

Topological symmetry groups and mapping class groups for spatial graphs

古宇田 悠哉

概要

3次元球面内の空間グラフの対称性を数学的に記述するものとして、位相的対称群 (topological symmetry group) と写像類群 (mapping class group) という 2 つの群が考えられる。本稿では、これら 2 つの群が同型になるための必要十分条件を与える。本稿の内容は Sangbum Cho 氏との共同研究 [1] に基づく。

導入

本稿ではグラフとは、次元が高々 1 の単体複体の多面体であるとする。3次元多様体に埋め込まれたグラフを空間グラフとよぶ。円周はグラフであるから、空間グラフ理論は、結び目理論の拡張である。

S^3 内の空間グラフ Γ に対し、対 (S^3, Γ) (あるいは単に Γ) の写像類群 $MCG(S^3, \Gamma)$ とは Γ を Γ 自身に写す S^3 の自己同相写像のイソトピー類のなす群のことをいう。この定義において S^3 の自己同相写像として向き付け可能なものだけを許して出来る群を $MCG_+(S^3, \Gamma)$ と書く。これらの群は、与えられた空間グラフが S^3 の中でどのくらいの対称性を持っているのかということを表している。[17] において、群 $MCG(S^3, \Gamma)$ は有限表示可能であることが示されている。

一方で、Simon は論文 [20] で空間グラフの対称性を表す位相的対称群 (topological symmetry group) $TSG(S^3, \Gamma)$ というものを定義している ([4, 5] 参照)。この群は S^3 の自己同相写像に拡張可能な元から構成される、 Γ の (単体複体としての) 自己同型群の部分群である。上の定義で S^3 に拡張される自己同相写像として、向き付け可能なもののみを許したものを $TSG_+(S^3, \Gamma)$ と書く。

本稿の目的は、次の問に答えることである (定理 2.4, 3.2 参照)。

問. $TSG(S^3, \Gamma)$ (あるいは $TSG_+(S^3, \Gamma)$) と $MCG(S^3, \Gamma)$ (あるいは $MCG_+(S^3, \Gamma)$) が同型になるための空間グラフ $\Gamma \subset S^3$ の位相的条件を与えよ。

Pereleman による Thurston の幾何化予想の肯定的証明を仮定すると、この問に対する解答 (定理 2.4) は、例えば Γ が 3-連結であるとき、群 $MCG_+(S^3, \Gamma)$ が $SO(4)$ の有限部分群であることを意味する ([4] 参照)。

記号. X を位相空間とし Y を X の部分空間とすると、 Y の内部を $\text{Int } Y$, Y の正則近傍を $N(Y; X)$ (または単に $N(Y)$) と表す。 M を 3次元多様体、 L を M の (境界付きでもよい) 部分多様

体とする. L の次元が 2 以下のとき, $E(L) = M \setminus \text{Int } N(L)$, L の次元が 3 のとき, $E(L) = M \setminus \text{Int } L$ と表す.

1 写像類群と位相的対称群

以下の議論はすべて区分的線形カテゴリーで行う.

1.1 写像類群

M をコンパクトで向き付け可能な多様体とし, N, N_1, \dots, N_m を (空かもしれない) M の部分空間とする. $\text{Homeo}(M, N_1, \dots, N_m)$ で各 N_i を N_i 自身へ写す M の自己同相写像からなる空間を表し, $\text{Homeo}(M \text{ rel } N)$ で N を点ごとに止める M の自己同相写像からなる空間を表す. このとき, 群 $\pi_0(\text{Homeo}(M, N_1, \dots, N_m))$, $\pi_0(\text{Homeo}(M \text{ rel } N))$ をそれぞれ $\mathcal{MCG}(M, N_1, \dots, N_m)$, $\mathcal{MCG}(M \text{ rel } N)$ と書き, $\mathcal{MCG}(M, N_1, \dots, N_m)$ を (M, N_1, \dots, N_m) の写像類群とよぶ. $\text{Homeo}_+(M, N)$ や $\mathcal{MCG}_+(M, N)$ のように, 添え字に $+$ を加えたときは, M の向きを保つ自己同相写像のみを考えて同様に得られる群を表すことにする.

