三角形群について

東京女子大学　小林一章

箱根セミナー２０１９のプログラムに登録されている講演題名は「ブレイド群と対称群」でした。しかし実際に講演させていただきましたのは「二項正多面体群」でした。この論文では、これをさらに拡張した「三角形群について」と言う事にさせていただきます。
正多面体群は次のような有限表示を持ちます。
正４面体群 $T = \langle a, b | a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$
正８面体群 $O = \langle a, b | a^4 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$
正２０面体群 $I = \langle a, b | a^5 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$
参考文献 [W] により、回転群 $SO(3) (\cong \mathbf{R}P^3)$ に含まれる既約有限部分群は、上の有限群のほかに有限巡回群 $\mathbf{Z}_p$ と２面体群 $\mathbf{D}_p$ に限る事が知られている。そこで $SO(3)$ の普遍被覆空間を取ると $\pi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ となり（これは実際は２重被覆空間である)、この π による逆像 $\pi^{-1}(T),\ \pi^{-1}(O),\ \pi^{-1}(I)$ を各々 $T^*,\ O^*, I^*$ と書き、２項４面体群、２項８面体群、２項２０面体群と言う事にする。２項多面体群の位数は多面体群の位数の２倍である。たとえば $|I^*| = 2|I|$
$\mathcal{H}^3$ をホモロジー３次元球面とし、$G = \pi_1(\mathcal{H}^3)$ としたとき、[T] より、
$H_1(G : \mathbf{Z}) \cong H_1(\mathcal{H}^3) = 0$
$H_2(G : \mathbf{Z}) \cong H_2(\mathcal{H}^3)/\Lambda_2(\mathcal{H}^3$ ここで $\Lambda_2(\mathcal{H})$ は Hurwitz 写像 $\pi_2(\mathcal{H}^3) \longrightarrow H_2(\mathcal{H}^3)$ $(= 0)$ の像。この事と、上の事よりホモロジー３球面 $\mathcal{H}^3$ の基本群 $\pi_1(\mathcal{H}^3)$ が有限群になるのは２項２０面体群 I^* のみであることがわかり、さらに Poincaré 予想が解決しているのでこの時のホモロジー３球面は Poincaré の３球面（ドデカヘドラル空間)

であることもわかる。
次に正多面体群の有限表示は上に記したが、２項多面体群の有限表示は次のようになる。
$T^* = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 \rangle$
$O^* = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = (ab)^2 \rangle$
$I^* = \langle a, b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$
また $T \cong A_4$ (４次交代群)、　$O \cong S_4$ （４次対称群）　$I \cong A_5$ (５次交代群）
と言う事もわかっている。したがって位数は $|T| = 12,$
$|O| = 24,\ |I| = 60$ である。
また $1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow T^* \longrightarrow T \longrightarrow 1$ という完全系列が存在するが、これは分離しない完全系列である（$O,\ I$ も同様である）
$T^*,\ O^*,\ I^*$ は４元数を使って次のようにもかける。
$T^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k,\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}$
$a = \frac{1}{2}(1+i+j+k), \quad b = \frac{1}{2}(1+i+j-k)$ とおくと $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 \rangle$ となる。
$O^* = \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^4 = rst \rangle$
$= \langle s, t \mid t^4 = s^3 = (st)^2 \rangle$
$s = \frac{1}{2}(1+i+j+k),\ t = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}$ とおくと、
$= \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k,\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\} \cup Aut(\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i))$ $I^* = \{\pm 1, \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\} \cup$
$[\{\frac{1}{2}(\pm i \pm \varphi^{-1} j \pm \varphi k)\}$ の偶置換全体$]$
ここで $\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ （黄金比）
$T^* \cong SL(2, \mathbf{Z}_3) \longrightarrow PSL(2, \mathbf{Z}_3) \cong T \cong A_4$
$O^* \cong \mathbf{C}SU(2, \mathbf{Z_3})$
$I^* \cong SL(2, \mathbf{Z}_5)$
$T,\ O,\ I$ の有限表示を一般化して次の三角形群 $\sum(p, q, r)$ の定義を得る。

定義 1 三角形群 $\sum(p, q, r) =$
$\langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle =$
$\langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle$

$\delta = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ の正、負、0 によって球面形、双曲平面形、ユークリッド平面形に分けられる。

$\delta > 0$ 球面形

$\delta < 0$ 双曲平面形

$\delta = 0$ ユークリッド平面形

$\delta > 0$ のとき。この時のみ $\sum(p, q, r)$ は有限群であり、$(p, q, r) = (2, 3, 3),\ (2, 3, 4),\ (2, 3, 5),\ (2, 2, n)\ (n > 1)$ のみである。これは内角が

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$$

の球面三角形に対応している。またこれらに対応する球面三角形で半径 1 の球面を埋め尽くしていくと次の球面三角形の個数で埋め尽くせる。

$(2,3,3)$ では $|A_4| = 12$ 枚　$(2,3,4)$ では $|S_5| = 24$ 枚
$(2,3,5)$ では $|A_5| = 60$ 枚
三角形群 $\sum(p,q,r)$ の位数は

$$\left|\sum(p,q,r)\right| = \frac{4qr}{4-(q-2)(r-2)}$$

$\delta > 0$ のとき、すべて $p = 2$ であることに注意。
その球面三角形の面積は

$$\pi(1/p + 1/q + 1/r - 1)$$

$\delta = 0$ のとき、$(p,q,r) = (2,4,4),\ (3,3,3),\ (2,3,6)$　これらは直角二等辺三角形、正三角形、（正三角形の半分である）直角三角形になっている。ユークリッド平面では相似なものは同じ (p,q,r) を与えるので、(p,q,r) に対応する三角形の面積は決まらない。
$\delta < 0$ のとき、双曲平面形。$(p,q,r) \mapsto$ 内角が $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ の双曲三角形が対応している。その三角形の面積は
$\pi(1 - 1/p - 1/q - 1/r)$ で $(1-(1/2+1/3+1/7))\pi = \pi/42$ から π まで動く。（π には到達しない）
３次元 Brieskorn 多様体 $M(p,q,r)$ との関係
$M(p,q,r) = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\} \cap S_\varepsilon^5$
これはタイプ (p,q) のトーラス絡み目で分岐する S^3 の巡回 $r-$ 重分岐被覆空間である。[Mi]
以前に定義したように $\pi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ として $\Gamma(p,q,r) = \pi^{-1}(\sum(p,q,r))$ とおく。
$\pi_1(M(p,q,r)) \cong \Gamma(p,q,r)$ である。

