HAKONE SEMINAR 19 (2003) 97-116.

# DSを利用したReidemeister torsionの計算法

慶應義塾大学大学院数理科学研究科
古宇田 悠哉*

2003年10月29日

**概 要**

Benedetti-PetronioのPreprint [[BePe 1, BePe 2, BePe 3]] の方法に従い、Reidemeister torsonを定義する。また、これをDS-図式の言葉で理解し、具体的に計算する方法を紹介する。

## 1 代数的な準備

ここでは、Reidemeister torsionを定義する際に必要となる代数的な理論を準備する。

### 1.1 体上の鎖複体のtorsion

Fを体とし、F上の$r(\leq \infty)$次元ベクトル空間Vの2つの(順序の入った)基底を$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_r), \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_r)$とおく。

このとき、

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \qquad i = 1, \cdots, r$$

とおくと、行列$(a_i j)_{i,j=1,\cdots,r}$はF上の非退化な行列になる。このとき、

$$[\mathbf{b}/\mathbf{c}] = \det(a_{ij}) \in F^{\times} = F \backslash 0$$

とおく事にする。線型代数の基礎から明らかに

1) $[\mathbf{b}/\mathbf{b}] = 1$

2) Vの新たな基底dをとったとき、$[\mathbf{b}/\mathbf{d}] = [\mathbf{b}/\mathbf{c}] \cdot [\mathbf{c}/\mathbf{d}]$

が成り立つ。従って、

$$\mathbf{b} \sim \mathbf{c} \Longleftrightarrow [\mathbf{b}/\mathbf{c}] = 1$$

*E-mail : koda@math.keio.ac.jp

と関係 $\sim$ を定めると、これは同値関係になる。このとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ は同値であると言う。

長さ $m$ の F 上の有限次元鎖複体

$$C = (0 \to C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_0} C_0 \to 0)$$

が与えられたとする。

**定義 1.1 (アサイクリックな鎖複体)** 全ての $0 \leq i \leq m$ について $H_i(C) = \{0\}$ が成り立っているとき、$C$ はアサイクリックであると言う。

**定義 1.2 (基底付き鎖複体)** 各 $C_i$ の基底が固定されているとき、$C$ を基底付き鎖複体とよび、各 $H_i(C)$ の基底が固定されているとき、$C$ をホモロジーの基底付き鎖複体とよぶ。

C を基底付きかつホモロジーの基底付き鎖複体とし、各 $C_i$ に指定されている基底を $\mathbf{c}_i$、各 $H_i(C)$ に指定されている基底の $C_i$ における代表元を $\mathbf{h}_i$ とおく。また、$C_i$ の有限部分集合 $\mathbf{b}_i$ で $\partial\mathbf{b}_{i+1}$ が $\partial_i C_i$ の基底になっているものを一つとり固定する。このとき、$\partial_i\mathbf{b}_{i+1}$ と $\mathbf{h}_i$ と $\mathbf{b}_i$ のベクトルをそのまま並べて得られるベクトルの順序つき集合を $\partial_i\mathbf{b}_{i+1}\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i$ とおくと、これは $C_i$ の基底になる。

**定義 1.3 (torsion)** 上のとき、

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{m} [(\partial_i\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}/\mathbf{c}_i]^{(-1)^{i+1}} \in F^{\times} \tag{1}$$

を鎖複体 $C$ の *torsion* といぶ。

**注意 1.4**

*1.* 上の定義における (1) は $\mathbf{b}_i (0 \leq i \leq m)$ のとり方に依らない。

**【証明】** $\mathbf{c}_i$ の新たな基底 $\mathbf{b}_i$ をとると、

$$\begin{aligned}
& [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i')\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}] \\
= \ & [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i')\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}] \cdot [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}] \\
= \ & [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i')/\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)] \cdot [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i'/\mathbf{c}_i] &= [\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i'/\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i] \cdot [\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i/\mathbf{c}_i] \\
&= [\mathbf{b}_i'/\mathbf{b}_i] \cdot [\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i/\mathbf{c}_i]
\end{aligned}$$

が成り立つから、

$$
\begin{aligned}
& [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i')\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}]^{(-1)^i}\cdot[\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i'/\mathbf{c}_i]^{(-1)1^{i+1}} \\
= \ & [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}]^{(-1)^i}\cdot[\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i/\mathbf{c}_i]^{(-1)1^{i+1}} \\
& \cdot[\mathbf{b}_i'/\mathbf{b}_i]^{(-1)^i}\cdot[\mathbf{b}_i'/\mathbf{b}_i]^{(-1)^{i+1}} \\
= \ & [\partial_{i-1}(\mathbf{b}_i)\mathbf{h}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}/\mathbf{c}_{i-1}]^{(-1)^i}\cdot[\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{h}_i\mathbf{b}_i/\mathbf{c}_i]^{(-1)1^{i+1}}
\end{aligned}
$$

従って、上の定義 1.2 は *well-defined* である。 ∎

2. 定義から直ちに、$C_i$ の固定された基底 $\mathbf{c}_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3\cdot, c_i^{n_i})$ を $\mathbf{c}_i = (c_i^2, c_i^1, c_i^3\cdot, c_i^{n_i})$ に変えると、*torsion* の値は $-1$ 倍され、$\mathbf{c}_i = (c_i^1, c_i^2, \cdot, c_i^{n_i})$ を $\mathbf{c}_i = (\lambda c_i^1, c_i^2, \cdot, c_i^{n_i})$ に変えると、*torsion* の値は $\lambda^{(-1)^i}$ 倍される事が分かる。

3. 特に $C$ がアサイクリックであるときは、

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{m}[(\partial_i\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{b}/\mathbf{c}_i]^{(-1)^{i+1}} \in F^\times \tag{2}$$

とかける。

## 1.2 環上の鎖複体の torsion

$\Lambda$ を、単位元 $1 \neq 0$ を持ち、$\Lambda$-加群として $\Lambda^n \not\cong \Lambda^m$ $(n \neq m)$ をみたす結合環とする。

**定義 1.5 (アドミシブルな結合環)** このとき結合環はアドミシブルであると呼ぶ事にする。( 注 : この呼び方は一般に使われているものではない。)

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$\Lambda$ 上の可逆な $n\times n$ 行列全体のなす群を $\mathrm{GL}(n,\Lambda)$ と書く。(特に、$\mathrm{GL}(1,\Lambda) = \Lambda^\times$ である事に注意する。) ここで、各 $M \in \mathrm{GL}(N,\Lambda)$ を行列

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1,\Lambda)$$

と同一視すると、次のような包含の列が得られる。

$$\mathrm{GL}(1,\Lambda) \subset \mathrm{GL}(2,\Lambda) \subset \mathrm{GL}(3,\Lambda) \subset \cdots$$

これの和集合 $\mathrm{GL}(\Lambda) = \bigcup_{n\geq 0}\mathrm{GL}(n,\Lambda)$ を無限次元一般線型群とよび、これの可換化

$$K_1(\Lambda) = \mathrm{GL}(\Lambda)/[\mathrm{GL}(\Lambda),\mathrm{GL}(\Lambda)]$$

