

A Method of Constructing Word Hyperbolic 3-Manifolds

慶應義塾大学大学院数理科学研究科
古宇田 悠哉*

2003 年 10 月 29 日

概要

この報告書では、3-manifold の fundamental group の hyperbolicity と DS-diagram の関係について考える。

Introduction

1 Preliminaries

1.1 DS-diagram

M を compact orientable closed 3-manifold とする。 M 内の 2-polyhedron P が *simple polyhedron* であるとは、各点の neighborhood が以下のいずれかと homeomorphic であるときをいう。

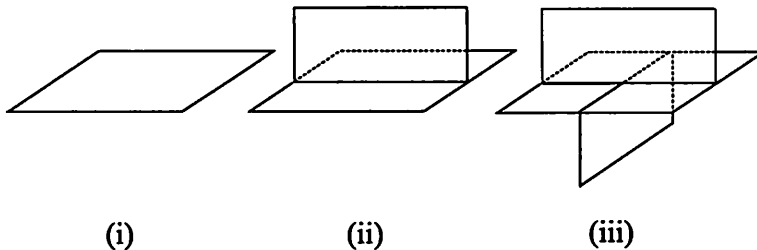


図 1: fake surface

simple polyhedron $P \in M$ が *simple spine* であるとは、 $M \setminus P$ が open 3-ball B^3 と homeomorphic であるときをいう。 P の singularity 構造は

*E-mail : koda@math.keio.ac.jp

vertices, edges, faces の階層構造を自然に持つ。これらをそれぞれ $V(P)$, $E(P)$, $F(P)$ とあらわすことにする。

Definition 1.1 3-対 $\Delta = (G, f, P)$ が *DS-diagram* であるとはこれが次の4条件を満たすときをいう。

1. G は S^2 上の 3-regular graph である。
2. P は *closed simple spine* である。
3. $f: S^2 = \partial B^3 \rightarrow P$ は *local homeomorphism* である。
4. $\#f^{-1}(f(x)) = 2$ ($x \in S^2 \setminus G$), $\#f^{-1}(f(x)) = 3$ ($x \in G \setminus V(G)$)
 $\#f^{-1}(f(x)) = 4$ ($x \in V(G)$)

DS-diagram Δ が与えられたとき、 $M(\Delta) = B^3/f$ は (*orientable* でないかもしれない) *closed 3-manifold* を一意的に決める。我々は $M(\Delta)$ を Δ の *realized manifold* とよび、逆に、 Δ のことをこの *3-manifold* の (1つの) *DS-diagram* とよぶ。

Definition 1.2 $\Delta = (G, f, P)$ を *DS-diagram* とする。 G の *cycle* e が *e-cycle* であるとは、次の条件を満たすときをいう。

1. *sphere* を 2つの *open disks* $S^2 \setminus e = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ に分割したとき、 $E(P)$ 上の任意の *point* x について

$$\#(e \cap f^{-1}(x)) = \#(\Sigma_+ \cap f^{-1}(x)) = \#(\Sigma_- \cap f^{-1}(x)) = 1$$

が成り立つ。

2. $F(P)$ 上の任意の *point* x について、

$$\#(\Sigma_+ \cap f^{-1}(x)) = \#(\Sigma_- \cap f^{-1}(x)) = 1$$

が成り立つ。

3. $V(P)$ 上の任意の *point* x について、

$$\begin{aligned} \#(e \cap f^{-1}(x)) &= 2 \\ \#(\Sigma_+ \cap f^{-1}(x)) &= \#(\Sigma_- \cap f^{-1}(x)) = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

DS-diagram が *e-cycle* e を持つとき、これを $\Delta(G, f, P; e)$ と表す。

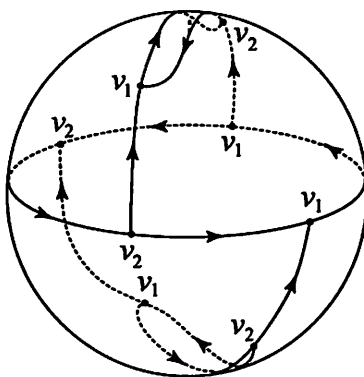


図 2: $L(3,1)$ の e -cycle 付き DS-diagram

Example 1.3 は Figure ?? は Lens space $L(3;1)$ の e -cycle 付き DS-diagram である。

この報告書では以下 e -cycle 付きの DS-diagram のみを扱う。次の定理は e -cycle 付きの DS-diagram の一般性を保障している。

Theorem 1.4 すべての closed 3-manifold は e -cycle 付きの DS-diagram をもつ。

S^2 の orientation は e -cycle 付き DS-diagram から決まるものを常に fix しておく。3-ball B^3 には $S^2 = \partial B^3$ の orientation と同調するような orientation を入れ、 e -cycle e 上には、 S^2 の orientation の Σ_+ への制限と同調するような orientation を入れる。これにより、 G を directive graph と $M(\Delta)$ を oriented 3-manifold とみなすことが出来る。(See 2).