導入部で述べたように, 本稿ではグラフとは, 1 次元以下の単体複体の多面体を表す. グラフ上で開区間と同相な近傍を持たない点を頂点とよび, グラフ G のすべての頂点の集合を $v(G)$ と書く. 以下, 1 価の頂点 (すなわち, $[0, 1)$ と同相な開近傍を持つ頂点) を持たないグラフのみを考える. $G \setminus v(G)$ の各連結成分の閉包を辺とよぶ.

3 次元多様体に埋め込まれたグラフ Γ を空間グラフとよぶ. 2 つの空間グラフは, 互いにアンビエントイソトピックであるとき, 同値であるという. ここで, 結び目は空間グラフの特別な場合であることに注意する.

空間グラフ $\Gamma \subset S^3$ に対し, 群 $\mathcal{MCG}(S^3, \Gamma)$ は S^3 における Γ の対称性を記述している. 特に, $K \subset S^3$ を結び目とすると, 群 $\mathcal{MCG}(S^3, K)$ は K の対称群 (symmetry group) とよばれている ([16] 参照).

プレプリント [17] の中で, 筆者は次を証明した:

定理 1.1 ([17]). 任意の空間グラフ $\Gamma \in S^3$ に対し, 群 $\mathcal{MCG}(S^3, \Gamma)$ は有限表示可能である.

1.2 位相的対称群

Γ を S^3 内の空間グラフとする. X を $\Gamma = |X|$ なる 1 次元単体複体とする. 単体複体 X の単体的自己同型群を $\text{Aut}(\Gamma)$ とおく. 明らかに $\text{Aut}(\Gamma)$ は X の取り方によらない. 空間グラフ Γ の位相的対称群 (topological symmetry group) $\text{TSG}(S^3, \Gamma)$, 正の位相的対称群 $\text{TSG}_+(S^3, \Gamma)$ とは, 次で定義される $\text{Aut}(\Gamma)$ の部分群のことをいう:

$$\text{TSG}(S^3, \Gamma) = \{f \in \text{Aut}(\Gamma) \mid \tilde{f} \in \text{Homeo}(S^3, \Gamma) \text{ で } \tilde{f}|_{\Gamma} \text{ が } f \text{ を誘導するようなものが存在する} \},$$

$\text{TSG}(S^3, \Gamma) = \{f \in \text{Aut}(\Gamma) \mid \tilde{f} \in \text{Homeo}_+(S^3, \Gamma) \text{ で } \tilde{f}|_\Gamma \text{ が } f \text{ を誘導するようなものが存在する} \}$,

これらの群は, Simon [20] により定義された (詳細については [4, 5] を参照). 明らかに $\text{TSG}(S^3, \Gamma)$ は有限群であることに注意する.

定義より直ちに次が従う:

補題 1.2 ([17]). 空間グラフ $\Gamma \in S^3$ に対し, 次の短完全系列が存在する:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \text{MCG}(S^3 \text{ rel } \Gamma) \rightarrow \text{MCG}(S^3, \Gamma) \rightarrow \text{TSG}(S^3, \Gamma) \rightarrow 1, \\ (1 \rightarrow \text{MCG}_+(S^3 \text{ rel } \Gamma) \rightarrow \text{MCG}_+(S^3, \Gamma) \rightarrow \text{TSG}_+(S^3, \Gamma) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

したがって, $\text{MCG}(S^3, \Gamma) \cong \text{TSG}(S^3, \Gamma)$ ($\text{MCG}_+(S^3, \Gamma) \cong \text{TSG}_+(S^3, \Gamma)$) であるのは $\text{MCG}(S^3 \text{ rel } \Gamma) \cong 1$ ($\text{MCG}_+(S^3 \text{ rel } \Gamma) \cong 1$) であるときかつそのときに限る.

この補題により, 導入部で挙げた問に答えるためには, いつ $\text{MCG}(S^3 \text{ rel } \Gamma)$ (あるいは $\text{MCG}_+(S^3 \text{ rel } \Gamma)$) が自明になるのかを調べればよいことが分かる.