を $\Lambda$ の Witehead 群とよぶ。

長さ $m$ の $\Lambda$ 上の有限次元鎖複体

$$C = (0 \to C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_0} C_0 \to 0)$$

で各鎖群が有限階数自由 $\Lambda$-加群であるものが与えられたとする。この報告書では、各 $B_i = \mathrm{Im}\partial$ が自由加群であるときのみを考える。このとき、$C_i$ の有限部分集合 $\mathbf{b}_i$ で $\partial\mathbf{b}_{i+1}$ が $\partial_i C_i$ の基底になっているものが取れるので、これを一つ固定する。$C_i$ の固定された基底を $c_i$ とおき、1.1 節のときのようにして得られる $\Lambda$ 上の変換行列を $(\partial_i(\mathbf{b}_{i+1})\mathbf{b}_i/\mathbf{c}_i)$ とおくと、上の $\Lambda$ に対する条件より、これは正方行列になる。そこで、

$$\hat{\tau}(C) = \prod_{i=0}^{m}((\partial_i \mathbf{b}_{i+1})\mathbf{b}/\mathbf{c}_i)^{(-1)^{i+1}} \in \mathrm{GL}(\Lambda)$$

と定めると、これは $\mathbf{b}_i$ のとり方に依らずに決まる事が注意 1.4.1 と全く同じようにして分かる。そこで、$\hat{\tau}(C)$ の $K_1(\Lambda)$ への像を $\tau(C)$ と書く。

次の定理は、この定義が体上の鎖複体の torsion の一般化になっている事を示している。

**定理 1.6** $F$ を体とする。このとき、$\det : K_1F \to F^\times$ はアーベル群の間の同型写像になる。1.1 節で定義した $F$ 上の鎖複体 $C$ の *torsion* と上のようにしてとった $\tau(C)$ は、この同型写像によって対応する。

証明は省略。

**定理 1.7** $C, C', C''$ を $\Lambda$ 上のアサイクリックな鎖複体で、各鎖群が有限階数自由 $\Lambda$-加群であるものとし、$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \to 0$ をこれらの間の短完全系列とする。各 $i$ について、$C_{,i}\, C'_i, C''_i$ の基底 $\mathbf{c}_i, \mathbf{c}'_i, \mathbf{c}''_i$ で、$(\mathbf{c}_i/\mathbf{c}'_i\mathbf{c}''_i)$ が $K_1(\Lambda)$ で $1 = [1]$ と一致するものが存在するとする。このとき、

$$\tau(C) = \pm\tau(C')\tau(C'') \in K_1(\Lambda)$$

が成り立つ。

この証明も省略。

## 1.3 有限生成アーベル群の群環

ここでは、2.2 節で極大アーベル torsion を定義する際に必要となる、代数的な土台を固める事を目的に議論していく。

**補題 1.8** $R$ を環とするき、これが整域の直和により $R = \bigoplus_{i=0}^{m} R_i = \bigoplus_{j=0}^{n} R'_i$ と 2 通りの方法で分解されたとすると、$\{R_i\}_{i=1}^{m} = \{R'_j\}_{j=1}^{n}$ が成り立つ。

**【証明】** $R_i \backslash \{0\}$ の任意の元 $a$ をとり、固定する。$r'_j \in R_j$ で、$a = \sum_{j=1}^{n} r'_j$ を満たすものが存在する。ここで、$r_{j_1} \neq 0$、$r_{j_2} \neq 0$ となる $1 \leq r_1 < r_2 \leq n$ が存在したとすると、直和の定義より $R_i$ がイデアルである事から、

$$r'_{j_1} = a \cdot 1_{R'_{j_1}} \in R_i \backslash \{0\}, \quad r'_{j_2} = a \cdot 1_{R'_{j_2}} \in R_i \backslash \{0\}$$

(但し、$1_{R'_{j_k}}$ は $R'_{j_k}$ の単位元) が成り立つ。一方、$r'_{j_1} \in R'_{j_1}, r'_{j_2} \in R'_{j_2}$ である事から、$r'_{j_1} r'_{j_2} = 0$。これは、$R_i$ が整域である事に反する。従って、$a \in R_j$ となる $1 \leq j \leq n$ が存在する。上の $a$ は任意であったから、$R_i \backslash \{0\}$ の別の元 $b$ をとると、これに対しても、$b \in R'_j$ となる $1 \leq j' \leq n$ が存在する。$R_i$ は整域であるから、$ab \neq 0$。従って、$j = j'$ が成り立つ。以上より、$R_i \subset R'_j$ がいえた。対称性から、$R_i = R'_j$ が成り立つ。これで補題が示せた。 ∎

**記号 1.9** $R$ を乗法の単位元 $1 = 0$ を持つ可換環とするとき、$R$ の全商環 (*i.e.* 非零因子の全体による商環) を $Q(R)$ と書く。

**補題 1.10** $R_1, R_2$ を可換環とし、この直和を $R = R_1 \oplus R_2$ と置いたとき、$Q(R) = Q(R_1) \oplus Q(R_2)$ が成り立つ。

**【証明】** $R_1 \oplus R_2$ の任意の元 $a = (a_1, a_2)$ をとる。$a_1 \neq 0$ が $R_1$ の零因子であるとき、$a_1 a'_1 = 0$ となる $R_1$ の元 $a'_1 \neq 0$ をとると、$(a_1, a_2)(a_1, 0) = (0, 0) \in R_1 \oplus R_2$ より、$a$ は $R_1 \oplus R_2$ の零因子になる。$a_2 \neq 0$ が $R_2$ の零因子であるときも同様に、$a$ は $R_1 \oplus R_2$ の零因子になる。逆に、$a$ が $R_1 \oplus R_2$ の零因子であるときは、$(a_1, a_2)(a'_1, a'_2) = (a_1 a'_1, a_2 a'_2) = 0$ となる $R_1 \oplus R_2$ の元 $(a'_1, a'_2) \neq (0, 0)$ が存在するから、$a_1$ が $R_1$ の零因子になっているか、$a_2$ が $R_2$ の零因子になっているかのいずれかは成り立つ。

従って、$a$ が $R_1 \oplus R_2$ の非零因子であるのは、$a_1$ と $a_2$ がそれぞれ $R_1$ と $R_2$ の零因子であるとき、且つそのときのみである事が分かった。よって、

$$Q(R_1 \oplus R_2) \to Q(R_1) \oplus Q(R_2), \quad \frac{(a_1, a_2)}{(b_1, b_2)} \mapsto \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right)$$

は *well-defined* である。これが環同型写像になっている事は、非常に簡単に確かめられる。 ∎

**系 1.11**

1. $R = \bigoplus_{i=0}^{k} R_i$ を整域の直和とすると、$Q(R) = \bigoplus_{i=0}^{k} Q(R_i)$ は体の直和になっている。