1.2 DS-diagram の Block Number

spine P の各 vertex v に対し、graph G の e -cycle e 上のちょうど 2 つの vertices v^+ and v^- が存在し、 $f(v^+) = f(v^-) = v$ を満たす。この 2 つの vertices は、これに接続し、 e -cycle 上にない 3 本目の edge が Σ_+ 上にあるか Σ_- 上にあるかにより特徴付けられる。(See Figure?)

$V(P)$ が n points v_1, v_2, \dots, v_n からなっているとす。

Definition 1.5 oriented circle e 上の $2n$ 個の vertices の sequence を arrangement とよび、 $\mathcal{A}(\Delta)$ とかく。

$\mathcal{A}(\Delta)$ の symbols の連続的な sequence を $\mathcal{A}(\Delta)$ の subword とよぶ。

Definition 1.6 arrangement $\mathcal{A}(\Delta)$ の各 maximal positive (or negative) subword of のことを positive block (resp. a negative block) とよぶ。

Definition 1.7 e -cycle 付きの DS-diagram Δ の arrangement $\mathcal{A}(\Delta)$ に含まれる positive blocks の数を D の block number とよび、 $bl(\Delta)$ とかく。

Definition 1.8 closed 3-manifold M が block number n の a DS-diagram を持ち、これより block number の小さい DS-diagram を持たないとき、Block number n を持つという。

各 vertex $v \in V(P)$ は Figure 3 に示されている l と r の 2 つの types に分類される。

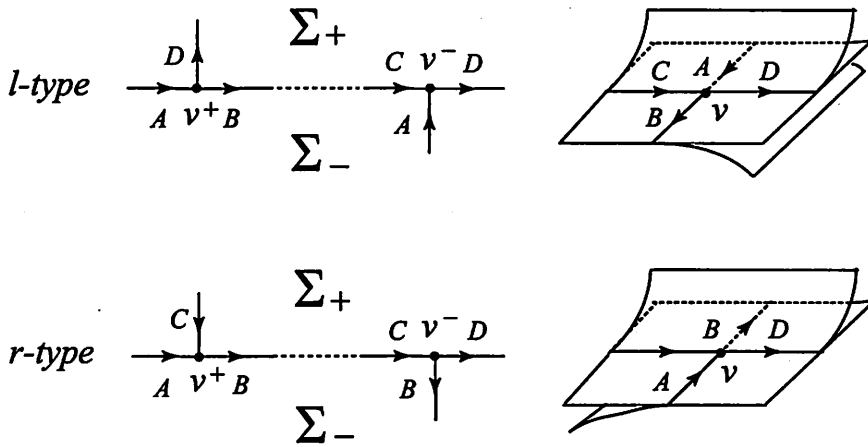


図 3: Two types of vertex v and corresponding branch structure

Definition 1.9 code とは map $\phi_P : V(P) \rightarrow \{l, r\}$ で vertex v が l -type のとき $\phi_P(v) = l$ 、 l -type のとき $\phi_P(v) = l$ を満たすものをいう。

$V(P)$ が n 個の points v_1, \dots, v_n からなっているとす。

Definition 1.10 $\Delta = (G, f, P; e)$ の e -data $\mathcal{E}(\Delta) = (\phi_P, \mathcal{A}(\Delta))$ とは、code $\phi_P(v_i)$ for each $v_i \in V(P)$ と oriented circle S^1 上の $2n$ 個の点の arrangement $\mathcal{A}(\Delta)$ の pair のことをいう。

この構成法と theorem 1.4 より、我々は closed 3-manifolds の集合を、上のような条件を備えた symbols の sequences の集合とみなすことが出来る。従って、次のような定義を考えることは自然である。

Definition 1.11 v_1, \dots, v_n を n 個の *symbols* とする。

$$\phi_{\text{formal}} : \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \{l, r\}$$

を写像とする。このとき、 $\phi_{\text{formal}}(v_i)$ for each v_i と oriented circle S^1 上の $2n$ 個の点 $v_k^\pm (1 \leq k \leq n)$ の arrangement A の pair を formal e-data とよび、 $\mathcal{E} = (\phi_{\text{formal}}, A(\Delta))$ とかく。

Definition 1.12 v_1, \dots, v_n を n 個の *symbols* とする。 $\phi_{\text{formal}} : \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \{l, r\}$ を map とする。このとき、 formal e-data $\mathcal{E} = (\phi_{\text{formal}}, A(\Delta))$ とは、 $\phi_{\text{formal}}(v_i)$ for each v_i と A of $2n$ points v_k^\pm on the oriented circle S^1 のことをいう。

Definition 1.13 formal e-data \mathcal{E} が realizable であるとは、 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Delta)$ を満たすようなある 3-manifold の DS-diagram Δ が存在するときをいう。

Remark 1.14 すべての formal e-data が realizable にはならないが、 [IK] で示されているように、与えられた formal e-data が realizable でなかったとしても、これは boundary 付きの 3-manifold を表現する。このことについてはここでは詳しくは述べない。

Block number は Heegaard genus と同じように、3-manifolds の複雑度を測る尺度を与えている。実際、これら 2 つの概念は次のような類似性を持つ。