1.3 境界模様 の理論

この節では, Johansson [15], McCullough [18] らによる境界模様 (boundary pattern) の理論を振り返る.

M をコンパクトな 3 次元多様体とする. M の境界模様とは ∂M 内のコンパクト曲面の集合 \underline{m} で, \underline{m} から i 個の曲面を選ぶと, これらの共通部分は (空であっても良い) $(3-i)$ 次元多様体からなるものをいう. 境界模様が完全 (perfect) であるとは, $\bigcup_{B \in \underline{m}} B = \partial M$ が成り立つときをいう.

3 次元多様体の境界模様 \underline{m} が有用 (useful) であるとは, M に適切に埋め込まれた円盤 D で各 ∂B ($B \in \underline{m}$) と横断的に交わり, $\#(D \cap (\bigcup_{B \in \underline{m}} \partial B)) \leq 3$ を満たすものは, $E \cap (\bigcup_{B \in \underline{m}} \partial B)$ が $\partial D \cap (\bigcup_{B \in \underline{m}} \partial B)$ 上の錐となる円盤 E を ∂M 上で張るときをいう.

完全な境界模様 \underline{m} 付きの 3 次元多様体 M が単純 (simple) であるとは, 次を満たすときをいう:

1. M は既約であり, \underline{m} の各要素 B は圧縮不可能である,
2. M 内の各圧縮不可能トーラスは \underline{m} の要素と平行である,
3. $\partial A \cap (\bigcup_{B \in \underline{m}} \partial B) = \emptyset$ を満たす M 内の各アニュラスは圧縮可能であるか \underline{m} の要素と平行である.

境界模様 \underline{m} 付きの 3 次元多様体 M の写像類群 $\text{MCG}(M, \underline{m})$ を $\text{MCG}(M, B_1, B_2, \dots, B_k)$, ただし $\underline{m} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$, で定義する.

定理 1.3 ([15] Proposition 27.1). 完全で有用な境界模様付きの単純な 3 次元多様体 (M, \underline{m}) に対し, $\text{MCG}(M, \underline{m})$ は有限である.

2 正の位相的対称群と正の写像類群

$\Gamma \subset S^3$ を空間グラフとする. $N(\Gamma)$ で Γ の双対になっている本質的円盤の集合を $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ とおく. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し $A_i = \partial N(\Gamma) \cap N(D_i; N(\Gamma))$ とおく. $\partial N(\Gamma) \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int } A_i$ の成分を B_1, B_2, \dots, B_m とおく. $\underline{m}(\Gamma) = \{A_i\}_{i=1}^n \cup \{B_j\}_{j=1}^m$ は $E(\Gamma)$ の完全な境界模様である.

Γ のループ e_i に対応する各円盤 D_i に対し, $N(D_i; N(\Gamma)) \cap \partial N(\Gamma)$ を $S^1 \times [0, 1]$ とみなし, これを 3 つのアニュラス $S^1 \times [0, 1/3]$, $S^1 \times [1/3, 2/3]$, $S^1 \times [2/3, 1]$ に分割する. このようにして得られる $E(\Gamma)$ の完全で有用な境界模様を $\underline{n}(\Gamma)$ とおく.

補題 2.1 ([17]). 任意の空間グラフ $\Gamma \subset S^3$ は次を満たす:

$$\begin{aligned} \mathcal{MCG}(S^3, \Gamma) &\cong \mathcal{MCG}(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma)), \\ \mathcal{MCG}_+(S^3, \Gamma) &\cong \mathcal{MCG}_+(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma)). \end{aligned}$$

3 次元球面に埋め込まれたハンドル体を ハンドル体結び目とよぶ. $E(V)$ は既約であることに注意する. 3 次元多様体为非トーラス的であるとは, 本質的トーラスを含まないときをいった.

補題 2.2. $V \subset S^3$ を種数が 2 以上のハンドル体結び目で $E(V)$ が非トーラス的であるものとする. このとき $\mathcal{MCG}_+(E(V) \text{ rel } \partial E(V)) = 1$ である.