2. $R$ が体の直和になっているときは、$Q(R) = R$

**【証明】** 1. は帰納的に補題 1.10 を適用すればよい。2. は 1. と体の全商環はその体自身である事よりよい。 ∎

単位元 1 を持つ可換環 $E$、体 $F$、環準同型 $\psi : R \to F$ が与えられたとする。

**記号 1.12**

$$N_\psi = \{y \in R \mid \psi(y) \neq 0,\ y \text{ は零因子でない}\}$$

と書き、$R$ の $N_\psi$ への局所化を $Q_\psi(R)$ と書く。
つまり、$Q_\psi(R) = \{x \in Q(R) \mid^{\exists} y \in N_\psi \ s.t.\ xy \in R\}$

**補題 1.13** 環準同型 $\psi : R \to F$ は環準同型 $\tilde{\psi} : Q_\psi(R) \to F$ に一意的に拡張できる。

**【証明】** $Q_\psi(R)$ の任意の元 $x$ をとり、これに対し、$xy \in R$ を満たす $y \in N_\psi$ をとる。
**一意性**
$\tilde{\psi}$ が存在したとすると、$\tilde{\psi}(x)\psi(y) = \tilde{\psi}(xy) = \psi(xy)$ となるから、これと $\psi(y) \neq 0$ である事より、

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(xy)\psi(y)^{-1} \tag{3}$$

と書ける。よって、$\tilde{\psi}$ は一意的である。
**存在性**
上の (3) が *well-defined* である事を言う。$xy' \in R$ を満たすような $y' \in N_\psi, y \neq y'$ をとったとき、$R$は可換環であったから $\psi(xy)\psi(y') = \psi(xyy') = \psi(xy')\psi(y)$ が成り立つ。従って、$\psi(xy)\psi(y)^{-1} = \psi(xy')\psi(y')^{-1} =$ が得られた。これで *well-defined* である事が示せた。
$\tilde{\psi}$ が環準同型になっている事は良い。

**定義 1.14 (円分体)** 体$\mathbb{Q}$に $\mathrm{e}^{2\pi i/m} (m \in \mathbb{Z})$ を添加して得られる体$\mathbb{Q}(\mathrm{e}^{2\pi i/m})$ を円分体と言う。

**定理 1.15** $H$を有限アーベル群とすると、$\mathbb{Q}[H]$ は有限個の円分体の直和に、一意的に分解される。

【証明】 一意性は上の補題 1.8 よりいえているので、存在性だけを示せばよい。$F_m = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$ とおく。円分体の定義より、$\mathbb{Q}$ から $F_m$ への自然な単射準同型が存在し、$F_m$ は 1 の原始 $m$ 乗根を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなす事が出来る。

ここで、*Galois* 群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(F_m)$ (i.e. $\mathbb{Q}$ への制限が恒等写像になっている $F_m$ 上の体自己同型写像全体のなす群 ) を考える。$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(F_m)$ の各元は $e^{2\pi i/m}$ を 1 のある原始 $m$ 乗根に写し、逆に、各原始 $m$ 乗根は $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(F_m)$ の元を定める。従って、

$$\sharp(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(F_m) = \dim_{\mathbb{Q}} F_m = \sharp\{n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid (m,n) = 1\} \tag{4}$$

が成り立つ。$H^* = \{H \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid$ 群準同型写像 $\}$ とおく。$H^*$ の任意の元 $g$ と $H$ の任意の元 $h$ をとると、$H$ が有限群であった事より、$g(h)$ は $\mathbb{C}^\times$ で有限の位数を持つ。よって、$g(h)$ は単位円周 $S^1$ に含まれるから、

$$H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(H, S^1) \tag{5}$$

従って、

$$\sharp(H^*) = \sharp(H) \tag{6}$$

(実際、$H$ が有限巡回群のときは、上の (3) より、$H \cong H^*$ であるからよい。また $H_1^*, H_2^*$ が有限アーベル群ならば、$\sharp(H_1 \oplus H_2) = \sharp(H_1) \cdot \sharp(H_2)$ かつ * の定義より、$(H_1 \oplus H_2)^* = H_1^* \oplus H_2^*$ が成り立つから、有限生成アーベル群の基本定理により保証されている有限群 $H$ の有限アーベル群への分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ にこれを帰納的に適用していけばよい)

$H^*$ の任意の元 $\sigma$ は環準同型 $\tilde{\sigma} : \mathbb{Q}[H] \to \mathbb{C}$ に $\sum_{h \in H} q_h h \mapsto \sum_{h \in H} q_h \sigma(h)$ として拡張できる。$H$ は有限群であったから $\sigma(H)$ は $S^1$ の有限巡回部分群になるので、

$$^{\exists} m_\sigma \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \sigma(H) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{m_\sigma} = 1\}$$

この $m_\sigma$ を用いると、円分体の定義より、$\tilde{\sigma}(\mathbb{Q}[H]) = F_{m_\sigma}$ と書ける。$H^*$ 上に次の同値関係を定義する。

$$\sigma \sim \tau \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} m_\sigma = m_\rho \text{であり、次の図式を可換にする} \\ \gamma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{Q}} F_{m_\sigma} \text{が存在する} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}[H] \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, equal] & F_{m_\sigma} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathbb{Q}[H] \arrow[r, "\tilde{\rho}"'] & F_{m_\rho} \end{tikzcd}$$

次の補題により、定理の証明が完結する。 ∎

**補題 1.16** $H^*$ 上の同値関係 $\sim$ の代表元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ をとったとき、

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i : \mathbb{Q}[H] \to \bigoplus_{i=1}^{k} F_{m_{\sigma_i}}$$

は環同型写像になる。

**【証明】** $\bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i$ が環準同型になる事は定義から良い。

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}}(\oplus_{i=1}^{k} F_{m_{\sigma_i}}) &= \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{Q}} F_{m_{\sigma_i}} \overset{(\because(4))}{=} \sum_{i=1}^{k} \sharp\{\rho \in H^* \mid \rho \sim \sigma_i\} \\ &= \sharp(H^*) \overset{(\because(6))}{=} \sharp(H) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[H] \end{aligned}$$

あとは、$\bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i$ が単射である事を示せば証明が終わる。このためには、$\mathbb{Q}[H]$ の 0 でない任意の元 $a$ に対し、$\tilde{\sigma}(a) \neq 0$ となる $H^*$ の元 $\sigma$ が存在する事を言えばよい。

$H$ を有限巡回群の直和 $H = \bigoplus_{i=1}^{l} H_i$ に分解し、$n$ に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき、$H = \{t^i\}_{i=0}^{n-1}$ , $t^n \neq 1 (1 \leq i \leq n-1)$ とおく。$H^*$ の任意の元 $\sigma$ に対して $\tilde{\sigma}(a) = 0$ になるような $H$ の 0 でない元 $a = a(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in \mathbb{Q}[H]$ が存在したとする。1 の各 n 乗根 $\zeta$ に対し、$H^*$ の元 $\sigma_\zeta$ を $\sigma_\zeta(t) = \zeta$ となるものとして定義すると、$a(\zeta) = \tilde{\sigma}_\zeta(a) = 0$ が成り立つ。$\zeta$ は任意であったから、これは次数 $n-1$ の多項式 $a(t)$ が $n$ 個の異なる複素数解を持つ事を意味し、代数学の基本定理に反する。従って、このような $a$ は存在しない。