$Bl(M)$ は明らかに closed orientable 3-manifold の topological invariant になる。

Theorem 1.15 $Bl(M) = 0$ であるのは M が $S^2 \times S^1$ に homeomorphic であるときかつそのときに限る。

Theorem 1.16 $Bl(S^3) = 1$

Theorem 1.17 $S^2 \times S^1$ を除く任意の closed orientable 3-manifold M に対し、 $HG(M) \leq Bl(M)$ が成り立つ。ここで、 $HG(M)$ は M の Heegaard genus を表す。

Theorem 1.18 M が S^3 とも $S^2 \times S^1$ とも homeomorphic でない genus 2 の closed orientable 3-manifold であるとき、 $HG(M) = Bl(M)$ が成り立つ。

1.3 Heegaard Splitting Corresponding to a DS-diagram with e -cycle

M を closed 3-manifold とし、 Δ を M の block number 2 の DS-diagram with e -cycle とする。このとき、この diagram を用いることにより、次のようにして $M = M(\Delta)$ の Heegaard splitting が得られる。

$M(\Delta)$ を次の 4 つの部分に分解する。

- (0) Σ_+ を少し縮めた disk D の B^3 での collar neighborhood $V_0 = D \times [0, 1]$
- (1) $E(G) \cap (\text{Int}\Sigma_+ \setminus D)$ B^3 での collar neighborhood V_1
- (2) $\Sigma \times [0, 1]$ の $V_0 \cup V_1$ での closure V_2
- (3) $M(\Delta) \setminus (V_0 \cup V_1 \cup V_2)$ の $M(\Delta)$ での closure V_3

$H_1(\Delta) = H_1 = V_0 \cup V_1$, $H_2(\Delta) = H_2 = V_2 \cup V_3$ とおく。上の定義より、 H_1, H_2 はそれぞれ handle body であり $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 = \partial H_2$ を満たす。実際、 e -cycle 上の各 vertex は Σ_+ 上の vertex と同一視されるから、 H_2 は handle body であり、 Σ_+ 上の各 face は Σ_- 上のある face と同一されるから、 H_1 は handle body になる。従って、 (H_1, H_2) は $M(\Delta)$ の Heegaard splitting を与える。より正確に、上の分解は i -handle V_i からなる $M(\Delta)$ の handle decomposition を与える。

この handle decomposition の構造を用いて、 $M(\Delta)$ の fundamental group の表示を求める。 $h_1, h_2, \dots, h_m, h'_1, h'_2, \dots, h'_n$ を V_1 の 1-handle とする。 $(h_i$ (resp. h'_i) は Δ のブロックに対応している。) 各 1-handle h'_1, h'_2, \dots, h'_n にたいして、生成元 x_1, x_2, \dots, x_m (resp. y_1, y_2, \dots, y_n) をそれぞれとる。これらは DS-diagram 上での外側への向きがから決まる 1-handle の orientation と同調するようにとる。

次に、各 2-handle が与えるこの generators に対する relators を考える。1-handle h_i と h_{i+1} の間の各 2-handle から得られる relator は $x_i x_{i+1}^{-1} = 1$ となるから (Figure 4 参照)、まず、relation $x_1 = x_2 = \dots = x_m (= x)$ and $y_1 = y_2 = \dots = y_n (= y)$ を得る。この relation は、2-handle による

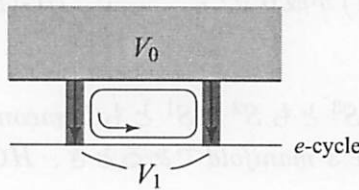


図 4: Handle cancellation

1-handle の cancelling に対応していることに注意する。この handle cancelling により最終的に得られた genus 2 の Heegaard splitting を (H_1, H_2) と書くことにする。

$h_1, h_2, \dots, h_m, h'_1, h'_2, \dots, h'_n$ に対応する \mathcal{H}_1 の handle をそれぞれ h_1, h_2 とおく。

h_m と h'_1 の間にある 2-handled_1 と、 h'_n と h_1 の間にある 2-handled_2 を考える。各 x_i は identification map f により $e\text{-cycle}$ 上に現れるので、これらを含めて、 d_1, d_2 の境界の attaching slope に沿ってこれらから得られる語 r_1, r_2 を読む。このようにして、 $\pi_1(M(\Delta))$ の表示 $\langle x, y \mid r_1, r_2 \rangle$ が得られる。