証明はファイブレーション $\text{Homeo}_+(E(V)) \rightarrow \text{Homeo}_+(\partial E(V))$ に対応するホモトピー長完全系列と境界模様に関する考察を組み合わせるにより得られる. V の種数が 2 以上であるという条件は, $\pi_1(\text{Homeo}_+(\partial E(V))) = 1$ である ([6, 7, 8] 参照) という事実を用いる部分で本質的に効いている.

ハンドル体 V に対し, 群 $\mathcal{MCG}(V \text{ rel } \partial V)$ は自明であるから上の補題より直ちに次が得られる:

系 2.3. $V \subset S^3$ を種数が 2 以上のハンドル体結び目で $E(V)$ が非トーラス的であるものとする. このとき $\mathcal{MCG}_+(S^3 \text{ rel } V) \cong 1$ であるのは $E(V)$ が非トーラス的であるときかつそのときに限る.

この系は $E(V)$ が非トーラス的であるとき, $\mathcal{MCG}_+(S^3, V)$ をハンドル体群 $\mathcal{MCG}_+(V)$ の部分群とみなすことができるということを意味する.

定義. Γ を S^3 内の空間グラフとする.

1. P を S^3 に埋め込まれた 2 次元球面で, $P \cap \Gamma$ が Γ の 1 つの頂点であるものとする. $S^3 \setminus P$ の各連結成分が Γ の非自明な部分を含むとき, P は Γ のタイプ I 球面であるという (図 1 の左参照).
2. P を S^3 に埋め込まれた 2 次元球面で, $P \cap \Gamma$ が Γ のちょうど 2 つの頂点であるものとする. $S^3 \setminus P$ の各連結成分の閉包と Γ との共通部分が 2 点でも 1 本の弧でもなく, また, アニュラ

ス $P \cap E(\Gamma)$ が $E(\Gamma)$ で圧縮不可能であるとき, P は Γ のタイプ II 球面であるという (図 1 の中央参照).

3. 2 次元球面の 2 点を指定し, この 2 点を 1 点 p に同一視して得られる空間を p をつまみ点 (pinch point) とする つまみ 球面 (pinched sphere) とよぶ. P を S^3 に埋め込まれたつまみ球面で, $P \cap \Gamma$ が Γ の 1 つの頂点かつ P のつまみ点であるものとする. $(S^3 \setminus P) \cap \Gamma$ のどの連結成分の閉包も 1 つの頂点, 1 つの辺, 1 つのループのいずれでもなく, また, アニュラス $P \cap E(\Gamma)$ が $E(\Gamma)$ で圧縮不可能であるとき, P は Γ のタイプ III 球面であるという (図 1 の右参照).

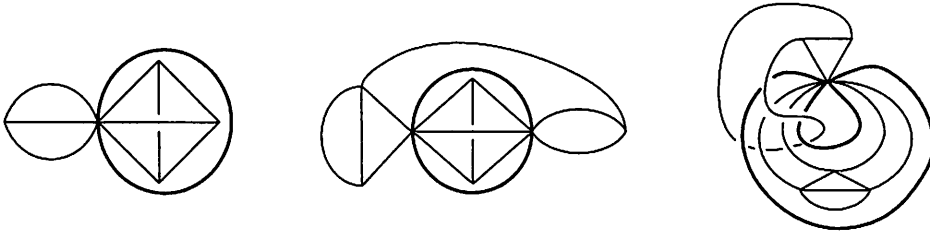


図 1 Type I, II and III spheres

定理 2.4. Γ を S^3 内の空間グラフで結び目ではないものとする. このとき, $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ が成り立つ必要十分条件は, $E(\Gamma)$ が非トーラス的でありかつタイプ I, II, III 球面のいずれも含まないことである.

定理の主張のうち, 必要性は直ちに従う. 補題 1.2, 2.1 より, 十分性を証明するには, $E(\Gamma)$ が非トーラス的でありタイプ I, II, III 球面のいずれも含まないとき, $MCG(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma)) = 1$ であることを示せばよい. 定理 1.3 より, $MCG(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma))$ が有限群であることが分かり, 補題 2.2 と境界模様の組み合わせ的な考察により, $MCG(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma))$ が有限位数の元を持たないことを示すことができる.