$n = j (j \geq 2)$ のとき主張が正しいと仮定して $n = j+1$ のときを考える。$H' = \oplus_{i=1}^{j} H_i$ とおく。$\mathbb{Q}[H]$ の 0 でない任意の元 $a$ をとる。$H = H' \oplus H_{j+1}$ である事より $a = \sum_{g \in H'} \alpha_g g$ ($^\exists \alpha_g \in \mathbb{Q}[H_{j+1}]$) と書けて、$a = 0$ より、$\alpha_{g_0} \neq 0$ となる $H'$ の元 $g_0$ が存在する。ここで、$H_{j+1}$ に対する帰納法の仮定より、$\tilde{\sigma}(\alpha_{g_0}) \neq 0$ となる $H^*_{J+1}$ の元 $\sigma$ が存在する。この $\sigma$ は環準同型写像

$$p_\sigma : \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[H'], \quad \sum_{g \in H'} \beta_g g \mapsto \sum_{g \in H'} \tilde{\sigma}(\beta_g) g$$

に拡張でき、$p_\sigma(a) = \sum_{g \in H'} \tilde{\sigma}(\alpha_g) g \neq 0$ が成り立つ。これに $H'$ に対する帰納法の仮定を適用すると、$\tilde{\rho}(p_\sigma(a)) \neq 0$ となる $H^*_{J+1}$ の元 $\rho$ がとれる。このとき、$(\rho, \sigma) \in (H')^* \oplus H^*_{J+1} = (H' \oplus H_{J+1})^*$ は $\widetilde{(\rho, \sigma)}(a) \neq 0$ を満たす。従って、$n = j+1$ のときも示せた。

以上で補題 1.16 が証明された。 ∎

**系 1.17** $H$ が有限アーベル群ならば $Q(H) = \mathbb{Q}[H]$

【証明】 定理 1.15 と系 1.11.2 より、よい。 ∎

**定理 1.18** $H$ が有限生成アーベル群ならば、$\mathbb{Q}[H]$ は有限個の整域の直和 $Q[H] = \bigoplus_{i=1}^{k} R_i$ に一意的に分解される。

【証明】 $G = H/\mathrm{Tor}H$ とおく。$\mathbb{Q}[\mathrm{Tor}H] = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{m_{\sigma_i}}$ を定理 1.23 で与えられた $\mathbb{Q}[\mathrm{Tor}H]$ の直和分解とすると

$$\mathbb{Q}[H] = \mathbb{Q}[\mathrm{Tor}H \oplus G] = (\mathbb{Q}[\mathrm{Tor}H])[G] = (\bigoplus_{i=1}^{k} F_{m_{\sigma_i}})[G] = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{m_{\sigma_i}}[G]$$

このとき、$R_i = F_{m_{\sigma_i}}$ は整域になっている。直和分解 $H = \mathrm{Tor}H \oplus G$ は一般に一意的ではないが、補題 1.8 より、直和分解 $\mathbb{Q}[H] = \bigoplus_{i=1}^{k} R_i$ は一意的である。 ∎

**系 1.19** $H$ が有限生成アーベル群ならば、$Q(\mathbb{Q}[H])$ は有限個の体の直和 $Q(\mathbb{Q}[H]) = \bigoplus_{i=1}^{k} Q(R_i)$ に一意的に分解される。

**定理 1.20**

$$\tau(L(p,q)) = \tau(W(p,q)) = \frac{1}{(t-1)(t^r-1)} \in F/\pm\{t^j\}_{j\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$$

## 2 Benedetti-Petronio 流の Reidemeister torsion

**定義 2.1 (擬標準的多面体)** 擬標準的多面体 $P$ とは、$P$ 上の任意の点 $p$ において、次の 3 つタイプのいずれかの近傍がとれる特異曲面のことをいう。

**定義 2.2 (標準的多面体)** 擬標準的多面体 $P$ が標準的であるとは、特異点集合からえられる $P$ の自然な層別化におけるすべての連結成分が開胞になっているときをいう。次元により、この連結成分をそれぞれ頂点、辺、面とよぶ。

$P$ の螺旋状向きとは、各頂点において同調する各辺への螺旋状向きのことをいい、$P$ の分岐構造とは、各面に対する向きであり、各辺において、これを境界として含む 3 つの面の向きから誘導される向きが全て一致することはないもののことをいう。

**定義 2.3 (分岐多面体)** 分岐構造, 螺旋状向きが固定された標準的多面体を分岐多面体とよび、$P$ で表す。

以下、特に断らない限り、3 次元多様体といえば、連結な向き付け可能コンパクト 3 次元多様体をさし、ベクトル場といえば、すべて非特異なものをさす。

**定義 2.4 (凹ベクトル場)** 3 次元多様体上の凹ベクトル場とは、$M$ 上のベクトル場 $\nu$ で有限個の円周 $\Gamma$ に沿って $\partial M$ と接し、$\Gamma$ 上の点を通る $\nu$ の全ての軌道は $\Gamma$ の近くでは $\mathrm{Int}(M)$ に含まれるもののことをいう。

**注意 2.5** 分岐多面体は唯一つ決まる 3 次元多様体のスパインになることが知られている。従って、以下"多面体"をしばしば"スパイン"という言葉に置き換えることがある。

**命題 2.6** 各分岐スパイン $P$ について、次を満たす対 $(M(P), \nu(P))$ が同相写像の差を除いて唯一つに決まる。

1. $M(P)$ は $P$ をスパインとしてもつ、(空でない) 境界付き 3 次元多様体
2. $\nu(P)$ は $M(P)$ 上の凹ベクトル場
3. $^{\exists}i : P \to \mathrm{Int}(M(P))$ : 埋め込み
   で $\nu(P)$ が $i(P)$ に正の方向に横断的に交わるものがとれる。

**定義 2.7 (理想三角形分割)** $M$ を境界をもつ 3 次元多様体とするとき、位相空間 $Q(M)$ の三角形分割 $\mathcal{T}'$ から誘導される $\mathrm{Int}(M)$ の $1, 2, 3$ 次元の開胞への分割 $\mathcal{T}$ を $M$ の理想三角形分割とよぶ。但し

1. $Q(M)$ は $M$ から $\partial M$ の各連結成分をそれぞれ点に縮約することにより得られる空間
2. $\mathcal{T}'$ は多面体の自己隣接を許す三角形分割
3. $\mathcal{T}'$ の頂点は $\partial M$ の連結成分に対応する $Q(M)$ の点と一致する

