面心多様体の胞体分割について

東京女子大学　小林一章

凸 n 多角形 P_n の内部の点 A が、その多角形の面心 (Area Center) であるとは、A と P_n の各頂点を結んで出来る n 個の三角形の面積が等しい時を言います。

例 1 次の台形（四辺形）には面心がない。

$(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする台形

以下、原点 $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ を内点に含む凸多角形を考える。n 次行列 $U(x_1,\ldots,x_n)$ を

$$U(x_1,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} x_1 & -1 & & & \\ -1 & x_2 & -1 & & \mathbf{0} \\ & -1 & x_3 & -1 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & -1 & x_{n-1} & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

とする。

$u(x_1,\ldots,x_n)=\det U(x_1,\ldots,x_n)$ とおく。

$1\leq i<j\leq n$ をみたす (i,j) に対し、$u[i,j]=u(x_i,x_{i+1},\ldots,x_j)$ とおく。

定理 1 （$[H]$） 原点 $\mathbf{0}$ を面心とする n 角形が存在する必要十分条件は

$A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_n)=E_2$ をみたす $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$ が存在することである。ここで

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

であり、E_2 は 2 次の単位行列である。

命題 1 *([H])* n が 3 以上の自然数のとき、

$$A(x_1)\cdots A(x_n) = \begin{pmatrix} -u[2,n-1] & -u[2,n] \\ u[1,n-1] & u[1,n] \end{pmatrix}$$

命題 2 *([H])* n が 3 以上の自然数の時、次の 3 条件は同値である。

1. $A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_n) = E_2$
2. $u[1,n] = 1,\ u[1,n-1] = 0$ かつ $u[2,n] = 0$
3. $u[2,n-1] = -1, u[1,n-1] = 0$ かつ $u[2,n] = 0$

定義 1 *([H])* n が 3 以上の自然数のとき、
$AC_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n | u[1,n] = 1,\ u[1,n-1] = 0, u[2,n] = 0\}$ とおき、これを面心多様体と言う。

定義 2 n を自然数とする。
$V^n_{[i,j]}(c) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n | u[i,j](x_i,\ldots,x_j) = c\}$ とおき、これをチェビシェフ多様体と言う。
$AC_n = V^n_{[1,n]}(1) \cap V^n_{[2,n]}(0) \cap V^n_{[1,n-1]}(0)$ と表せる。

以下参考文献 $[H]$ に従って、長さ $2n$ の平衡丸カッコ列を Par_n と書き、長さ $2n$ の平衡山カッコ列を Ang_n と書く。$\mathbf{p} = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \in Par_n$ に対し、$L(\mathbf{p})$ を $\mathbf{p}$ の左丸カッコ列の集合とし、$L(\mathbf{p})$ に半順序を次のように定義する。
$p_i \langle\ p_j$ とは $i\langle\ j$ かつ $rnum(i)\ \rangle\ rnum(j)$
上の半順序に従って $L(\mathbf{p})$ の Hasse 図を描き、$p_k,\ \mathbf{p}$ の中身 $cont\ p_k$, $cont\ \mathbf{p}$ を次のように定義する。
p_k が極大元なら $cont\ p_k = \{k\}$
p_k が極大元でないなら $cont\ p_k = \{k, k+1, \ldots, rnum(k)-1\} - \bigcup_{p_i \rangle p_k} cont\ p_i$
$cont\ \mathbf{p} = \{cont(p_i) | p_i \in L(\mathbf{p})\}$

例 2 $\mathbf{p} = ((\ ))((\ )(\ ))$ $p_1 \sim p_{10}$ $\quad L(\mathbf{p}) = \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_8\}$ 半順序は $p_1 \langle\ p_2,\ p_5 \langle\ p_6,\ p_5 \langle\ p_8$ *Hasse* 図を描くと極大元は p_2, p_6, p_8 　従

って $cont(p_2)=\{2\}$, $cont(p_6)=\{6\}$, $cont(p_8)=\{8\}$, $cont(p_1)=\{1,2,3\}-\{2\}=\{1,3\}, cont(p_5)=\{5,6,7,8,9\}-\{6\}\cup\{8\}=\{5,7,9\}$ 従って $cont(\mathbf{p})=\{\{2\},\{6\},\{8\},\{1,3\},\{5,7,9\}\}$
よって $\mathbf{p}=((\ ))((\ )(\ ))$ のとき、これから決まるイデアル $I_{\mathbf{p}}$ は

$I_{\mathbf{p}}=\{x_2,x_6,x_8,x_1+x_3,x_5+x_7+x_9\}$ $V_{\mathbf{p}}=V(I_{\mathbf{p}})=V_{\mathbf{p}}(x_2,x_6,x_8,x_1+x_3,x_5+x_7+x_9)$ （共通零点）

定理 2 *([H])* 任意の $n\in\mathbf{N}$ と任意の平衡括弧列 $\mathbf{p}\in Par_n$ に対し、$V_{\mathbf{p}}\subset V^{2n-1}_{[1,2n-1]}(0)$ が成り立つ。　因みに $|Par_n|=c_n$（カタラン数）である。

