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$  を付すことは,  $a_{\sigma(1),\tau(1)}^{\pm} \cup (\bigcup_{i=2}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)})$  の葉に  $\pi^{-1}(l_i)$  のメリディアンに沿った Dehn ツイストの  $(g_i - 1/2)$  乗を施して得られるスロープ  $s_i$  に沿って  $X$  に Dehn filling を施すことに対応する. このスロープ  $s_i$  は  $(g_i - 1/2)[\mu_i] + [\lambda_i] \in H_1(T_i; \mathbb{Z})$

(ただし,  $\mu_i$  はソリッドトーラス  $\pi^{-1}(l_i)$  のメリディアン,  $\lambda_i$  は  $a_{\sigma(1),\tau(1)}^+ \cup (\bigcup_{i=2}^{k_i} b_{\sigma(i),\tau(i)})$  上の葉相構造の葉) と表すことができることに注意する.

Costantino-Thurston [8] で説明されているように,  $\text{Int } X$  は  $2c(P)$  個の標準的理想双曲正 8 面体の面を等長的に貼り合わせることによって得られ, これにより  $\text{Int } X$  に完備有限体積の双曲構造が入る. ここにある  $\text{Int } X$  の標準的理想双曲正 8 面体への分解は図 24 の分解に他ならない. 標準的理想双曲正 8 面体は, 6 個の単位 Euclid 正方形からなる極大ホロカスプ断面を持つ. この極大ホロカスプ断面は貼り合わせにより  $\text{Int } X$  の極大ホロポール近傍  $C$  を与える. この  $C$  に対して上記スローブ  $s_i$  の長さを計算すると,  $\text{sl}(R_i)$  に一致する.  $\square$

## 参考文献

- [1] Agol, I., Bounds on exceptional Dehn filling, *Geom. Topol.* **4** (2000), 431–449.
- [2] Agol, I., Storm, P. A., Thurston, W. P., Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds. With an appendix by Nathan Dunfield, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), no. 4, 1053–1077.
- [3] Benedetti, R., Petronio, C., *Branched standard spines of 3-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1653**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [4] Burlet, O., de Rham, G., Sur certaines applications génériques d’une variété close à 3 dimensions dans le plan, *Enseignement Math. (2)* **20** (1974), 275–292.
- [5] Costantino, F., *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*, Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2005.
- [6] Costantino, F., Branched shadows and complex structures of 4-manifolds, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), no. 11, 1429–1454.
- [7] Costantino, F., Frigerio, R., Martelli, B., Petronio, C., Triangulations of 3-manifolds, hyperbolic relative handlebodies, and Dehn filling, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), no. 4, 903–933.
- [8] Costantino, F., Thurston, D., 3-manifolds efficiently bound 4-manifolds, *J. Topol.* **1** (2008), no. 3, 703–745.
- [9] Endoh, M., Ishii, I., A new complexity for 3-manifolds, *Japan. J. Math. (N.S.)* **31** (2005), no. 1, 131–156.
- [10] Futer, D., Kalfagianni, E., Purcell, J. S., Dehn filling, volume, and the Jones polynomial, *J. Differential Geom.* **78** (2008), no. 3, 429–464.
- [11] Golubitsky, M., Guillemin, V., *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics **14**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [12] Gromov, M., Singularities, expanders and topology of maps. I. Homology versus volume in the spaces of cycles, *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), no. 2, 743–841.



- [13] Ikeda, H., Acyclic fake surfaces, *Topology* **10** (1971), 9–36.
- [14] Ishii, I., Flows and spines, *Tokyo J. Math.* **9** (1986), no. 2, 505–525.
- [15] Ishikawa, M., Koda, Y., Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, arXiv:1403.0596.
- [16] Kalmár, B., Stipsicz, A. I., Maps on 3-manifolds given by surgery, *Pacific J. Math.* **257** (2012), no. 1, 9–35.
- [17] Koda, Y., Branched spines and Heegaard genus of 3-manifolds, *Manuscripta Math.* **123** (2007), no. 3, 285–299.
- [18] Kushner, L., Levine, H., Porto, P., Mapping three-manifolds into the plane. I, *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)* **29** (1984), no. 1, 11–33.
- [19] Lackenby, M., Word hyperbolic Dehn surgery, *Invent. Math.* **140** (2000), no. 2, 243–282.
- [20] Levine, H., Elimination of cusps, *Topology* **3** (1965), suppl. 2, 263–296.
- [21] Levine, H., *Classifying immersions into  $\mathbb{R}^4$  over stable maps of 3-manifolds into  $\mathbb{R}^2$* , *Lecture Notes in Mathematics* **1157**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [22] Matveev, S. V., *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*, *Algorithms Comput. Math.* **9**, Springer, Berlin, 2003.
- [23] Perelman, G., The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159.
- [24] Perelman, G., Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109.
- [25] Perelman, G., Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math/0307245.
- [26] Petronio, C., Generic flows on 3-manifolds, arXiv:1211.6445.
- [27] Saeki, O., Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Topology* **35** (1996), no. 3, 671–698.
- [28] Saeki, O., *Topology of singular fibers of differentiable maps*, *Lecture Notes in Mathematics* **1854**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [29] Thurston, D., The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world, *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, pp. 337–362, *Geom. Topol. Monogr.* **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [30] Turaev, V. G., Shadow links and face models of statistical mechanics, *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 1, 35–74.
- [31] Turaev, V. G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, *de Gruyter Studies in Mathematics* **18**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [32] Yoshida, K., The minimal volume orientable hyperbolic 3-manifold with 4 cusps, *Pacific J. Math.* **266** (2013), no. 2, 457–476.