**注意 2.8** 3 次元多様体内の標準的スパインと理想三角形分割の集合との間には自然な全単射が存在することが示されている。1 つの理想三角形分割を与えたとき、これに対応する標準的スパインは、双対セル分割の 2-骨格として得られる。この対応の逆写像を $P \mapsto \mathcal{T}(P)$ と表す。

$P$ の各セルにおいて、そのセルと $\mathcal{T}(P)$ との交点をそのセルの中点とよぶ。

$P$ を分岐スパインとする。このとき、$\mathcal{T}(P)$ の各辺は $\nu(P)\,|_{\mathrm{Int}(M(P))}$ の軌道であり、各 2-単体はこの奇跡の和集合となっているとしてよい。これにより、$\mathcal{T}(P)$ の辺には自然に向きをいれられる。

**注意 2.9** 辺だけでなく、面や四面体にも次のような自然な向きが入れられる。四面体には、$M(P)$ の向きを制限して入れればよい。辺には螺旋状

向きが存在するから、$\mathcal{T}(P)$ の各面の向きを、それと双対な辺との $M(P)$ での代数的交点数が正になるように入れればよい。

**定義 2.10**

$$X(P) = M(P)/\partial(M(P))$$

$$x_0(P) = \partial(M(P))/\partial\,(M\,(P))$$

とおくと、$X(P)\backslash\{x_0(P)\} \cong \mathrm{Int}(M(P))$ であるから $P$ は $X(P)$ に自然に埋め込まれる。さらに、これから、$X(P)\backslash\{x_0(P)\}$ 上のベクトル場 $\bar{\nu}(P)$ が $\nu(P)\,|_{\mathrm{Int}(M(P))}$ に対応して定義できる。このとき、$M(P)$ の理想三角形分割 $\mathcal{T}(P)$ は唯一つの頂点 $x_0(P)$ をもち、各辺、面が $\bar{\nu}(P)$ の奇跡の和集合からなる $X(P)$ の三角形分割 $\mathfrak{T}(P)$ を誘導する。

**注意 2.11** $x_0(P)$ が正であると仮定すると、先の注意 2.9 で述べたようにして、$\mathfrak{T}(P)$ のすべての単体に自然な向きが入れられる。

**定義 2.12** ($P$ に同伴する spider) $P$ に同伴する *spider* を

$$s(P) = \sum_c \alpha_c \ : \ X(P) \text{ 上の特異 1-鎖}$$

として定める。(但し $c$ は $P$ の全てのセルの中点をとり、$\alpha_c$ は $c$ を始点とする $\bar{\nu}(P)$ の正の軌道の閉包を表す。)

以下、簡単のため、$\pi = \pi_1(X(P), x_0(P))$ とおく。$(X(P), x_0(P))$ の普遍被覆空間を $(\tilde{X}(P), \tilde{x}_0(P))$ と書く。(但し、$\tilde{x}_0(P)$ は $x_0(P)$ の固定された持ち上げ) このとき、$\tilde{X}(P)$ において、$\tilde{x}_0(X)$ を基点としてとることにより、$\pi$ の作用を考えることが出来る。

$\mathfrak{T}(P)$ の $\tilde{X}(P)$ への $\pi$-不変な持ち上げを $\tilde{\mathfrak{T}}(P)$ とし、これから得られる鎖複体を $C_*^{cell}(\tilde{X}(P);\mathbb{Z})$ とおくと、$C_*^{cell}(\tilde{X}(P);\mathbb{Z})$ には $\mathbb{Z}[\pi]$-加群の構造を入れられる。さらに、各 $C_i^{cell}(\tilde{X}(P);\mathbb{Z})$ は自由であり、自由基底は $\mathfrak{T}(P)$ の $i$-単体の順序と、それぞれに対する 1 つの持ち上げを決めることにより定められる。(向きは先の注意 5.? から自然に決まっている。)

**定義 2.13**

$$\tilde{s}(P) = \sum_c \tilde{\alpha}_c \quad : \quad \tilde{X}(P) \text{ 内の特異 1-鎖}$$

( 但し、$\tilde{\alpha}_c$ は $\tilde{x}_0(P)$ を終点にもつ唯一つの $\alpha_c$ の持ち上げ )
と定める。

$c$ を中点に持つセルと双対な $\mathfrak{T}(P)$ の次元が正の各単体に対し、この $\tilde{X}(P)$ への持ち上げを、$\tilde{\alpha}_c$ の始点を含むものでとる。
$\sigma$ を $\mathfrak{T}(P)$ の単体の順序とするとき、$\sigma$ と上の持ち上げから得られる $C_i^{cell}(\tilde{X}(P);\mathbb{Z})$ の自由 $\mathbb{Z}[\pi]$-基底を $g_i(P,\sigma)$ で表す。

**定義 2.14 (twisted-ホモロジー群)** アドミシブルな環 $\Lambda$ と、環準同型

$$\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to \Lambda$$

が与えられたとする。このとき、*twisted*-鎖複体 $C_*^{\varphi}(P)$ を

$$C_*^{\varphi}(P) = \Lambda \otimes_{\varphi} C_*^{cell}(\tilde{X}(P), \mathbb{Z})$$

と $C_*^{cell}(\tilde{X}(P), \mathbb{Z})$ の境界作用素から誘導される境界作用素により定義する。いま、$C_i^{\varphi}(P)$ は自由 $\Lambda$-加群であり、$C_i^{cell}(\tilde{X}(P), \mathbb{Z})$ の各 $\mathbb{Z}[\pi]$ -基底は $C_i^{\varphi}(P)$ の $\Lambda$-基底を定める。$g_i(P, \sigma)$ に対応する $C_i^{\varphi}(P)$ の $\Lambda$-基底を $g_i^{\varphi}(P, \sigma)$、$C_i^{\varphi}(P)$ の $i$ 次元ホモロジー群を $H_i^{\varphi}(P)$ で表す。

**定義 2.15 (Reidemeister torsion)** $C_*^{\varphi}(P)$ がアサイクリックであるとき、*Reidemeister torsion* は

$$\tau_0^{\varphi}(P, \sigma) = \tau(C_*^{\varphi}(P)) \in \mathrm{GL}(\Lambda)$$

として定義される。

## 2.1 極大アーベル torsion

$X$ を連結な有限 $CW$ 複体とする。鎖群 $C_1(X)$ は有限生成であるから、$H = H_1(X; \mathbb{Z})$ は有限生成アーベル群になる。従って、定理 1.15 より、$\mathbb{Q}[H]$ は整域の直和 $\mathbb{Q}[H] = \bigoplus_{i=1}^{k} R_i$ に一意的に分解できる。このとき、$\varphi_i : \mathbb{Z}[H] \to Q(R_i)$ を

$$\mathbb{Z}[H] \hookrightarrow \mathbb{Q}[H] \hookrightarrow Q(\mathbb{Q}[H]) = \bigoplus_{i=1}^{k} R_i \xrightarrow{p_i} Q(R_i) \tag{7}$$