従って上の例は
$V_{\mathbf{p}}(x_2,x_6,x_8,x_1+x_3,x_5+x_7+x_9)\subset V^9_{[1,9]}(0)$ である。ここで $u[1,9]$ は

$$u[1,9]=\det\begin{pmatrix} x_1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & x_2 & -1 & & \\ & -1 & x_3 & -1 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -1 & x_8 & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & x_9 \end{pmatrix}$$

$n=2$ のとき、$Par_2=\{(\ )(\ ),((\ ))\}$ $\mathbf{p}_1=(\ )(\ )$ $\mathbf{p_2}=((\ ))$
$L(\mathbf{p}_1)=\{p_{11},p_{13}\}$ $L(\mathbf{p}_2)=\{p_{21},\ p_{22}\}$
p_{11}, p_{13} は共に極大元、$L(\mathbf{p}_2)$ では p_{22} が極大元、従って $cont(p_{11})=\{1\}$, $cont(p_{13})=\{3\}$, $cont(p_{22})=\{2\}$, $cont(p_{21})=\{1,2,3\}-cont(p_{22})=\{1,3\}$
従って $cont(\mathbf{p}_1)=\{\{1\},\{3\}\}$, $cont(\mathbf{p}_2)=\{\{2\},\{1,3\}\}$
$V_{\mathbf{p}_1}=\{x_1,x_3\}$, $V_{\mathbf{p}_2}=\{x_2,x_1+x_3\}$
$V_{\mathbf{p}_1}$, $V_{\mathbf{p}_2}\subset V^3_{[1,3]}(0)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3|u[1,3]=0\}$

$$u[1,3]=\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix}=x_1x_2x_3-x_1x_3=0$$

故に確かに$V_{\mathbf{p_1}}$, $V_{\mathbf{p_1}} \subset V^3_{[1,3]}(0)$ になっている。
$A^3(=\mathbf{R}^3)$ を一点コンパクト化し 3 次元球面 S^3 にすると
$V_{\mathbf{p_1}} = e^0 \cup e^1 \quad V_{\mathbf{p_2}} = e^0 \cup e^1$
$n=3$ のとき、$Par_3 = \{\mathbf{p}_1 \sim \mathbf{p}_5\}$ $\mathbf{p}_1 = (\ )(\ )(\ )$ $\mathbf{p}_2 = ((\ ))(\ )$,
$\mathbf{p}_3 = (\ )((\ ))$, $\mathbf{p}_4 = ((\ )(\ ))$, $\mathbf{p}_5 = (((\ )))$.
$L(\mathbf{p}_1) = \{p_{11}, p_{13}, p_{15}\}$, $L(\mathbf{p}_2) = \{p_{21}, p_{22}, p_{25}\}$,
$L(\mathbf{p}_3) = \{p_{31}, p_{33}, p_{34}\}, L(\mathbf{p}_4) = \{p_{41}, p_{42}, p_{44}\}$, $L(\mathbf{p}_5) = \{p_{51}, p_{52}, p_{53}\}$
各 $\mathbf{p}_i$ の極大元は $\mathbf{p}_1$ では$\{p_{11}, p_{13}, p_{15}\}, \mathbf{p}_2$ では$\{p_{22}, p_{25}\}$, $\mathbf{p}_3$ では$\{p_{31}, p_{34}\}$, $\mathbf{p}_4$ では$\{p_{42}, p_{44}\}, \mathbf{p}_5$ では$\{p_{53}\}$
$V_{\mathbf{p}_1} = \{x_1, x_3, x_5\}$, $V_{\mathbf{p}_2} = \{x_2, x_5, x_1 + x_3\}$, $V_{\mathbf{p}_3} = \{x_1, x_4, x_3 + x_5\}$, $V_{\mathbf{p}_4} = \{x_2, x_4, x_1 + x_3 + x_5\}$, $V_{\mathbf{p}_5} = \{x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_5\}$
$V_{\mathbf{p}_1}, \ldots, V_{\mathbf{p}_5} \subset V^5_{[1,5]}(0) \subset A^5$

$$u[1,5] = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & & \\ 1 & x_2 & 1 & & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & x_3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

$= (x_3x_4x_5 - x_3 - x_5)(x_1x_2 - 1) - (x_4x_5 - 1)$
$V_{\mathbf{p}_1} = (x_1 = 0) \cap (x_3 = 0) \cap (x_5 = 0) = x_2x_5$ 平面 $\subset A^5 \subset S^5$ 即ち $V_{\mathbf{p}_1}$ は 2 次元超平面。
一般にアフィン空間 A^m 内の p 次元平面 P と q 次元平面 Q は交わるならば$p+q-m$ 次元平面。さらに A^m 内の p_1 次元超平面 $P_1, \ldots, p_s$ 次元超平面 P_s の交わりは、交わるとすると $(p_1 + \ldots + p_s) - (s-1)m$ 次元超平面である。$V_{\mathbf{p}_1}$ を S^5 でコンパクト化した $\overline{V_{\mathbf{p}_1}}$ は S^2 に同相
(胞体分割は $\overline{V_{\mathbf{p}_1}} = e^0 \cup e^2$)
よって

$$H_k(\overline{V_{\mathbf{p}_1}}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & k = 0, 2 \\ 0 & k \neq 0, 2 \end{cases}$$