$\Gamma \subset S^3$ を空間グラフとする. もし Γ がタイプ I, II, III 球面のいずれかを持てば, $MCG_+(S^3, \Gamma)$ は有限群にはならない. 実際, その球面と $E(\Gamma)$ との共通部分が与える本質的円盤あるいは本質的アニュラスに沿ったツイストは $MCG_+(E(\Gamma), \underline{n}(\Gamma))$ の無限位数の元を定義する. 従って次を得る:

系 2.5. Γ を S^3 内の空間グラフで結び目ではないものとする. $MCG_+(S^3, \Gamma)$ が有限であるのは $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ が成り立つときかつそのときに限る.

k を自然数とする. グラフ Γ が k -連結であるとは, $\Gamma \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ が非連結になるような $k-1$ 個の頂点集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ が存在しないときをいう.

次の系は定理 2.4 から直ちに従う.

系 2.6. Γ をグラフとする. Γ の S^3 へのすべての埋め込みが $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ を満たすのは, Γ が 3-連結であるときかつそのときに限る.

系 2.6 と [4] より, 特に Γ が 3-連結であるとき群 $MCG_+(S^3, \Gamma)$ は $SO(4)$ の有限部分群であることがわかる. Γ が 3-連結でなくても, Γ の S^3 へのほとんどの埋め込みは $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ を満たすことに注意する (4 節の例を参照).

3 位相的対称群と写像類群

前節では正の写像類群 $MCG_+(S^3, \Gamma)$ と正の位相的対称群 $TSG_+(S^3, \Gamma)$ が同型になるために空間グラフ $\Gamma \subset S^3$ が満たすべき位相的な必要十分条件を与えた. 当然のことながら, $MCG_+(S^3, \Gamma)$ が $TSG_+(S^3, \Gamma)$ が同型であっても, $MCG(S^3, \Gamma)$ が $TSG(S^3, \Gamma)$ と同型になるとは限らない. 自明な例としては, S^3 内の 2 次元球面 S^2 に埋め込まれた 3-連結空間グラフが挙げられる. この場合, 前節の定理 2.4 より $MCG_+(S^3 \text{ rel } \Gamma) \cong 1$ が成り立つ. 一方, S^2 に沿った S^3 のリフレクション f を考えると, f は S^2 を点ごとに止めるから, 特に Γ 上では恒等写像になっている. f は向きを変えるので結局 $MCG(S^3 \text{ rel } \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を得る. 補題 1.2, より, これは $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ であるが $MCG(S^3, \Gamma) \not\cong TSG(S^3, \Gamma)$ となることを意味する. 本節では, ここで与えた例がこのようなのが生じる唯一の例であるということを述べる.

命題 3.1. Γ を S^3 内の空間グラフで結び目ではないものとする. h を S^3 の向きを変える自己同相写像で, $h^2 \in \text{Homeo}_+(S^3 \text{ rel } \Gamma)$ が恒等写像と Γ を止めてイソトピックなものとする. このとき, h と Γ を止めてイソトピックな元 $f \in \text{Homeo}_+(S^3 \text{ rel } \Gamma)$ で $f^2 = \text{id}$ を満たすものが存在する.

証明は, 空間グラフの外部空間 $E(\Gamma)$ に関する Nielsen 実現問題 [11, 12] で得られる同相写像を空間グラフの近傍 $N(\Gamma)$ に延長できることを示すことで得られる.

空間グラフ $\Gamma \subset S^3$ が平面的に埋め込まれているとは, Γ が S^3 内のある球面 S^2 上に埋め込まれているときをいう.

定理 3.2. Γ を S^3 内の空間グラフで結び目ではないものとし, $MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma)$ が成り立っているとする. このとき $MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG(S^3, \Gamma)$ が成り立つ必要十分条件は, Γ が平面的に埋め込まれていないことである.

定理の主張の必要性は, 本節の冒頭の解説より明らかである. 必要性の証明は, Smith 理論 [21] ([14] 参照), すなわち S^3 内の向きを変える対合の固定点は, S^2 か 2 点集合であるという事実を補題 3.1 で得られた写像 f に適用することにより得られる.