(但し、$p_i$ は第 $i$ 成分への射影) と定める。$X$ のオイラー構造 $e$ を 1 つとり、固定する。

**定義 2.16** $CW$ 複体 $X$ の極大アーベル *torsion* を

$$\tau(X, e) = \left[ \sum_{i=1}^{k} \tau^{\varphi_i}(X, e) \right] \in Q(R_i)/\pm H$$

を $CW$ 複体 $X$ の極大アーベル *torsion* とよぶ。

極大アーベル torsion は、次の定理により、大変重要である。

**定理 2.17** $X$ を有限 $CW$ 複体、$H = H_1(X)$ と置く。体 $F$ と環準同型 $\varphi : \mathbb{Q}[H] \to F$ が与えられたとき、$Q_\varphi = Q_\varphi(\mathbb{Q}[H]) \subset Q(H)$ と置くと、補題 1.13 より、これは環準同型 $\tilde{\varphi} : Q_\varphi \to F$ に一意的に拡張される。このとき、$\tau^\varphi(X) \neq 0$ ならば、$\tau(X) \in Q_\varphi / \pm H$ であり、かつ

$$\tau^\varphi(X) = \tilde{\varphi}(\tau(X)) \in F^\times / \pm \varphi(H)$$

が成り立つ。

証明は省くが、この定理は、つまり体に値をとる 0 でない $X$ の任意の Reidemeister torsion は $\tau(X)$ から定まる、と言う事を言っている。

$R$ が可換環であるときを考える。$H = H_1(X) = \pi/[\pi,\pi]$ とおき、$h : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}[H]$ を自然な射影とする。環準同型 $\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to R$ が与えられたとき、上の議論において定義された $H_*^\varphi(X)$、$\tau^\varphi(X)$ は、普遍被覆空間 $\tilde{X}$ からではなく、次のようにして極大アーベル被覆空間 ($H$ を被覆変換群として持つ $X$ の唯一の被覆空間)$\hat{X}$ から計算する事が出来る。

$H = H_1(X) = \pi/[\pi,\pi]$ とおき、$h : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}[H]$ を自然な射影とする。いま、$R$は可換環であるから、環準同型 $\psi : \mathbb{Z}[H] \to R$ で、$\psi \circ h = \varphi$ を満たすものが存在する。$\hat{X}$ に、$X$ から誘導される $CW$ を入れると、$H$ の $\hat{X}$ への作用は $\mathbb{Z}[H]$ の $C_k(\hat{X})$ への作用を定める。各 $k$ について、$X$ の向き付けられた全ての $k$-セルの集合に任意に順番を入れ、それぞれに対し、その $\hat{X}$ への持ち上げを一つ任意にとり固定すると、それらは $R \otimes_\psi C_k(\hat{X})$ の自由 $R$-基底になる。(この持ち上げの集合を**極大アーベル被覆空間のセルの基礎集合**とよぶ。) ここで、$r \otimes e, r \otimes (g \cdot e) \in R \otimes_\varphi C(\tilde{X})$ が $g \in [\pi,\pi]$ を満たしているときは、$r \otimes (g \cdot e) = (\varphi(g)r) \otimes e = ((\psi \circ h)(g)r) \otimes e = (\psi(1)r) \otimes e = r \otimes e$ が成り立つから、$R$-鎖同型

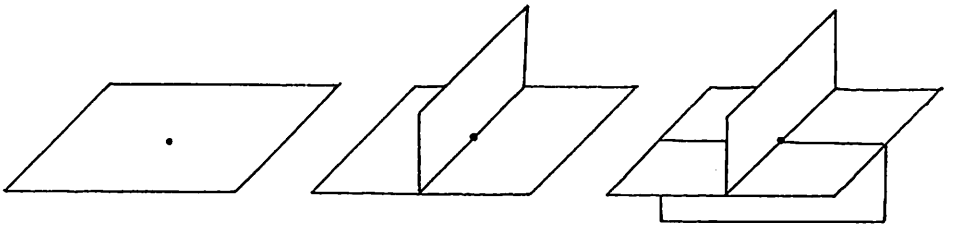
$$R \otimes_\varphi C(\tilde{X}) \cong R \otimes_\psi C(\hat{X})$$

が $r \otimes e \mapsto r \otimes e$ により得られる。

よって、この右式を使って $H_*^\varphi(X), \tau^\varphi(X)$ を計算できる。この値は $\psi$ のみに依っているから、$H_*^\varphi(X), \tau^\varphi(X)$ を $H_*^\psi(X), \tau^\psi(X)$ と書く事もある。

## 3 DS-diagram による言い換えと具体的な計算例

**定義 3.1 (偽曲面)** $P$ が偽曲面であるとは、$P$ 上の任意の点 $p$ において、次の 3 つタイプのいずれかの近傍がとれるときを言う。



(*i*) (*ii*) (*iii*)

図 *3.1*

この章では、以下、特に断らない限り $M$ は連結で向き付け可能なコンパクト 3 次元多様体とする。

**定義 3.2 (シンプルスパイン)** 偽曲面 $P \in M$ がシンプルスパインであるとは、$M \backslash P \cong B^3$ となるときを言う。

**定義 3.3 (標準的スパイン)** シンプルスパイン $P \in M$ の特異点集合からえられる $P$ の自然な層別化におけるすべての連結成分が開セルになっているとき、$P$ は標準的であると言う。次元により、この連結成分をそれぞれ頂点、辺、面とよび、それぞれ $V(P), E(P), F(P)$ と書く。

**定義 3.4 (DS-図式)** 次を満たす 3 対 $\Delta = (G, f, P)$ を *DS*-図式と呼ぶ。

1. $G$ は $S^2$ 上の 3-正則グラフ
2. $P$ は閉偽曲面
3. $f : S^2 \partial B^3 \to P$ は局所同相写像
4. $\sharp f^{-1}(f(x)) = 2$ $(x \in S^2 \backslash G)$, $\sharp f^{-1}(f(x)) = 3$ $(x \in G \backslash V(G))$
   $\sharp f^{-1}(f(x)) = 4$ $(x \in V(G))$

*DS*-図式 $\Delta$ が与えられたとき、$M = B^3/f$ は ( 向き付け可能とは限らない ) 閉 3 次元多様体になる。従って、$\Delta$ をこの $M$ の *DS*-図式と呼ぶ。

**定義 3.5 (E-サイクル)** *DS*-図式 $\Delta = (G, f, P)$ が与えられたとき、グラフ $G$ の閉路 $e$ が *E*-サイクルであるとは、次を満たすときを言う。

1. $S^2 \backslash e = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (2 つの開円盤 ) と置いたとき、$E(P)$ の任意の元 $x$ に対し、

$$\sharp(e \cap f^{-1}(x)) = \sharp(\Sigma \cap f^{-1}(x)) = \sharp(\Sigma_2 \cap f^{-1}(x)) = 1$$