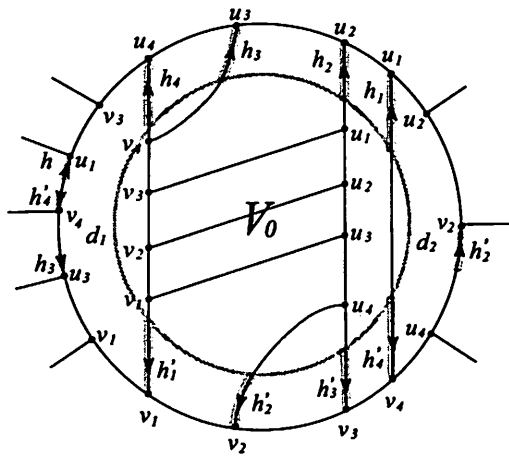


図 5: $[h_1] = [h_2] = [h_3] = [h_4] = x, [h'_1] = [h'_2] = [h'_3] = [h'_4] = y$

Example 1.19 Figure 5 で表されている manifold の DS-diagram から得られる表示は

$$\langle x, y \mid x^{-1}yxy^{-1}x, yx^{-1}y \rangle$$

となる。

1.4 Hyperbolic group

finitely presentable group G の finite presentation $\langle S \mid R \rangle$ が Dehn presentation であるとは G では unit になる free group $F(S)$ の各 element w に対し、次の条件 (*) を満たす R の element r が存在するときをいう。

(*) w の subword になっている r の subword r_1 で、 $|r_1| > \frac{|r|}{2}$ を満たすものが存在する。

Definition 1.20 *finitely presentable group* G が *hyperbolic* であるとは、これが *Dehn presentation* をもつときをいう。

hyperbolic group の概念は *complete hyperbolic manifolds* の *fundamental group* の持つ性質を抽出したものとして、Gromov によって最初に定義された。

Theorem 1.21 *closed 3-manifold of negative curvature* の *fundamental group* は *hyperbolic* である。

実際には、上の theorem の次元に対する制限や manifold の compactness は本質的ではないが、報告書の中ではこの主張で十分である。

2 3-manifold of genus 2 の parametrization

2.1 3-manifold of genus 2 の parametrization

Definition 2.1 与えられた *e-cycle* 付き *DS-diagram* の、*e-cycle* より上の部分を描いたものを、この *DS-diagram* の *upper-half diagram* とよぶ。

block number 2 の *DS-diagram* の *upper-half diagram* を次のように特徴付ける。

2つの *negative blocks* の両端にある頂点 a^-, b^-, c^-, d^- に注目する。(Figure 6)

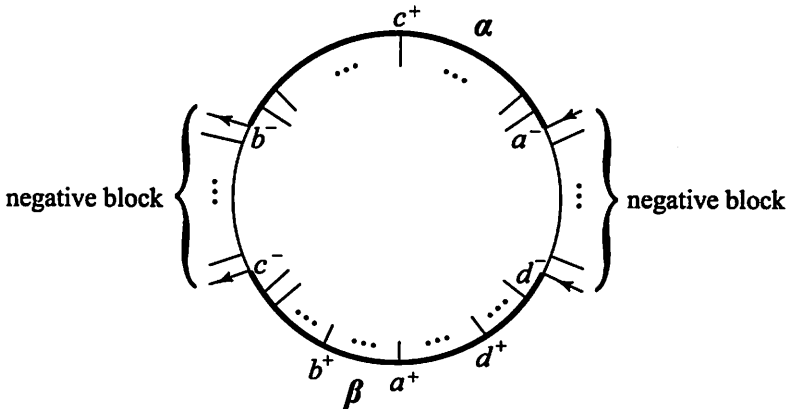


図 6: $\{lrll, c|bad\}$ に属する *DS-diagram*

これら 4つの *negative vertices* の type (r or l) とこれらのパートナーの *positive vertices* の位置に注目することにより、与えられた *upper-half*

diagram の特徴の次のように表示を得る。Figure 6 に描かれている DS-diagram を考える。この diagram において

1. vertices a, b, c, d はそれぞれ l -type, r -type, r -type, l -type である。
2. e -cycle の subpath α 上に vertex c^+ があり、subpath β 上に vertices b^+, a^+, d^+ がこの順にあらわれる。

このとき、この DS-diagram は class $\{lrll, c|bad\}$ に属しているという。

この class に属している manifold の e -data は次のような形を持つことに注意する。

$$(V_1^+ c^{+r} V_2^+) (b^{-r} V_3^- c^{-r}) (V_4^+ b^{+r} V_5^+ a^{+l} V_6^+ d^{+l} V_7^+) (d^{-l} V_8^- a^{-l})$$

但し V_i^+ (resp. V_i^-) は positive (resp. negative) subword をあらわしている。

Example 2.2 *Fomenko Matveev Weeks manifold* とは、closed 3-manifold のうちで volume が最小であると予想されている manifold である。この manifold は Whitehead link で $-1/2, -1/5$ surgery を行うことにより得られ、genus 2 を持つ。この manifold の upper-half diagram は Figure 7 のようになる。この diagram は class $\{rlrl, cd|ab\}$ に属している。

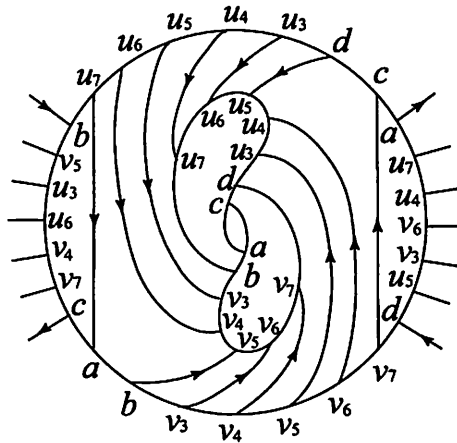


図 7: Fomenko Matveev Weeks manifold

この報告書では考える upper-half diagram はすべて class $\{rlrl, cd|ab\}$ に属するもの考える。

$\{rlrl, cd|ab\}$ に属している diagram を分類する前に、同じ多様体を与える DS-diagrams with e -cycle の move を紹介する。この move は [?] で与えられ、second regular move とよばれている。