三角形群$\sum(p,q,r)$とコクセター群との関係

定義 2 コクセターシステムとは次のようなものである。
$S \subset \mathbf{N} \cup \{\infty\}$を有限集合とする。コクセター行列
$m : S \times S \longrightarrow S$とは

1. mは対称行列。
2. mの対角成分のみが1である。

を満たすものとする。

コクセター行列mから得られるコクセターグラフ（コクセターダイアグラム）とは頂点集合はSで辺集合は$m(s,s') \geq 3$となる非順序対$\{s,s'\}$である物の全体。このグラフで$m(s,s') \geq 4$となる辺は、その数$m(s,s')$でラベル付しておく。

例 1

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & \infty \\ 2 & 2 & \infty & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$S = \{1,2,3,4,\infty\} = V$
$E = \{m(s,s') \geq 3$となる非順序対$(s,s')\}$

$S^2_{fin} = \{(s,s') \in S^2 \quad m(s,s') \neq \infty\}$とし、
コクセター行列mは
生成元の集合S、関係式達
$\{(s,s')^{m(s,s')} = 1 \ for {}^{\forall}(s,s') \in S^2_{fin}\}$を持つ有限表示群を決める。
$(*)$
$m(s,s') = 1$だから$s^2 = 1 \ {}^{\forall}s \in S$
一方関係式は$s^2 = 1$を使うと

$$\underbrace{ss'ss' \cdots ss'}_{m(s,s')/2} = \underbrace{s'ss's \cdots s's}_{m(s,s')/2} \text{ for } {}^{\forall}(s,s') \in S^2_{fin}$$

を示している。
特に$m(s,s') = 2 \longleftrightarrow ss' = s's \longleftrightarrow s$と$s'$は可換

例 2 例 1 で与えられたコクセター行列 m、コクセターグラフで決定される有限表示群は
$\langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid s_i^2 = 1\ (i = 1, 2, 3, 4), s_1 s_2 = s_2 s_1,$
$s_1 s_4 = s_4 s_1,\ s_2 s_4 = s_4 s_2,\ (s_1 s_3)^3 = 1,\ (s_2 s_3)^4 = 1\rangle$

$(s_1 s_3)^3 = 1$ から $s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3,\quad (s_2 s_3)^4 = 1$ から $s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2$ が示せる。
群 W が $(*)$ のような有限表示を持つとき、(W, S) をコクセターシステムと呼ぶ。
三角形群　$\Gamma(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = 1\rangle$
これは 3 つの生成元を持つコクセター群である。
コクセター群として書くと
$\Gamma(p, q, r) = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1 s_2)^{m(s_1, s_2)} = (s_2 s_3)^{m(s_2, s_3)} = (s_3 s_1)^{m(s_3, s_1)} = 1,\ m(s_1, s_2) = p,\ m(s_2, s_3)$
$= q,\ m(s_3, s_1) = r\rangle$
従ってコクセター行列

$$m = \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ p & 1 & q \\ r & q & 1 \end{pmatrix}$$

コクセターグラフは p,q,r の大きさによって変わる。
$p=2,q=2,r=2 \longrightarrow$ コクセターグラフ　$\bullet_{s_1}$　$\bullet_{s_2}$　$\bullet_{s_3}$
$p=2,q\geq 3,r\geq 3 \longrightarrow$ コクセターグラフ　$\bullet_{s_1}$　$\bullet_{s_3}$　$\bullet_{s_2}$
$p\geq 3,\ q\geq 3,\ r\geq 3 \longrightarrow$ コクセターグラフ

Γ の指数２の部分群（von Dyck group）又は普通の三角形群（ordinary triangle group)Σ は、$p=q=r=2$ ではないとき、それらの生成元は全てが位数２ではないので、コクセター群に対応していない。
$\Sigma(p,q,r)=\langle x,y \mid x^p=y^q=(xy)^r=1\rangle$
x,y,xy は $2\pi/p,\ 2\pi/q,\ 2\pi/r$ の回転に対応している。
$x=ab, y=ca, yx=cb.$
$\Sigma(p,q,r)$ は $\delta=1/p+1/q+1/r-1>0$ の時は正多面体群に対応しているので $\Gamma(p,q,r)$ は２項正多面体群に対応している。

参考文献

[$B-B$] A.Björner-F.Brenti：Combinatorics of Coxeter groups, Graduate Texts in Math. vol. 231 Springer-verlag 2005 [Mi] J.Milnor： On the 3-dimensional Brieskorn manifolds M(p, q, r)：In：Knots, groups and 3-manifolds, pp.175-225 Ann. of Math. Studies No. 84

[Mu] K. Murasugi：Study of Braids, Lecture Note p.246 Triangle group

[T] 田村一郎：多様体の多様性 [W] J.A.Wolf：Spaces of constant curvature, MacGraw Hill C., 1967

[Wi] Wikipedia：Triangle Group.