   が成り立つ。

2. $F(P)$ の任意の元 $x$ に対し、

$$\sharp(\Sigma \cap f^{-1}(x)) = \sharp(\Sigma \cap f^{-1}(x)) = 1$$

   が成り立つ。

*3.* $V(P)$ の任意の元 $x$ に対し、

$$\sharp(e \cap f^{-1}(x)) = 2$$
$$\sharp(\Sigma \cap f^{-1}(x)) = \sharp(\Sigma_2 \cap f^{-1}(x)) = 1$$

が成り立つ。

このとき、$E$-サイクルまで込めた $DS$-図式を $\Delta(G, f, P; e)$ と書く事にする。

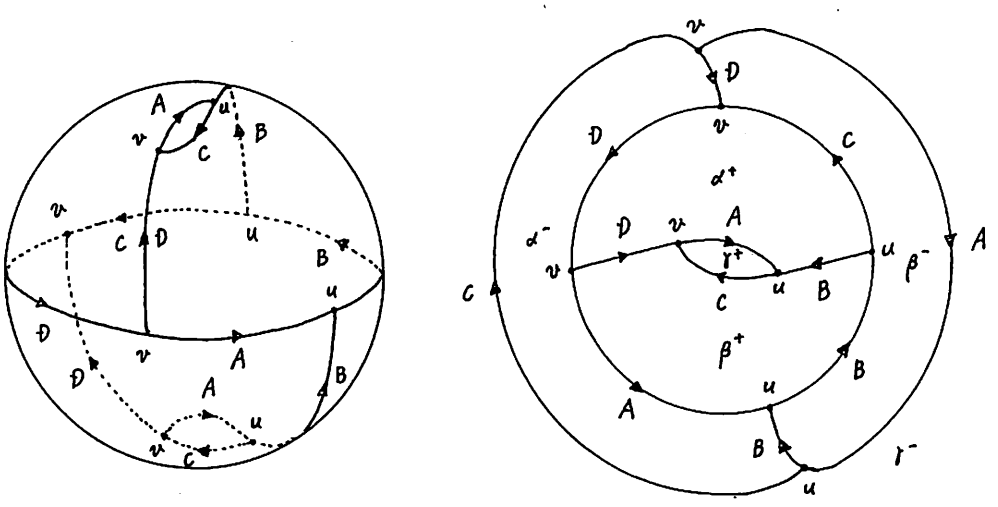
**注意 3.6** $e/f$ は 4-正則グラフ $G/f$ のオイラー回路になっている。

次の定理により、E-サイクル付きの DS-図式を考えることの一般性が分かる。

**定理 3.7** 全ての閉 3 次元多様体は $E$-サイクル付きの $DS$-図式を持つ。

これにより、E-サイクル付きの DS-図式からフォーマルに Reidemeister torsion を計算する一般的な方法を見つけることの重要性が明確になった。以下、フォーマルにとはいかないが、図式から定義に従って素直に計算をしていき、この方法による利点を調べる。

**例 3.8** レンズ空間 $M = L(3,2)$ の $DS$-図式 $\Delta = (G, f, P)$ は次図 3.2 で与えられる。

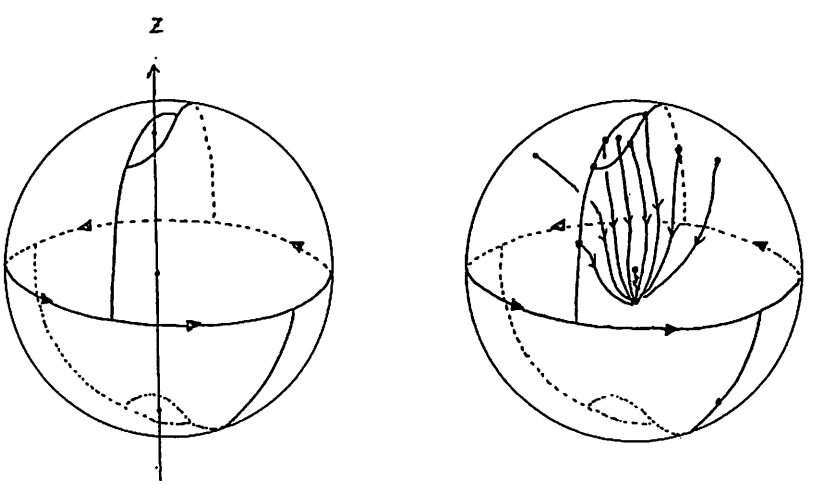



(*i*) (*ii*)

図 *3.2*

図 3.2(*ii*) は、左図の南極で切り開いて平面状に書いたものである。

$B^3$ を単位球体として、$\mathbb{R}^3$ に $E$-サイクルが $xy$-平面に乗るように埋め込んだ図が下図 *3.3* の (*i*) である。このとき、$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $-\frac{\partial}{\partial z}$ は $M$ 上のベクトル場を ( ホモトピーの差を除いて ) 一意的に決める。




(*i*) (*ii*)

図 *3.3*

命題 2.5 における *Benedetti-Petronio* 流の定義では $N(M \setminus \mathring{B}^3)$ が $M(P)$ に対応しており、(*i*) が表すベクトル場が $\nu(P)$ に対応している。

右図 $(ii)$ は、$(i)$ のベクトル場に対応する *spider* になっている。( 実は、この *spider* は、*Turaev*([*Tur* 2]) の意味での「組合せ的 *Euler* 鎖」とは微妙に異なっている。)

この *Euler* 構造から *Reidemeister torsion* を計算する。*DS*-図式が与えられたとき、対応する多様体の基本群の表示は、*Seifert van-Kampen* の定理より、$P$ の双対複体 (この 0-セルは *1* つ) の 1-セルを生成元、2-セルを関係式として得られる。従って、面 $\alpha, \beta, \gamma$ に対応する生成元を $a, b, c$ とおき、$P$ の各辺の周りで面どのように張り合わせられているかを見て、対応する関係式を立てていくと、表示

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c \mid bac^{-1}, b^2c^{-1}, abc^{-1}, a^2b^{-1} \rangle$$