Definition 2.3 Δ を *DS-diagram with e-cycle* で $e\text{-data}\mathcal{E}(\Delta)$ が 2 種類の *subwords* $w_1 = u^{-l}v^{-r}$ (resp. $u^{-r}v^{-l}$), $w_2 = u^{+l}v^{+r}$ (resp. $u^{+r}v^{+l}$) を含むものとする。このとき、*second regular move* はこれら 2 つの *subwords* w_1, w_2 を取り除くものとして定義される。*DS-diagram* に *second regular move* を適用できるとき、この *diagram* は *removable 2-gon* を持つという。

この move は、*DS-diagram* の *realized manifold* 内に埋め込まれた *spine* P の Figure 8. に示されている move と対応している。

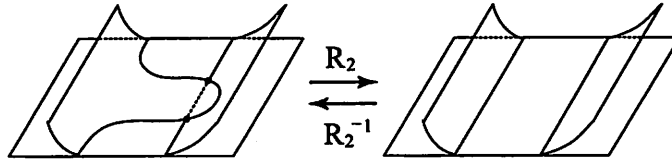


図 8: Regular move for a spine

second regular move は *DS-diagram* の *block number* をあげない。従って、必要ならばこの operation を施すことにより、与えられた *DS-diagram* はあらかじめ *removable 2-gons* を持たないとしてよい。

Definition 2.4 *upper-half diagram* $\bar{\Delta}$ が与えられたとする。このとき、次の 2 つの条件を $\bar{\Delta}$ に関する *fundamental conditions* と呼ぶ。

1. $\bar{\Delta}$ は *removable 2-gons* を含まない。
2. *diagram* $\bar{\Delta}$ の *graph* は *connected* である。

この報告書では考える *upper-half diagrams* はすべて *fundamental conditions* を満たすものとする。*second regular move* は *DS-diagram* の *block number* をあげないことに注意する。

Proposition 2.5 *class* $\{rlrl, cd|ab\}$ に属するすべての *upper-half diagrams* は Figure 9 に示されている 8 つの *parameters* $M(k_1, k_2, n_1, n_2; s; m, l, \pm)$ で表される。

与えられた *diagrams* は *type* $\{rlrl, cd|ab\}$ に属しているから、[?] に示されているルールに従って *paths* α, β に対応している Σ_+ 上の *diagram* を描くと、Figure 10 に示されている *diagram* のいずれか一方に一致する。

Figure 10 の左側の *diagram* を $+$ -*type*、右側の *diagram* を $+$ -*type* とよぶ。 $+$ -*type* の *diagrams* を考える。