注意. 定理 3.2 は, 直接的には $MCG_+(S^3 \text{ rel } \Gamma) \cong 1$ という条件のもとで $MCG(S^3 \text{ rel } \Gamma) \neq MCG_+(S^3 \text{ rel } \Gamma)$ が成り立つのは Γ が平面的に埋め込まれているときかつそのときに限るということを行っている. 群 $MCG(S^3, \Gamma)$ が $MCG_+(S^3, \Gamma)$ と異なるための条件を求める問題 (すなわち, カ

イラリティーの問題) は, 上の議論とは別の方向の興味深い問題である ([19] 参照). 例えば, Γ を 図 2 に描かれた空間グラフとすると Γ は平面的に埋め込まれていないが $MCG(S^3, \Gamma)$ は $MCG_+(S^3, \Gamma)$ と異なっていることが簡単に確かめられる.

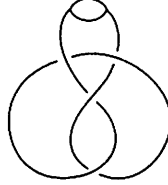


図 2

4 例

S^3 内の空間グラフの簡単で重要な例として, 外部空間がハンドル体になっているものが挙げられる. これらのグラフはトンネル数 1 の結び目, あるいは絡み目とそのトンネルとの和集合として与えられる. S^3 内の結び目あるいは絡み目がトンネル数 1 であるとは, $K \cap \tau = K \cap \partial\tau$ なる単純弧 $\tau \subset S^3$ (これを K の (結び目解消) トンネルとよぶ) で $E(K \cup \tau)$ が種数 2 のハンドル体になるものが存在するときをいう. $\partial\tau$ が 1 点になること (すなわち, トンネルが単純弧ではなく, 単純閉曲線こと) を許すと, 空間グラフ $\Gamma = K \cup \tau$ は K が結び目であるとき θ -カーブか 2 弁のブーケ, K が 2 成分の絡み目であるとき 手錠グラフになる.

本節では, Γ がトンネル数 1 の結び目あるいは絡み目とそのトンネルとの和集合であるときに, 群 $MCG_+(S^3, \Gamma)$, $MCG(S^3, \Gamma)$, $TSG_+(S^3, \Gamma)$, $TSG(S^3, \Gamma)$ を完全に決定する. 次の補題は [2] Proposition 17.2 を本稿の言葉で書き下したものである:

補題 4.1. Γ を S^3 内のトンネル数 1 の結び目あるいは絡み目 K と, そのトンネル τ との和集合である θ -カーブか手錠グラフとする.

1. K が Hopf 絡み目であり, τ が K の唯一のトンネルであるとき, $MCG(S^3, \Gamma)$ は位数 8 の 2 面体群 D_4 と同型になる.
2. K が Hopf 絡み目ではない非自明な 2-橋結び目あるいは絡み目であり, τ がその上部 (upper) あるいは下部 (lower) トンネルであるとき, $MCG(S^3, \Gamma)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型になる.
3. その他のとき, $MCG(S^3, \Gamma)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型になる.

補題 4.1 と定理 2.4, 3.2 を用いて計算することにより, 次の命題が直ちに得られる. ここで, 平面的に埋め込まれた手錠グラフあるいはブーケはタイプ I 球面を持ち, 下の命題の中で扱われているその他の空間グラフはタイプ I, II, III 球面のいずれも持たないことに注意する.

命題 4.2. Γ を S^3 内のトンネル数 1 の結び目あるいは絡み目 K と, そのトンネル γ との和集合とする.

1. Γ が θ -カーブであるとする.

(a) Γ が平面的に埋め込まれているとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) = \text{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_3,$$

$$MCG(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes MCG_+(S^3, \Gamma),$$

(ただし, D_3 は位数 6 の 2 面体群を表す.)

(b) Γ が非自明な 2-橋結び目とその上部あるいは下部トンネルとの和集合であるとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) = MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) \\ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(c) その他のとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) = MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2. Γ が手錠グラフであるとする.