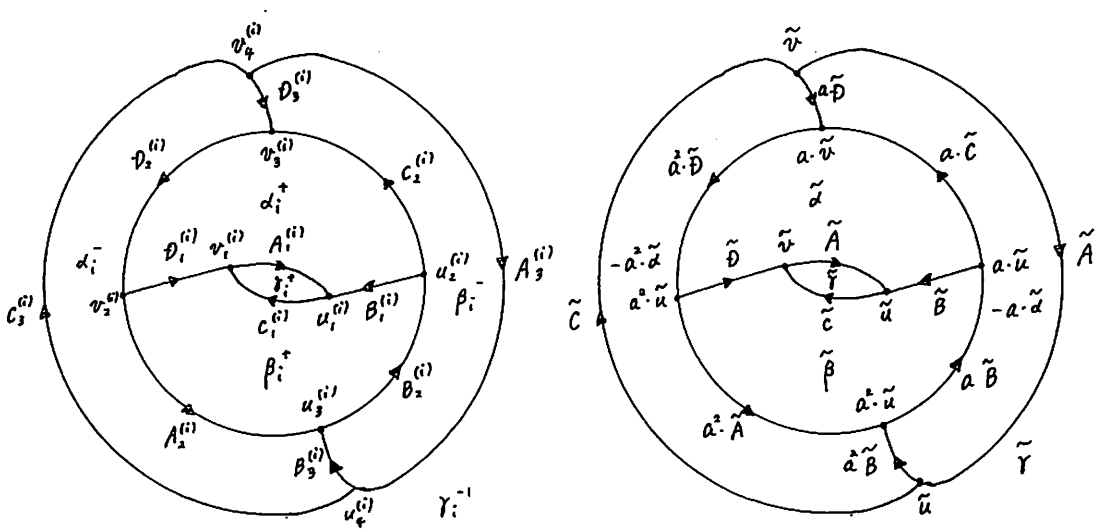
が得られる。この関係式を解くと、$a^3 = 1, b = a^2, c = 1$ であるから、$M$ の普遍被覆空間は図 3.2 の図式の 3 つのコピーを図 3.4$(i)$ のようにとり (3.4$(i)$ は $B_i^3, (1 = 1, 2, 3)$ 上の図 )、各面を

$$\alpha_i^+ \leftrightarrow \alpha_{i+1}^-, \quad \beta_i^+ \leftrightarrow \beta_{i+2}^-, \quad \gamma_i^+ \leftrightarrow \gamma_i^-$$

で張り合わせれば得られる。先の *spider* に対応する普遍被覆空間のセルの基礎集合は

$$\{B_1^3, \alpha_1^+, \beta_1^+, \gamma_1^+, A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)}, D_1^{(1)}, u_1^{(1)}, v_1^{(1)}\}$$

である。これをそれぞれ $\{\tilde{B}^3, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ と置く。これに $a \in \pi_1(M)$ を作用させて $B_1$ 上の図式を見たものが下図 3.4$(ii)$ である。



$(i)$ $(ii)$

図 *3.4*

境界準同型 $\partial$ による各像は次の通り。

$\partial(\langle\tilde{B}_1^3\rangle) = (1-a^2)\langle\tilde{\alpha}\rangle + (1-a)\langle\tilde{\beta}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{\alpha}\rangle) = \langle\tilde{A}\rangle - \langle\tilde{B}\rangle + a\langle\tilde{C}\rangle + (1+a^2)\langle\tilde{D}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{\beta}\rangle) = a^2\langle\tilde{A}\rangle + (1+a)\langle\tilde{B}\rangle + \langle\tilde{C}\rangle - \langle\tilde{D}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{\gamma}\rangle) = -\langle\tilde{A}\rangle - \langle\tilde{C}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{A}\rangle) = \langle\tilde{u}\rangle - \langle\tilde{v}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{B}\rangle) = (1-a)\langle\tilde{u}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{C}\rangle) = -\langle\tilde{u}\rangle + \langle\tilde{v}\rangle$

$\partial(\langle\tilde{D}\rangle) = (1-a^2)\langle\tilde{v}\rangle$

ここで、体 $F$ と環準同型 $\varphi : \mathbb{Z}[\pi_1(M)] \to F$ で $\varphi(a) = t \neq 1$ が与えられたとする。このとき、*twisted*-鎖複体 $C_*^{\varphi}(\tilde{M})$ は

$$\{0\} \to F \otimes_{\varphi} C_3(\tilde{M}) \xrightarrow{\partial_1} F \otimes_{\varphi} C_3(\tilde{M}) \xrightarrow{\partial_0} F \otimes_{\varphi} C_3(\tilde{M}) \to \{0\}$$

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & t^2 & -1 \\ -1 & (1+t) & 0 \\ t & 1 & -1 \\ (1+t^2) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

と書ける。従って、

$$\mathbf{b}_3 = \{\langle\tilde{B}^3\rangle\}, \mathbf{b}_2 = \{\langle\tilde{\alpha}\rangle, \langle\tilde{\gamma}\rangle\}, \mathbf{b}_1 = \{\langle\tilde{B}\rangle, \langle\tilde{D}\rangle\}, \mathbf{b}_0 = \phi$$

ととると、$\nu(M)$ に対応する *Reidemeister torson* は

$$\begin{aligned}
\tau^{\varphi}(M, \nu(M)) &= \prod_{i=0}^{2} [\partial \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_i / \mathbf{c}_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & t & (1+t) \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1-t^2 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{t-1}{(1-t)(t-1)(t^2-1)} \\
&= -\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} \in F^{\times}/\pm 1
\end{aligned}$$

となる事が分かった。ベクトル場の差を除いた、$M$ の多様体としての $\varphi$-*twisted Reidemeister torsion* は

$$\tau^{\varphi} = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} \in F^{\times}/\pm\{t^i\}_{i=0,1,2}$$

となる。

最後に、これから極大アーベル *torsion* を計算する。まず、$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Hom}(H_1(M), S^1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, S^1)$ を $\sigma_1(a) = 1, \sigma_2(a) = e^{2\pi i/3}$ で定めると、定理 1.15 の言葉で

$$Q(H_1(M)) = F_{m_{\sigma_1}} \oplus F_{m_{\sigma_2}}$$

と書ける。ここで、$\sigma_i$ から *2.2* 節の式 (7) のようにして $\varphi_i$ を作ると、

$$C^{\varphi_1}(M) = \mathbb{Q} \otimes_{\varphi_1} C(\hat{M}) = C(X;\mathbb{Q})$$

が得られ、$H_0(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ であるから、*twisted*-鎖複体 $C^{\varphi_i}(X)$ はアサイクリックにはならない。従って、$\tau_1(X) = 0$ になる。

このことから、

$$\tau(M) = \tau^{\varphi_2}(M) = \frac{1}{(1-T)(1-T^2)} \in Q(H)/\pm H$$

( 但し、$T = \varphi_2(a)$ と置いている) が得られた。

## 参考文献


[BePe 1] R.Benedetti, C.Petronio, Torsion Invariants of Combed 3-Manifolds with Boundary Pattern and Legendrian Links, [math.GT/9809148], 1998.

[BePe 2] R.Benedetti, C.Petronio, Reidemeister Torsion of 3-Dimensional Euler Structures with Simple Boundary Tangency and Legendrian Knots, [math.GT/9907184] , 1999.

[BePe 3] R.Benedetti, C.Petronio, Reidemeister Torsion of 3-Dimensional Euler Structures with Simple Boundary Tangency and Pseudo-Legendrian Knots, [math.GT/0002143], 2002.

[Ishii] I.Ishii, Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds, Tokyo J. Math. (1992) 297-312.

[Tur *1*] V.Turaev, Introduction to Combinatorial Torsions, Birkhäuser, 2000.

[Tur 2] V.Turaev, Torsion of 3-dimensional Manifolds, Birkhäuser, 2002.