outer most argument により、*upper-half diagram* は Figure 11 のようになる。

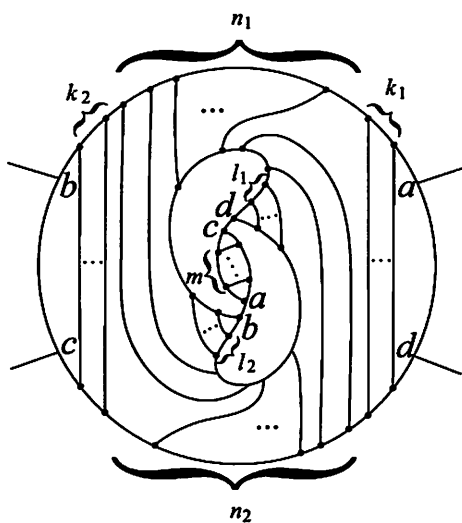


图 9: parameters of the upper-half diagram

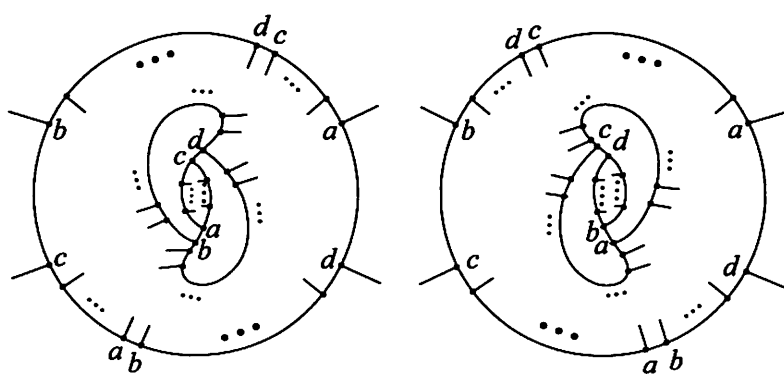
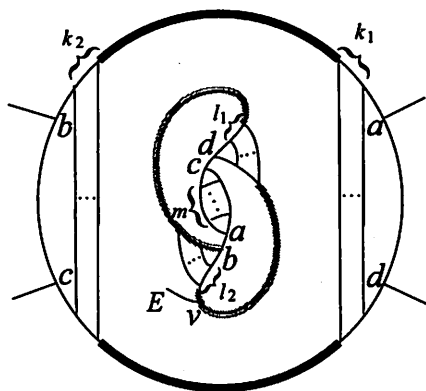
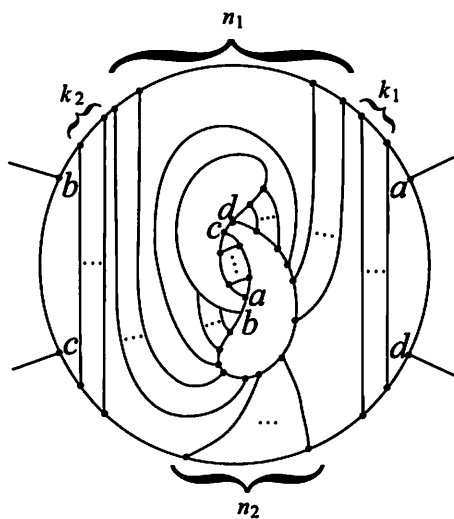


图 10: Diagrams of + type and - type



⊠ 11: Diagram after adding outermost edges



⊠ 12: impossible situation

もし、両端点を **bolded gray paths** 上に持つ edges が存在したとすると、仮定より diagram は **removable 2-gon** を含まないから、diagram は Figure 12 に示されているようなものになる。従って path α 、 β に対応して、次の formulae を得る。

$$m + l_1 + l_2 + 2 = k_1 + k_2 + n_1$$

$$m + l_1 + l_2 + 4 + n_1 + n_2 = k_1 + k_2 + n_2$$

これは

$$2 + n_1 = -n_1$$

を意味し、矛盾する。

上の議論よりより、残った edges は、一方の端点を e -cycle 上に、もう一方を Σ_+ 上に持つ。より正確に、残った edges は Figure 11 上の **bolded black line** と **bolded gray line** を結ぶ。

α (resp. β) 側につながれているこの残された edges の本数を n_1 (resp. n_2) とおく。ここで、Figure 11 に示されている edge E に注目する。 E のもう一方の端点は **bolded black paths** 上にあるから、この位置を Figure に示した parameter s により表す。仮定より、diagram は **connected** でなくてはならないから、 $n_1 = n_2 = 0$ となることはないことに注意する。

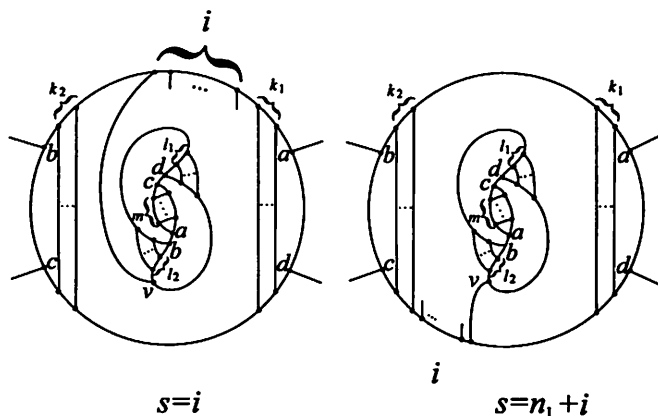


図 13: The parameter s

Σ_+ 上の vertices の数と e -cycle 上の positive vertices の数は等しいから、式

$$l_1 + l_2 = k_1 + k_2 - 2m - 2$$

を得る。従って、parameter l_2 は必要ないことがわかる。以上より、 $l = l_1$ とおくことによって求める parameter 付けが得られた。

Remark 2.6 上の証明中の議論より、*parameters*に関する次の *canonical conditions* を得る：

1. $0 \leq k_i, 0 \leq n_i, 0 \leq m$, and $0 \leq l \leq k_1 + k_2 - 2 - 2m$ for $i = 1, 2$.
2. if $n_1 + n_2 \neq 0$, $1 \leq s \leq n_1 + n_2$.

When we are given a parameter $(k_1, k_2, n_1, n_2; s; m, l)$, we will write labels $u_1, \dots, u_{k_1+n_1+k_2}, v_1, \dots, v_{k_1+n_2+k_2}$ of vertices as in Figure 9. Set $l_1 = l$ and $l_2 = k_1 + k_2 - l_1 - 2m - 2$ which is the number of the other side of the edges parametrized l_1 .

特に、 $m = 0$ のときは、 $u_1 = c, u_2 = d, v_1 = a, v_2 = b$.