一般に $p \in Par_n$ のとき、$V(\mathbf{p}) = V(I_p) \subset A^{2n-1}$ なら

$\overline{V(\mathbf{p})} \cong S^{n-1} \subset S^{2n-1}$

次に平衡山カッコ列を使ってチェビシェフ多様体 $V^n_{[i,j]}(c)$ の胞体分割を求める。

定義 3 *([H])* $S \subset \mathbf{N},\ c \in \mathbf{N}$ に対して $x_{S;c} = (\sum_{i \in S} x_i) - c$ と定義する。

平衡山カッコ列 $\mathbf{p} = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \in Ang_n$ に対して $cont(\mathbf{p}) = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ とした時、$f_{i;c} \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_{2n-1}]$ $(1 \leq i \leq n)$ を

$$f_{i;c} = \begin{cases} x_{S_i} & S_i\text{が丸カッコの中身（cont）のとき (c = 0)} \\ x_{S_{i;c}} & S_i\text{が山カッコの中身のとき} \end{cases}$$

とする。それらが生成するイデアルを $I_{\mathbf{p}}(c)$ とかく。
$I_{\mathbf{p}}(c) = \{f_{i;c} | 1 \leq i \leq n\}$
代数多様体 $V_{\mathbf{p}}(c) \subset A^{2n-1}$ を $V_{\mathbf{p}}(c) = V(I_{\mathbf{p}}(c))$ とする。

定理 3 （$[H]$） 平衡山カッコ列 $\mathbf{p} \in Ang_n$ と定数 $c \in \mathbf{R}$ に対して
$V_{\mathbf{p}}(c) \subset V^{2n-1}_{[1,2n-1]}((-1)^n c) \subset A^{2n-1}$ が成り立つ。
更に $\dim V_{\mathbf{p}}(c) = n - 1$

平衡山カッコ列の例

例 3 $n = 3$　$(\ )(\ )\langle\ \rangle,\ (\ )\langle(\ )\rangle,\ \langle(\ )\rangle(\ ),\ \langle(\ )\rangle(\ ), \langle(\ )(\ )\rangle,\ \langle\ \rangle(\ )(\ ), \langle((\ ))\rangle,$
$\langle\ \rangle((\ )),\ ((\ ))\langle\ \rangle$ の 9 個

注 1 $(\langle\ \rangle)(\ ),\ ((\langle\ \rangle))$ 等は $\langle_{p_i}\quad \rangle_{p_j}$ とした時、$p_1 \ldots, p_{i-1}; p_{i+1}, \ldots, p_{j-1};$ $p_{j+1} \ldots p_{2n}$ の各々が平衡カッコ列になっていない。

例 4 平衡山カッコ列 $\mathbf{p} = \langle((\ ))\rangle \in Ang_3$ を考える。
$L(\mathbf{p}) = \{p_1, p_2, p_3\}$　$p_1\langle\ p_2\langle\ p_3$
$cont(p_3) = \{3\}$　　$cont(p_2) = \{2,3,4\} - \{3\} = \{2,4\}$　　$cont(p_3) =$
$\langle 1,2,3,4,5\rangle - \{2,4\} \cup \{3\} = \langle 1,5\rangle$
$cont(\mathbf{p}) = \{\{3\}, \{2,4\}, \langle 1,5\rangle\}$

$I_{\mathbf{p}} = \{x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_5 - c\}$ $\quad V_{\mathbf{p}} = \{x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_5 - c\}$
$V^5_{[1,5]}(c) = \{(x_1, \ldots, x_5) | u[1,5] = c\}$

$$c = u[1,5] = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & & \\ 1 & x_2 & 1 & & \mbox{\Large 0} \\ 0 & 1 & x_3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

$= (x_1x_2 - 1)(x_3x_4x_5 - x_3 - x_5) - x_1(x_4x_5 - 1)$

これに $x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0$ を代入すると、満足するので
$V_{\mathbf{p}}(c) \subset V^5_{[1,5]}(c)$
しかし $c \neq 0$ なら $\{x_3 = 0\} \cap \{x_2 + x_4 = 0\} \cap \{x_1 + x_5 - c = 0\} = \emptyset$

よって $V_{\mathbf{p}} = \{x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_5 - c\} = \emptyset$
もし $c = 0$ なら $V_{\mathbf{p}}$ は $4 + 4 + 4 - 5 \times 2 = 2$ 次元の超平面である。
このときの胞体分割は
$V_{\mathbf{p}} = e^0 \cup e^2$ となり、コンパクト化すると 2 次元球面である。以下同様にブラケット列、多重ブラケット列の胞体分割も考えられる。

参考文献

[H] 面心の代数幾何学　硲　文夫著　東京電機大学出版会