(a) Γ が平面的に埋め込まれているとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

$$MCG(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes MCG_+(S^3, \Gamma),$$

$$TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) = \text{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(ここで, $TSG_+(S^3, \Gamma)$ と $TSG(S^3, \Gamma)$ は (位数 8 の) 有限群であるのに対し, $MCG_+(S^3, \Gamma)$ と $MCG(S^3, \Gamma)$ は無限群になっていることに注意する.)

(b) Γ が Hopf 絡み目とその唯一のトンネルとの和集合であるとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes MCG_+(S^3, \Gamma) \cong D_4.$$

(c) Γ が Hopf 絡み目でない 2-橋絡み目とその上部あるいは下部トンネルとの和集合であるとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) = MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) \\ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(d) その他のとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) = MCG(S^3, \Gamma) \cong TSG_+(S^3, \Gamma) = TSG(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3. 最後に, Γ が 2 弁のブーケであるとする.

(a) Γ が平面的に埋め込まれているとき

$$MCG_+(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

$$MCG(S^3, \Gamma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes MCG_+(S^3, \Gamma),$$

$$\mathrm{TSG}_+(S^3, \Gamma) = \mathrm{TSG}(S^3, \Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(b) その他のとき

$$\mathcal{MCG}_+(S^3, \Gamma) = \mathcal{MCG}(S^3, \Gamma) \cong \mathrm{TSG}_+(S^3, \Gamma) = \mathrm{TSG}(S^3, \Gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

参考文献

- [1] Cho, S., Koda, Y., Topological symmetry groups and mapping class groups for spatial graphs, arXiv:1111.2668.
- [2] Cho, S., McCullough, D., The tree of knot tunnels, *Geom. Topol.* **13** (2009), pp769–815.
- [3] Fadell, E., Neuwirth, L., Configuration spaces, *Math. Scand.* **10** (1962), 111–118.
- [4] Flapan, E., Naimi, R., Pommersheim, J., Tamvakis, H., Topological symmetry groups of embedded graphs in the 3-sphere, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), 317–354.
- [5] Flapan, E., Tamvakis, H., Topological Symmetry Groups of Graphs in 3-Manifolds, arXiv:1108.2880.
- [6] Hamstrom, M.-E., Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes, *Duke Math. J.* (1962), 657–662.
- [7] Hamstrom, M.-E., The space of homeomorphisms on a torus, *Illinois J. Math.* (1965), 59–65.
- [8] Hamstrom, M.-E., Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Illinois J. Math.* (1966), 563–573.
- [9] Hamstrom, M.-E., Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 207–230.
- [10] Hatcher, A., McCullough, D., Finiteness of classifying spaces of relative diffeomorphism groups of 3-manifolds, *Geom. Topol.* **1** (1997), 91–109.
- [11] Heil, W., Tollefson, J. L., Deforming homotopy involutions of 3-manifolds to involutions, *Topology* **17** (1978), 349–365.
- [12] Heil, W., Tollefson, J. L., Deforming homotopy involutions of 3-manifolds to involutions. II, *Topology* **22** (1983), 169–172.
- [13] Heil, W., Tollefson, J. L., On Nielsen’s theorem for 3-manifolds, *Yokohama Math. J.* **35** (1987), 1–20.
- [14] Hirsch, M. W., Smale, S., On involutions of the 3-sphere, *Amer. J. Math.* **81** (1959) 893–900.
- [15] Johansson, K., *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., **761**, Springer, Berlin, 1979.
- [16] Kawauchi, A., *Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [17] Koda, Y., Automorphisms of the 3-sphere that preserve spatial graphs and handlebody-

knots, arXiv:1106.4777.

- [18] McCullough, D., Virtually geometrically finite mapping class groups of 3-manifolds, *J. Diff. Geom.* **33** (1991), 1–65.
- [19] Nikkuni, R., Taniyama, K., Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, *Fund. Math.* **205** (2009), 219–236.
- [20] Simon, J, Topological chirality of certain molecules, *Topology* **25** (1986), 229–235.
- [21] P. A. Smith, “Fixed points of periodic transformations”, Appendix B in Lefschetz, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, New York, 1942. New York, 1942.