Definition 2.7 *upper-half diagram* が *e-cycle* を与えるとは、*e-cycle* の *sub paths* $b - c, d - a$ 上に $u_1, \dots, u_{k_1+n_1+k_2}, v_1, \dots, v_{k_1+n_2+k_2}$ のすべての *negative vertices* が現れるときをいう。

Definition 2.8 *e-cycle* を与える *upper-half diagram* が与えられたとする。このとき、*e-data* に対応する *lower-hemisphere* 上の *graph* を描けるとき、その *upper-half diagram* は *realizable* であるという。

Lemma 2.9 *upper-half diagram* が *realizable* ならば、これに対応する *closed 3-manifold* が存在する。

See [?].

Proposition 2.10 $m = 0, l = k_1 - 1$ が成り立っているとする。このとき、この *upper-half diagram* が *realizable* である必要十分条件は *parameters* が $k_1 + k_2 \equiv 0 \pmod{2}$ と $(4s' - (n_1 + n_2) + 4, n_1 - s + 2) = 1$ を満たすことである。ここで、 $s' = |n_1 - s + 1|$ とおいている。

3 Examples

3.1 The simplest series

Proposition 3.1 If $s = n_1 + 1, m = 0, l_1 = k_1 - 1$ が成り立っているとき、与えられた *DS-diagram* の *represented manifold* が存在する必要十分条件は $k_1 + k_2 \equiv 0 \pmod{2}$ であることである。このとき、 $\pi_1(M)$ は次のような表示を持つ。

$$(x, y \mid x^{n_1}(xy^{-1})^{\frac{k_1+k_2}{2}+1}, y^{n_2}(yx^{-1})^{\frac{k_1+k_2}{2}+1})$$

if both k_1 and k_2 are odd, and

$$\langle x, y \mid x^{-n_2}(yx^{-1})^{\frac{k_1+k_2}{2}}, y^{-n_1}(xy^{-1})^{\frac{k_1+k_2}{2}} \rangle$$

if both k_1 and k_2 are even.

3.2 Fomenko Matveev Weeks manifold を含む系列

Fomenko Matveev Weeks manifold を思い出す。この manifold は我々の parametrization では $M(1, 1, 5, 5; 4; 0, 0)$ と表される。

そこで、 $n_1 = n_2 = n$, $s = n - 1$, $m = 0$, and $l_1 = k - 1$ となるときを考える。

Proposition 3.2 上のとき、*represented manifold* が存在する必要十分条件は $k_1 + k_2 \equiv 0 \pmod{2}$ かつ $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ が成り立つことである。このとき、 $\pi_1(M)$ は次のような表示を持つ。

$$\langle x, y \mid x^{\frac{n+2}{3}\varepsilon} y^{\frac{n-1}{3}\varepsilon} x^{\frac{n-1}{3}\varepsilon} (x^\varepsilon y^{-\varepsilon})^{\frac{k_1+k_2+2}{2}}, y^{\frac{n+2}{3}\varepsilon} x^{\frac{n-1}{3}\varepsilon} y^{\frac{n-1}{3}\varepsilon} (y^\varepsilon x^{-\varepsilon})^{\frac{k_1+k_2+2}{2}} \rangle$$

if $n \equiv 1 \pmod{3}$ and

$$\langle x, y \mid x^{\frac{n-2}{3}\varepsilon} y^{\frac{n+1}{3}\varepsilon} x^{\frac{n+1}{3}\varepsilon} (x^\varepsilon y^{-\varepsilon})^{\frac{k_1+k_2}{2}}, y^{\frac{n-2}{3}\varepsilon} x^{\frac{n+1}{3}\varepsilon} y^{\frac{n+1}{3}\varepsilon} (y^\varepsilon x^{-\varepsilon})^{\frac{k_1+k_2}{2}} \rangle$$

if $n \equiv 2 \pmod{3}$, where $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) if k is odd (resp. even).

4 3-Manifold の Word Hyperbolicity

Example 2.2 で扱った Fomenko Matveev Weeks manifold $M(1, 1, 5, 5; 4; 0, 0)$ の *DS*-diagram Δ を考える。

DS-diagram から、graph $\mathcal{G}(\Delta)$ を次のように定義する。(Figure 15 参照)

- $\mathcal{G}(\Delta)$ の各 vertex は $f^{-1}(V_0) \subset S^2$ のある connected component に対応している。Figure 14 において、これは矢印が出入りしている (細線で囲まれた) 領域になっている。
- $\mathcal{G}(\Delta)$ の各 edge は handle を通過する curve、すなわち Figure 14 のある矢印に対応する。

graph $\mathcal{G}(\Delta)$ は topological には complete graph K_4 であり、Figure 16 に示したような 7 個の cycles $C_i (1 \leq i \leq 7)$ を持つ。

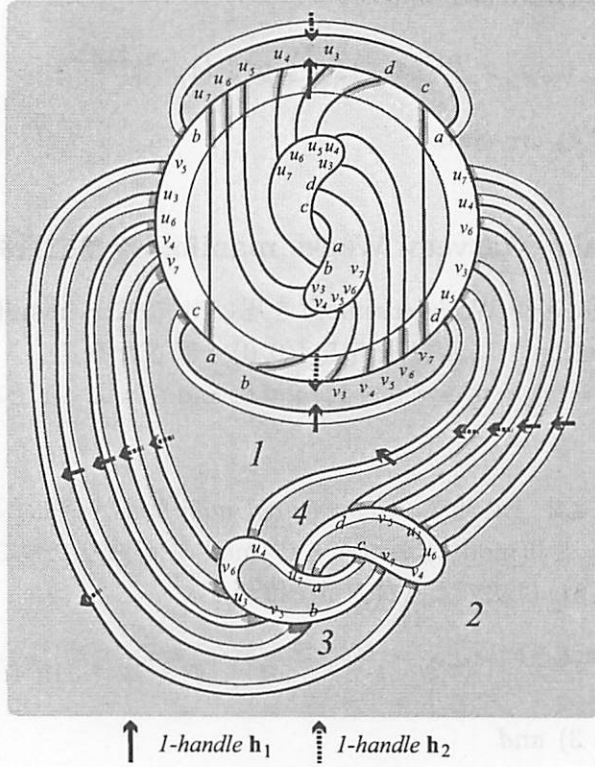


图 14: A DS-diagram Δ of Fomenko Matveev Weeks manifold

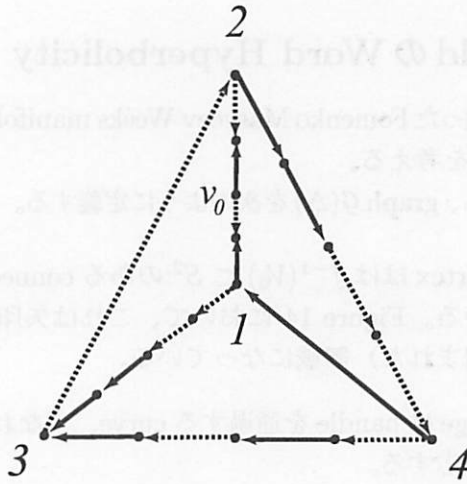


图 15: The graph $\mathcal{G}(\Delta)$

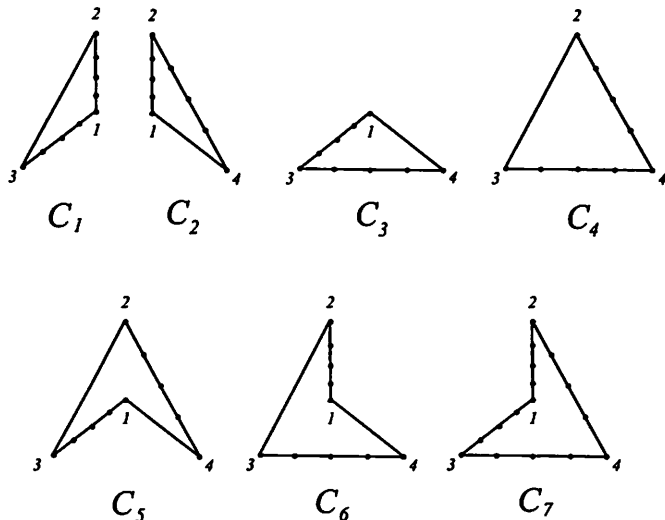


図 16: 7 cycles in the graph $\mathcal{G}(\Delta)$

cycle C_1 と C_2 は先の proposition 3.2 の 2 つの relators r_1, r_2 に対応していることに注意する。cycle C_i に対応する word をそれぞれ 1 つとり、 r_i とおく。

$r_i (1 \leq i \leq 7)$ を含む relators の minimal system を R とおく。つまり、 R は $\{r_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$ を含み、次を満たす minimal な集合である。

1. $r \in R$ ならば、 r^{-1} も R に含まれる。
2. $r \in R$ ならば、これの任意の cyclical conjugate は R に含まれる。

箱根セミナーでは、このようにして得られる $\pi_1(M)$ の表示

$$\langle x, y \mid R \rangle$$

が Dehn presentation であることを、manifold に immerse された disk と spine との交わりから得られる cancellation diagram を用いて解説したが、証明の詳細に発生している問題が現時点で解決されていないため、この報告書では省略させて頂く。Fomenko Matveev Weeks manifold は hyperbolic であるので、proposition ? よりその fundamental group は hyperbolic である。

この方向での当面の目標は、上の議論を使って、 $\{r_l r_l \mid cd, ab\}$ に属するほとんど (もしくは、すべて?) の manifolds の fundamental groups が hyperbolic であることを示すことである。

参考文献

- [BP 1] R.Benedetti, C.Petronio, *Branched Standard Spines of 3-manifolds*, Springer "Lecture Notes in Mathematics 1653", (1997).
- [EI] M.Endoh, I.Ishii, *A new complexity for 3-manifolds*, to appear.
- [I 1] I.Ishii, *Flows and spines*, Tokyo J. Math. **9** (1986) 505-525.
- [I 2] I.Ishii, *Combinatorial construction of a non-singular flow on a 3-manifold*, Kobe J. Math. **3** (1987) 201-208.
- [I 3] I.Ishii, *Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds*, Tokyo J. Math. **15** (1992) 297-312.
- [IK] H.Ikeda, M. Kouno, *Like a flow-spine*, Kobe J. Math. **8** (1991), 93-100.